

ВРАЩЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ЗЕМЛИ С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАТИВНЫХ МОМЕНТОВ СИЛ

Статья посвящена построению спектрально-корреляционной модели флуктуаций вращательного движения деформируемой Земли, вызванных изотропными и неизотропными флуктуационно-диссипативными возмущениями. Получен алгоритм аналитического моделирования и анализа спектрально-корреляционных характеристик вращения Земли. Приведены оценки уровня возмущений, приводящих к значимым уточнениям.

1. Вводные замечания. Постановка задачи. В основе современных астрометрических исследований лежит динамическая теория вращения Земли относительно центра масс. Исследование вращения вокруг центра масс затруднено сложностью построения динамической модели деформируемой Земли. В настоящее время создание адекватных современным данным наблюдений и измерений Международной службы вращения Земли (МСВЗ) математических моделей движения полюса Земли на различных интервалах времени представляет не только научный, но и практический интерес [1–5].

В [1–3] с помощью небесномеханических представлений и асимптотических методов механики построена математическая модель сложного процесса колебаний полюса деформируемой Земли, адекватная астрометрическим измерениям МСВЗ [4]. Она позволяет просто и статистически надежно описывать наблюдаемые явления (свободную нутацию, годовые колебания и тренд).

В [5–7] на базе вышеупомянутой модели разработана стохастическая комбинированная спектрально-корреляционная модель флуктуаций вращательного движения Земли. Рассмотрим обобщение этой задачи на случай анизотропных сил диссипации.

Геофизические наблюдения и измерения, связанные с крупномасштабными движениями (волны Россби) в атмосфере и океанах, с эффектами трения земных приливов свидетельствуют о том, что силы трения пренебрежимо малы, например, по сравнению с кориолисовыми силами инерции. Тем не менее трением и соответствующей диссипацией механической энергии пренебрегать нельзя. Эта диссипация происходит из-за наличия сил трения, проявления которых на Земле весьма многочисленны – это в земной коре, океанах, при дрейфе континентов, а также конвективные движения в мантии и т.д.

Поставим задачу построить на основе [1–3] и данных МСВЗ комбинированную небесномеханическую стохастическую корреляционную модель, ограничиваясь статистическими моментами до второго порядка включительно. Детерминированная компонента модели отражает основные регулярные динамические эффекты, а стохастическая часть – нерегулярные эффекты, подчиняющиеся статистическим закономерностям.

Для описания вращательного движения деформируемой Земли и колебаний ее полюса рассматривается упрощенная механическая модель вязкоупругого твердого тела [1–3]. Планета представляется двухслойной, состоящей из абсолютно твердого ядра (шара) и вязкоупругой мантии. Считается, что среда описывается линейной теорией вязкоупругости, а процесс деформирования происходит квазистатически. Могут быть взяты более сложные распределения характеристик. Однако какое-либо усложнение модели фигуры Земли не является оправданным, поскольку определение требуемых геометриче-

ских и физических характеристик планеты на основе статистической обработки косвенных данных измерений не может быть проведено с требуемой точностью и полнотой.

Предположим, что осевые и центробежные моменты инерции тензора инерции $\{J_{ij}\}$ ($i, j = p, q, r$) деформируемой Земли: $A = J_{pp}$, $B = J_{qq}$, $C = J_{rr}$, $J_{pq} = J_{qp}$, $J_{pr} = J_{rp}$, $J_{rq} = J_{qr}$ допускают на суточном интервале времени $T_* = 2\pi r_*^{-1}$ (r_* – осевая скорость вращения Земли) представления вида

$$J_{ij} = J_{ij}^* + J_{ij,1}' \sin r_* t + J_{ij,1}'' \cos r_* t + J_{ij,2}' \sin 2r_* t + J_{ij,2}'' \cos 2r_* t$$

При этом третьей, четвертой и т.д. гармониками можно пренебречь вследствие их малости. Звездочкой отмечены постоянные составляющие моментов инерции, а одним и двумя штрихами – амплитуды гармоник.

Назовем эффективными суточными горбами осредненные на суточном интервале следующие безразмерные величины [1, 2]:

$$u_1 = \langle (C - B)A^{*-1} \cos \varphi \rangle, \quad u_2 = \langle (C - A)B^{*-1} \sin \varphi \rangle$$

$$u_3 = \langle (B - A)C^{*-1} \sin 2\varphi \rangle$$

где $\langle \dots \rangle$ – символ осреднения на суточном интервале времени $T_* = 2\pi r_*^{-1}$, причем $u_1 \sim u_2$, $u_3 \ll u_{1,2}$.

Эффективными суточными выступами назовем следующие безразмерные величины центробежных моментов инерции, осредненные на суточном интервале:

$$u_4 = \langle J_{qr}A^{*-1} \rangle, \quad u_5 = \langle J_{qr}C^{*-1} \sin \varphi \rangle, \quad u_6 = \langle J_{qr}A^{*-1} \cos 2\varphi \rangle$$

$$u_7 = \langle J_{qr}B^{*-1} \sin 2\varphi \rangle, \quad u_8 = \langle J_{pr}B^{*-1} \rangle, \quad u_9 = \langle J_{pr}C^{*-1} \cos \varphi \rangle$$

$$u_{10} = \langle J_{pr}B^{*-1} \cos 2\varphi \rangle, \quad u_{11} = \langle J_{pr}A^{*-1} \sin 2\varphi \rangle, \quad u_{12} = \langle J_{pq}C^{*-1} \rangle$$

$$u_{13} = \langle J_{pq}A^{*-1} \sin \varphi \rangle, \quad u_{14} = \langle J_{pq}B^{*-1} \cos \varphi \rangle, \quad u_{15} = \langle J_{pq}C^{*-1} \cos 2\varphi \rangle$$

$$u_4, \dots, 7 \sim u_3, \quad u_8, \dots, 11 \ll u_4, \dots, 7, \quad u_{12}, \dots, 15 \ll u_8, \dots, 11$$

Здесь A^* , B^* , C^* – эффективные главные центральные моменты инерции с учетом деформаций "замороженной" Земли, обусловленных сложным движением – собственным вращением и движением относительно барицентра системы Земля – Луна.

В качестве модели удельных моментов параметрических флуктуационно-диссипативных сил примем следующую [5]:

$$M_1 A^{*-1} = V_{1t} - (D_1^* + D_1^0 + D_1^1 V_{1t})p_t - (D_{12}^* + D_{12}^0 + D_{12}^1 V_{2t})q_t - (D_{13}^* + D_{13}^0 + D_{13}^1 V_{3t})(r_* + \delta r_t) \quad (1.1)$$

$$M_2 B^{*-1} = V_{2t} - (D_{21}^* + D_{21}^0 + D_{21}^1 V_{1t})p_t - (D_2^* + D_2^0 + D_2^1 V_{2t})q_t - (D_{23}^* + D_{23}^0 + D_{23}^1 V_{3t})(r_* + \delta r_t) \quad (1.2)$$

$$M_3 C^{*-1} = V_{3t} - (D_{31}^* + D_{31}^0 + D_{31}^1 V_{1t})p_t - (D_{32}^* + D_{32}^0 + D_{32}^1 V_{2t})q_t - (D_3^* + D_3^0 + D_3^1 V_{3t})(r_* + \delta r_t) \quad (1.3)$$

Здесь p_r, q_r, r_t – проекции вектора мгновенной угловой скорости вращения Земли на связанные оси; $D_{1,2,3}^*$ и $D_{1,2,3}^0$, $D_{1,2,3}^1$ – коэффициенты, определяющие регулярную и нерегулярные (постоянную и переменные) составляющие удельных моментов сил диссипации; D_{ij}^* и D_{ij}^0 , D_{ij}^1 ($i, j = 1, \dots, 3; i \neq j$) – перекрестные коэффициенты регулярных и нерегулярных составляющих удельных моментов диссипации, учитывающих анизотропию моментов сил диссипации; V_{1r}, V_{2r} и V_{3r} – гауссовские широкополосные процессы типа белого шума с матрицей интенсивностей $v = \|v_{ij}(t)\|$ [7, 8].

Учитывая осевые и центробежные моменты инерции деформируемой Земли посредством эффективных суточных горбов и выступов, также примем во внимание моменты гравитационных сил со стороны Солнца. Тогда, с учетом (1.1)–(1.3) уравнения вращательного движения Земли (понимаемые в смысле Стратоновича) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_t + N_* q_t &= P_1 + P_2 - u_4((r_* + \delta r_t)^2 - r_*^2), \quad p_{t_0} = p_0 \\ \dot{q}_t - N_* p_t &= Q_1 + Q_2 + u_8((r_* + \delta r_t)^2 - r_*^2), \quad q_{t_0} = q_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{r}_t &= R_1 + R_2, \quad \delta r_{t_0} = r_0 - r_* \\ P_1 &= P_{10} + P_{11} \cos \omega_* t + P_{12} \cos 2\omega_* t \\ Q_1 &= Q_{10} + Q_{11} \cos \omega_* t + Q_{12} \cos 2\omega_* t \\ R_1 &= R_{10} + R_{11} \cos \omega_* t + R_{12} \cos 2\omega_* t \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} P_{10} &= -\frac{3}{2}u_4\omega_*^2\left(1 - \frac{3}{2}b_1^2\right) - \frac{3}{2}u_6\omega_*^2\left(1 - \frac{b_1}{2}\right) - \frac{3}{2}u_{11}\omega_*^2\left(1 - \frac{b_1^2}{2}\right) - u_4r_*^2 \\ Q_{10} &= \frac{3}{2}u_7\omega_*^2\left(1 - \frac{b_1}{2}\right) + \frac{3}{2}u_8\omega_*^2\left(1 - \frac{3}{2}b_1^2\right) - \frac{3}{2}u_{10}\omega_*^2\left(1 - \frac{b_1^2}{2}\right) + u_8r_*^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} R_{10} &= \frac{3}{2}u_3\omega_*^2(1 - b_1^2/2) + 3u_{15}\omega_*^2(1 - b_1^2/2) \\ P_{11} &= 3u_1b\omega_*^2 + \frac{3}{2}u_{13}b\omega_*^2 \\ Q_{11} &= -3u_2b\omega_*^2 - 3u_{14}b\omega_*^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{3}{2}u_5b\omega_*^2 + 3u_9b\omega_*^2 \\ P_{12} &= \frac{9}{4}u_4b_1^2\omega_*^2 + \frac{3}{4}u_6b_1^2\omega_*^2 + \frac{3}{4}u_{11}b_1^2\omega_*^2 \\ Q_{12} &= -\frac{3}{4}u_7b_1^2\omega_*^2 - \frac{9}{4}u_8b_1^2\omega_*^2 + \frac{3}{4}u_{10}b_1^2\omega_*^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$R_{12} = -\frac{3}{2}u_3b_1^2\omega_*^2 - \frac{3}{2}u_{15}b_1^2\omega_*^2$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P_2(p_r, q_r, \delta r_r, D, V) = V_{1t} - (D_1^* + D_1^0 + D_1^1 V_{1t})p_t - \\
 &- (D_{12}^* + D_{12}^0 + D_{12}^1 V_{2t})q_t - (D_{13}^* + D_{13}^0 + D_{13}^1 V_{3t})(r_* + \delta r_t) \\
 Q_2 &= Q_2(p_r, q_r, \delta r_r, D, V) = V_{2t} - (D_{21}^* + D_{21}^0 + D_{21}^1 V_{1t})p_t - \\
 &- (D_2^* + D_2^0 + D_2^1 V_{2t})q_t - (D_{23}^* + D_{23}^0 + D_{23}^1 V_{3t})(r_* + \delta r_t) \\
 R_2 &= R_2(p_r, q_r, \delta r_r, D, V) = V_{3t} - (D_{31}^* + D_{31}^0 + D_{31}^1 V_{1t})p_t - \\
 &- (D_{32}^* + D_{32}^0 + D_{32}^1 V_{2t})q_t - (D_3^* + D_3^0 + D_3^1 V_{3t})(r_* + \delta r_t)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $N_* = (C^* - B^*)A^{*-1}\omega_*$ – чандлеровская частота; ω_* – отвечает годовому периоду; $b_1 \approx b$, $0.4 \leq b \leq 4/3\pi^{-1}$, $D = (D_i^*, D_i^0, D_i^1, D_{ij}^1)$ ($i, j = 1, 2, 3; i \neq j$), $V = (V_{1t}, V_{2t}, V_{3t})^T$. Функции $P_{1,2}$, $Q_{1,2}$ и $R_{1,2}$ выписаны с точностью до квадратов и произведений относительно $u, p_r, q_r, \delta r_r$.

2. Приведение системы уравнений к форме Ито. Уравнения в системе (1.4) линейны относительно p_r, q_r и нелинейны относительно δr_r . Система (1.4), если статистически линеаризовать нелинейные функции $u_{4,8}((r_* + \delta r_t)^2 - r_*^2)$, положив $r_t^2 = (m_t^{\delta r})^2 + D_t^{\delta r} + 2r_*m_t^{\delta r} + 2(r_* + m_t^{\delta r})\delta r_r$, представляет собой трехмерную линейную стохастическую систему следующего вида:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y} &= a_0 + (a_1 + A^0)Y + (a_2 + A_1^0)r_* + \left(b_0 + \sum_{h=1}^3 b_h Y_h + b_3 r_* \right) V \\
 Y(t_0) &= Y_0
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$Y = \|Y_1, Y_2, Y_3\|^T, \quad Y_1 = p_t, \quad Y_2 = q_t$$

$$Y_3 = \delta r_t, \quad V = \|V_{1t}, V_{2t}, V_{3t}\|^T$$

$$a_0 = \begin{pmatrix} P_1 - u_4(-m_t^{\delta r})^2 + D_t^{\delta r} - r_*^2 \\ Q_1 + u_8(-m_t^{\delta r})^2 + D_t^{\delta r} - r_*^2 \\ R_1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -D_{13}^* \\ -D_{23}^* \\ -D_3^* \end{pmatrix}, \quad A_1^0 = \begin{pmatrix} -D_{13}^0 \\ -D_{23}^0 \\ -D_3^0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} -D_1^* & -(N_* + D_{12}^*) & -D_{13}^* - 2u_4(r_* + m_t^{\delta r}) \\ N_* - D_{21}^* & -D_2^* & -D_{23}^* + 2u_8(r_* + m_t^{\delta r}) \\ -D_{31}^* & -D_{32}^* & -D_3^* \end{pmatrix}$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} -D_1^0 & -D_{12}^0 & -D_{13}^0 \\ -D_{21}^0 & -D_2^0 & -D_{23}^0 \\ -D_{31}^0 & -D_{32}^0 & -D_3^0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} -D'_1 & 0 & 0 \\ -D'_{21} & 0 & 0 \\ -D'_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} 0 & -D'_{12} & 0 \\ 0 & -D'_2 & 0 \\ 0 & -D'_{32} & 0 \end{vmatrix}, \quad b_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -D'_{13} \\ 0 & 0 & -D'_{23} \\ 0 & 0 & -D'_3 \end{vmatrix}$$

Система (2.1) после приведения к форме стохастического дифференциального уравнения в смысле Ито, будет иметь вид:

$$\dot{Y} = a_0^v + (a_1^v + A^0)Y + (a_2 + A_1^0)r_* + \left(b_0 + \sum_{h=1}^3 b_h Y_h + b_3 r_* \right) V \quad (2.3)$$

$$Y(t_0) = Y_0$$

$$a_0^v = a_0 + \Delta a_0, \quad a_1^v = a_1 + \Delta a_1, \quad \Delta a_1 = \begin{vmatrix} \Delta D_1 & \Delta D_{12} & \Delta D_{13} \\ \Delta D_{21} & \Delta D_2 & \Delta D_{23} \\ \Delta D_{31} & \Delta D_{32} & \Delta D_3 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

$$\Delta a_0 = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} D'_1 v_{11} + D'_{12} v_{22} + D'_{13} v_{33} - (D'_{13} D'_1 v_{31} + D'_{23} D'_{12} v_{32} + D'_3 D'_{13} v_{33}) r_* \\ D'_{21} v_{11} + D'_2 v_{22} + D'_{23} v_{33} - (D'_{13} D'_{21} v_{31} + D'_{23} D'_2 v_{32} + D'_3 D'_{23} v_{33}) r_* \\ D'_{31} v_{11} + D'_{32} v_{22} + D'_3 v_{33} - (D'_{13} D'_{31} v_{31} + D'_{23} D'_{32} v_{32} + D'_3 D'_3 v_{33}) r_* \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta D_1 &= 1/2(D_1'^2 v_{11} + D'_{21} D'_{12} v_{12} + D'_{31} D'_{13} v_{13}) \\ \Delta D_{12} &= 1/2(D'_{12} D'_{12} v_{21} + D'_2 D'_{12} v_{22} + D'_{32} D'_{13} v_{23}) \\ \Delta D_{13} &= 1/2(D'_{13} D'_{13} v_{31} + D'_{23} D'_{12} v_{32} + D'_3 D'_{13} v_{33}) \\ \Delta D_{21} &= 1/2(D'_1 D'_{21} v_{11} + D'_{21} D'_2 v_{12} + D'_{31} D'_{23} v_{13}) \\ \Delta D_2 &= 1/2(D'_{12} D'_{21} v_{21} + D_2'^2 v_{22} + D'_{32} D'_{23} v_{23}) \\ \Delta D_{23} &= 1/2(D'_{13} D'_{21} v_{31} + D'_{23} D'_2 v_{32} + D'_3 D'_{23} v_{33}) \\ \Delta D_{31} &= 1/2(D'_1 D'_{31} v_{11} + D'_{21} D'_{32} v_{12} + D'_{31} D'_3 v_{13}) \\ \Delta D_{32} &= 1/2(D'_{12} D'_{31} v_{21} + D'_2 D'_{32} v_{22} + D'_3 D'_{32} v_{23}) \\ \Delta D_3 &= 1/2(D'_{13} D'_{31} v_{31} + D'_{23} D'_{32} v_{32} + D_3'^2 v_{33}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Анализ стохастических характеристик системы. Рассмотрим влияние переменных коэффициентов диссипации на процесс вращения Земли. Для этого воспользуемся теорией моментов.

Уравнения для математических ожиданий имеют следующий вид:

$$\dot{m}_1 = -D_1^e m_1 - N_{1*}^e m_2 - (D_{13}^e + 2u_4 r_*) m_3 - 2u_4 m_3^2 + P_t^e \quad (3.1)$$

$$\dot{m}_2 = N_{2*}^e m_1 - D_2^e m_2 - (D_{23}^e - 2u_8 r_*) m_3 + 2u_8 m_3^2 + Q_t^e \quad (3.2)$$

$$\dot{m}_3 = -D_{31}^e m_1 - D_{32}^e m_2 - D_3^e m_3 + R_t^e \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} D_1^e &= D_1^* - 1/2(D_1'^2 v_{11} + D_{21}' D_{12}' v_{12} + D_{31}' D_{13}' v_{13}) \\ D_{12}^e &= D_{12}^* - 1/2(D_{12}' D_{11}' v_{21} + D_2'^2 v_{22} + D_{32}' D_{13}' v_{23}) \\ D_{13}^e &= D_{13}^* - 1/2(D_{13}' D_{11}' v_{31} + D_{23}' D_{12}' v_{32} + D_3' D_{13}' v_{33}) \\ D_{21}^e &= D_{21}^* - 1/2(D_{11}' D_{21}' v_{11} + D_{21}' D_2' v_{12} + D_{31}' D_{23}' v_{13}) \\ D_2^e &= D_2^* - 1/2(D_{12}' D_{21}' v_{21} + D_2'^2 v_{22} + D_{32}' D_{23}' v_{23}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} D_{23}^e &= D_{23}^* - 1/2(D_{13}' D_{21}' v_{31} + D_{23}' D_2' v_{32} + D_3' D_{23}' v_{33}) \\ D_{31}^e &= D_{31}^* - 1/2(D_{11}' D_{31}' v_{11} + D_{21}' D_{32}' v_{12} + D_{31}' D_3' v_{13}) \\ D_{32}^e &= D_{32}^* - 1/2(D_{12}' D_{31}' v_{21} + D_2' D_{32}' v_{22} + D_3' D_{32}' v_{23}) \\ D_3^e &= D_3^* - 1/2(D_{13}' D_{31}' v_{31} + D_{23}' D_{32}' v_{32} + D_3'^2 v_{33}) \\ N_{1*}^e &= N_*^e + D_{12}^e, \quad N_{2*}^e = N_*^e - D_{21}^e \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} P_t^e &= P_1 - u_4(-m_3)^2 + D_t^{\delta r} - r_*^2 - 1/2(D_{11}' v_{11} + D_{12}' v_{22} + D_{13}' v_{33} - \\ &- (D_{13}' D_{11}' v_{31} + D_{23}' D_{12}' v_{32} + D_3' D_{13}' v_{33}) r_*) - D_{13}^* r_* \\ Q_t^e &= Q_1 + u_8(-m_3)^2 + D_t^{\delta r} - r_*^2 - 1/2(D_{21}' v_{11} + D_2' v_{22} + D_{23}' v_{33} - \\ &- (D_{13}' D_{21}' v_{31} + D_{23}' D_2' v_{32} + D_3' D_{23}' v_{33}) r_*) - D_{23}^* r_* \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R_t^e &= R_1 - 1/2(D_{31}' v_{11} + D_{32}' v_{22} + D_3' v_{33} - \\ &- (D_{13}' D_{31}' v_{31} + D_{23}' D_{32}' v_{32} + D_3' D_3' v_{33}) r_*) - D_3^* r_* \end{aligned}$$

Из (3.1)–(3.3) при условиях (3.4)–(3.6) следует, что имеет место эффект снижения средних значений коэффициентов диссипации $D_{1,2,3}^e$ и гироскопического момента (N_{1*}^e и N_{2*}^e).

Уравнения для дисперсий k_{11} , k_{22} , k_{33} и ковариаций k_{12} , k_{13} , k_{23} в развернутой записи имеют следующий вид (в качестве примера ограничимся двумя выражениями в силу их громоздкости):

$$\begin{aligned} \dot{k}_{11} &= -2D_1^e k_{11} - 2N_{1*}^e k_{12} - 2D_{13}^e k_{13} + c_{11}^e \\ c_{11}^e &= D_1'^2 v_{11} k_{11} + 2D_{11}' D_{12}' v_{12} k_{12} + (-4u_4(r_* + m_3) + 2D_{11}' D_{13}' v_{13}) k_{13} + \\ &+ D_{12}'^2 v_{22} k_{22} + 2D_{12}' D_{13}' v_{23} k_{23} + D_{13}'^2 v_{33} k_{33} + (-2m_1 D_1' + 1 + m_1^2 D_1'^2) v_{11} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2(-m_1 m_2 D_1' D_{12}' - m_2 D_{12}') v_{12} + 2(-D_{13}' r_* + m_1 D_1' D_{13}' r_* + m_1 m_3 D_1' D_{13}' - \\
 &\quad - m_3 D_{13}') v_{13} + m_2^2 D_{12}'^2 v_{22} + 2(m_2 m_3 D_{12}' D_{13}' + m_2 D_{12}' D_{13}' r_*) + (m_3^2 D_{13}'^2 + \\
 &\quad + D_{13}'^2 r_*^2 + m_3 D_{13}'^2 r_*) v_{33} \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

$$k_{23} = k_{32} = -D_{13}^e k_{12} - N_{2*}^e k_{13} - (D_2^e + D_3^e) k_{23} - D_{23}^e k_{33} + c_{23}^e$$

$$\begin{aligned}
 c_{23}^e &= D_{21}' D_{31}' v_{11} k_{11} + (D_{21}' D_{32}' + D_{31}' D_2') v_{12} k_{12} + (D_{31}' D_{23}' + D_{21}' D_3') v_{13} k_{13} + \\
 &+ D_2' D_{32}' v_{22} k_{22} + (D_{32}' D_{23}' + D_2' D_3') v_{23} k_{23} + \\
 &+ (D_3' D_{23}' v_{33} + 2u_8(r_* + m_3)) k_{33} + m_1^2 D_{21}' D_{31}' v_{11} + \\
 &+ (m_1 m_2 D_{21}' D_{32}' + m_1 m_2 D_{31}' D_2' - m_1 D_{31}') v_{12} + (m_1 m_3 D_{21}' D_3' + \\
 &+ m_1 m_3 D_{31}' D_{23}' - m_1 D_{21}' + r_* m_1 (D_{21}' D_3' + D_{31}' D_{23}')) v_{13} + \\
 &+ (m_2^2 D_2' D_{32}' - m_2 D_{32}') v_{22} + (1 + m_2 m_3 D_{32}' D_{23}' + m_2 m_3 D_2' D_3' - m_3 D_3' - m_2 D_2' + \\
 &+ r_* m_2 (D_2' D_3' + D_{32}' D_{23}')) v_{23} + (m_3^2 D_3' D_{23}' - D_{23}' r_* + D_3' D_{23}' r_*^2 + 2m_3 D_3' D_{23}' r_* - m_3 D_{23}') v_{33}
 \end{aligned}$$

4. Простейшая модель стохастической диссипации. Симметричный случай. Рассмотрим симметричный случай: при изотропности параметрических флуктуационно-диссипативных моментов сил

$$v_{11} = v_{22} = v_{33} = v, \quad D_1' = D_2' = D_3' = D > 0, \quad D_1^* = D_2^* = D_3^* = D^*$$

$$v_{ij} = 0, \quad D_{ij}' = 0, \quad D_{ij}^* = 0 \quad (i, j = 1, \dots, 3; i \neq j)$$

Уравнения (3.7) принимают вид:

$$\dot{k}_{11} = -2D_1^e k_{11} - 2N_{1*}^e k_{12} - 2D_{13}^e k_{13} + c_{11}^e$$

$$c_{11}^e = D^2 v k_{11} - 4u_4(r_* + m_3) k_{13} - 2m_1 D v + v + m_1^2 D^2 v$$

$$\dot{k}_{22} = 2N_{2*}^e k_{12} - 2D_2^e k_{22} - 2D_{23}^e k_{33} + c_{22}^e$$

$$c_{22}^e = D^2 v k_{22} + 4u_8(r_* + m_3) k_{23} - 2m_1 D v + v + m_1^2 D^2 v$$

$$\dot{k}_{33} = -2D_{31}^e k_{12} - 2D_{32}^e k_{23} - 2D_3^e k_{33} + c_{33}^e$$

$$c_{33}^e = D^2 v k_{33} + (m_3^2 D^2 - 2m_3(1 - D r_*) D + (1 - D r_*)^2) v \tag{4.1}$$

$$\dot{k}_{12} = \dot{k}_{21} = N_{2*}^e k_{11} - (D_1^e + D_2^e) k_{12} - D_{23}^e k_{13} - N_{1*}^e k_{22} - D_{13}^e k_{23} + c_{12}^e$$

$$c_{12}^e = 2u_8(r_* + m_3) k_{13} - 2u_4(r_* + m_3) k_{23}$$

$$\dot{k}_{13} = \dot{k}_{31} = -D_{31}^e k_{11} - D_{32}^e k_{12} - (D_1^e + D_3^e) k_{13} - N_{1*}^e k_{23} - D_{13}^e k_{23} + c_{13}^e$$

$$c_{13}^e = -2u_4(r_* + m_3)k_{33}$$

$$\dot{k}_{23} = \dot{k}_{32} = -D_{13}^e k_{12} - N_{2*}^e k_{13} - (D_2^e + D_3^e) k_{23} - D_{23}^e k_{33} + c_{23}^e$$

$$c_{23}^e = 2u_8(r_* + m_3)k_{33}$$

Отсюда вытекает, что в трехмерном случае в отличие от двумерного при изотропности параметрических флуктуационно-диссипативных моментов сил имеет место эффект изменения как средних дисперсий, так и средних ковариаций. При анизотропии, также как и в изотропном случае, наблюдается эффект увеличения средних дисперсий и средних ковариаций.

В рамках приближенной линейной теории флуктуаций [5] принято в уравнениях (2.1) пренебрегать нелинейными членами. При этом система (2.1) распадается на независимые систему стохастических уравнений для движения полюса Земли $Y = (p, q)^T$ и уравнение для δr .

Линейные корреляционные модели флуктуаций вращательного движения Земли получаются согласно (2.1) при $b_h = 0$, $b_0 = I_3$ на основе знания весовых функций и интенсивностей белых шумов. В частности, для математических ожиданий, ковариационных функций и спектральных плотностей справедливы следующие формулы:

$$m_t^{p,q} = w(t-t_0)m_0^{p,q} + \int_{t_0}^t w(t-\tau)\alpha_0(\tau)d\tau \quad (4.2)$$

$$K_{t_1 t_2}^{p,q} = w(t_1-t_0)K_0^{p,q}w(t_2-t_0)^* + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} w(t_1-\tau)v(\tau)w(t_2-\tau)^*d\tau \quad (4.3)$$

$$m_t^{\delta r} = w^{\delta r}(t-t_0)m_0^{\delta r} + \int_{t_0}^t w^{\delta r}(t-\tau)\alpha_0'(\tau)d\tau \quad (4.4)$$

$$K_{t_1 t_2}^{\delta r} = w^{\delta r}(t_1-t_0)w^{\delta r}(t_2-t_0)D_0^{\delta r} + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} w^{\delta r}(t_1-\tau)v_3(\tau)w^{\delta r}(t_2-\tau)d\tau \quad (4.5)$$

$$s(\omega) = \begin{vmatrix} s^{pp}(\omega) & s^{pq}(\omega) \\ s^{qp}(\omega) & s^{qq}(\omega) \end{vmatrix} = \Phi(i\omega)v\Phi(i\omega)^* \quad (4.6)$$

$$s^{\delta r}(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 v_3 \quad (4.7)$$

Здесь звездочкой отмечена операция комплексного сопряжения,

$$m_t^{p,q} = \begin{vmatrix} m_t^p \\ m_t^q \end{vmatrix}, \quad m_0^{p,q} = \begin{vmatrix} m_0^p \\ m_0^q \end{vmatrix}, \quad K_0^{p,q} = \begin{vmatrix} D_0^p & K_0^{pq} \\ K_0^{pq} & D_0^q \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

$$v = \begin{vmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{vmatrix}, \quad \alpha_0 = \begin{vmatrix} P_{10} + P_{11} \cos \omega_* t + P_{12} \cos 2\omega_* t \\ Q_{10} + Q_{11} \cos \omega_* t + Q_{12} \cos 2\omega_* t \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

$$\alpha'_0 = R_{10} + R_{11} \cos \omega_* t + R_{12} \cos 2\omega_* t$$

Через $\Phi(i\omega)$, $w(t-\tau)$ и $\Phi^{\delta r}(i\omega)$, $w^{\delta r}(t-\tau)$ обозначены передаточные функции и фундаментальные решения, отвечающие линейным уравнениям (2.1) при $b_h = 0$, $b_0 = I_3$.

Вследствие громоздкости выражений, примем, что матрицы интенсивностей и коэффициентов диссипации диагональны. Согласно [8], передаточные, весовые функции и фундаментальные решения определяются:

$$\Phi(i\omega) = -(\alpha - i\omega I_2)^{-1} = -\frac{1}{\Delta(\omega)} \begin{vmatrix} -(D_2 + i\omega) & -N_* \\ N_* & -(D_1 + i\omega) \end{vmatrix} \quad (4.10)$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} -D_1 & -N_* \\ N_* & -D_2 \end{vmatrix}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_1 = D_1^* + D_1^0, \quad D_2 = D_2^* + D_2^0$$

Так как произведения $D_i D_j \ll 1$ ($i, j = 1, 2$), тогда

$$\Delta(\omega) \approx N_*^2 - \omega^2 + (D_1 + D_2)i\omega$$

$$w(t-\tau) = \begin{vmatrix} w^{pp}(t-\tau) & w^{pq}(t-\tau) \\ w^{qp}(t-\tau) & w^{qq}(t-\tau) \end{vmatrix} \mathbf{1}(t-\tau) \quad (4.11)$$

$$w^{pp}(t-\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}(D_1 + D_2)(t-\tau)\right) \left[\frac{D_2 - D_1}{2N_*} \sin N_*(t-\tau) + \cos N_*(t-\tau) \right] \quad (4.12)$$

$$w^{qp}(t-\tau) = w^{pq}(t-\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}(D_1 + D_2)(t-\tau)\right) \sin N_*(t-\tau) \quad (4.13)$$

$$w^{qq}(t-\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2}(D_1 + D_2)(t-\tau)\right) \left[-\frac{D_2 - D_1}{2N_*} \sin N_*(t-\tau) + \cos N_*(t-\tau) \right] \quad (4.14)$$

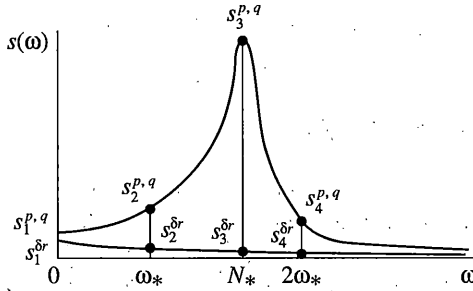
$$w^{\delta r}(t-\tau) = \exp(-D_3(t-\tau)) \mathbf{1}(t-\tau) \quad (4.15)$$

при этом элементы $w(t-\tau)$ выписаны с точностью до квадратов и произведений величин $D_{1,2} N_*^{-1}$, $\mathbf{1}(t-\tau)$ – единичная ступенчатая функция. Дисперсии, ковариацию и спектральные характеристики получаем, используя выражение для ковариационной функции

$$k^{p, q, \delta r}(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s^{p, q, \delta r}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (4.16)$$

и учитывая (4.6), (4.7):

$$D^p = \frac{2D_1 v_2 - (D_2 - D_1) v_1}{2D_1(D_1 + D_2)} \quad (4.17)$$



Фиг. 1

$$D^q = \frac{2D_2v_1 + (D_2 - D_1)v_2}{2D_1(D_1 + D_2)} \quad (4.18)$$

$$K^{pq} = \frac{D_2v_1 - D_1v_2}{N_*(D_1 + D_2)} \quad (4.19)$$

$$D^{\delta r} = v_3/(2D_3) \quad (4.20)$$

$$s^{pp}(\omega) = \frac{1}{\Delta_1^2}[(D_2^2 + \omega^2)v_1 + N_*^2v_2] \quad (4.21)$$

$$s^{qq}(\omega) = \frac{1}{\Delta_1^2}[(D_1^2 + \omega^2)v_2 - N_*^2v_1] \quad (4.22)$$

$$s^{pq}(\omega) = \frac{N_*}{\Delta_1^2}[(D_2 + i\omega)v_1 + (D_1 - i\omega)v_2] \quad (4.23)$$

$$s^{\delta r}(\omega) = v_3/\Delta_2^2, \quad \Delta_2^2 = D_3^2 + \omega^2 \quad (4.24)$$

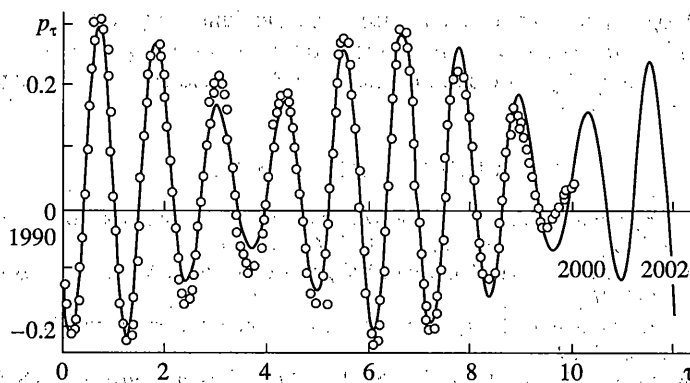
$$\Delta_1^2 \approx (N_*^2 - \omega_*^2)^2 + \omega^2(D_1 + D_2)^2$$

На фиг. 1 показаны стационарные спектральные плотности $s^{p,q,\delta r}(\omega)$, найденные согласно приближенной теории при интенсивностях белых шумов: $v_1 = v_2 = v_0$, $v_3 < v_0$ и удельных коэффициентах моментов сил диссипации $D_1 = D_2 = D_0$, $D_3 < D_0$. При этом приближенные значения спектральных плотностей имеют следующий вид:

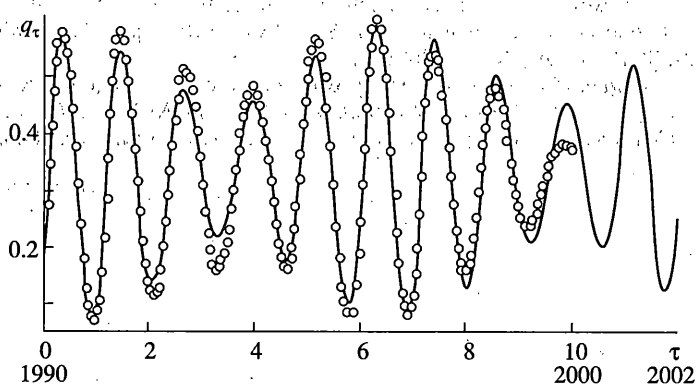
$$s_1^{p,q} \approx \frac{v_0}{N_*^2}, \quad s_2^{p,q} \approx \frac{v_0(\omega_*^2 + N_*^2)}{(N_*^2 - \omega_*^2)^2}, \quad s_3^{p,q} \approx \frac{v_0}{2D_0^2}, \quad s_4^{p,q} \approx \frac{v_0(4\omega_*^2 + N_*^2)}{(N_*^2 - 4\omega_*^2)^2} \quad (4.25)$$

$$s_1^{\delta r} \approx \frac{v_3}{D_3^2}, \quad s_2^{\delta r} \approx \frac{v_3}{\omega_*^2}, \quad s_3^{\delta r} \approx \frac{v_3}{N_*^2}, \quad s_4^{\delta r} \approx \frac{v_3}{4\omega_*^2}$$

5. Аналитическое моделирование. Разработанное в ИПИ РАН (2000–2003 гг.) программное обеспечение позволяет реализовать на ПЭВМ аналитическое, статистическое и комбинированное моделирование регулярного и флуктуационного вращения Земли.



Фиг. 2



Фиг. 3

Результаты аналитического статистического моделирования (согласно [7]) – интерполяция (1990–1995 гг.) и прогноз (1996–2000 гг.) показаны на фиг. 2 и 3. Здесь светлыми точками отмечены данные МСВЗ [4], а сплошной линией математические ожидания. Причем, средние тренды по переменным $p_\tau = p(t/T_h)$ и $q_\tau = q(t/T_h)$, где T_h – время, измеряемое в годах, имеют как постоянные, так и линейно зависящие от времени составляющие. При этом осредненные средние квадратические отклонения постоянны и почти не различаются между собой

$$\langle m_\tau^p \rangle = -0.0410 + 0.002\tau, \quad \sigma_\tau^p = 0''.023$$

$$\langle m_\tau^q \rangle = 0.3230 - 0.1042\tau, \quad \sigma_\tau^q = 0''.025$$

Как показали экспериментальные исследования методом статистических испытаний, аналитическое моделирование на основе линейных корреляционных моделей обеспечивает точность ~10%, а квадратической корреляционной модели 3–5%.

Динамические гауссовские линейные и нелинейные спектральнокорреляционные модели флуктуаций вращательного движения Земли применимы для анализа точности и идентификации базовых динамических параметров на основе обработки результатов

измерений [4]. Модели не только сохраняют качественные черты флуктуаций движения деформируемой Земли, но и обеспечивают достаточную точность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-02-16303).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г. Моделирование движения полюса деформируемой Земли // Докл. РАН. 2001. Т. 379. № 2. С. 191–195.
2. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г. Движение полюса Земли // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 2. С. 199–205.
3. Акуленко Л.Д., Кумакишев С.А., Марков Ю.Г. Возмущенные вращения Земли // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 19–29.
4. IERS Annual Reports. 1990 July 1991 bis 1999 July 2000. Central Bureau of IERS. Observatoire de Paris. 2000 July 2001 bis 2002 July 2003. Verlag BKG Frankfurt am Mein.
5. Марков Ю.Г., Сеницын И.Н. Влияние параметрических флуктуационно-диссипативных сил на движение полюса Земли // Докл. РАН. 2004. Т. 395. № 1. С. 51–54.
6. Perepelkin V., Belousov V. Nonlinear stochastic correlation model of the Earth Pole // JOURNÉES 2003 Astrometry, Geodynamics and Solar System Dynamics: From Milliarseconds to Microarseconds. St. Petersburg, Russia, 2003. P. 54.
7. Марков Ю.Г., Сеницын И.Н. Нелинейные стохастические корреляционные модели движения полюса деформируемой Земли // Астрон. ж. 2003. Т. 80. № 2. С. 186–192.
8. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000. 999 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.04.2005