

О КРУГОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ В СИСТЕМЕ С ТРЕХКРАТНЫМ РЕЗОНАНСОМ

Обсуждается возможность использования изотропного пространственно-го осциллятора в качестве двухстепенного гироскопа. Предлагаются алгоритмы, позволяющие получить информацию об ориентации объекта, на который установлен такой гироскоп, и способ стабилизации формы колебаний, неустойчивой без стабилизации. Проводится сопоставление свойств системы, совершающей круговые и прямолинейные [1] колебания. При этом обнаруживается ряд существенных отличий, проявляющихся, например, в задаче стабилизации формы и в различном влиянии одних и тех же возмущений на прямолинейные и круговые колебания.

1. Постановка задачи. Исследуемая система имеет вид

$$\ddot{q} + q = \varepsilon Q(q, \dot{q}, t) \quad (1.1)$$

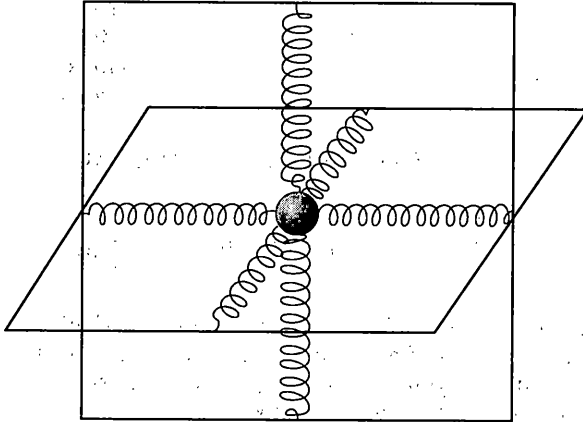
где q – трехмерный вектор, а правая часть – малое возмущение, на что указывает малый параметр ε . Решение порождающей системы, получающейся из исходной при $\varepsilon = 0$, имеет вид

$$q(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \sin t \quad (1.2)$$

Оно описывает одну из следующих траекторий (фигур) в конфигурационном пространстве системы: эллипс, круг или отрезок прямой. Далее будет рассматриваться случай круговых колебаний, что обусловлено идеей использования механической системы подобной той, что изображена на фигуре для определения поворотов движущегося объекта, на который установлена подобная система, в двух плоскостях, так как плоскость колебаний чувствительной массы стремится сохранить ориентацию в инерциальном пространстве. В реальной системе вместо пружин должны устанавливаться упругие элементы, позволяющие как снимать информацию с прибора, так и передавать управляющее воздействие. Такими упругими элементами могут быть, например, прямоугольные стержни специальной конструкции, рассмотренные в [2, 3], или электромагнитный подвес.

Круговая форма колебаний выбирается исходя из соображений максимальной простоты, что, однако, приводит к потере контроля над поворотом объекта в плоскости колебаний осциллятора [2].

Наряду с этим возможным приложением будут рассматриваться задачи об эволюции формы колебаний под действием возмущений, классификации самих возмущений по признаку вызываемых эволюций и задача стабилизации круговой формы. Эти задачи, с одной стороны, неразрывно связаны с вышеуказанным приложением, а с другой представляют самостоятельный интерес, обусловленный возможностью сопоставить результаты с аналогичными результатами, полученными для прямолинейных колебаний [1].



2. Многообразие, соответствующее круговым траекториям. Каждой форме траектории порождающей системы можно поставить в соответствие определенное многообразие в пространстве произвольных постоянных x . Чтобы построить такое многообразие для круговых траекторий можно воспользоваться тем, что для этих траекторий и только для них справедливо равенство $\|q(t)\| = \text{const}$, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \|q(t)\|^2 &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \cos^2 t + 2(x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6) \sin t \cos t + \\ &+ (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) \sin^2 t = \text{const} = a^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где a – амплитуда колебаний. Это равенство равносильно следующему

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6) \sin t \cos t + (x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) \sin^2 t = a^2 \quad (2.2)$$

из которого, учитывая соотношения $\|q(0)\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \|q(t)\|^2 = a^2$, в конечном итоге имеем

$$S_1(x) = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0, \quad S_2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 = 0 \quad (2.3)$$

Два последних уравнения задают четырехмерное многообразие N в пространстве x , соответствующее круговым колебаниям.

3. Учет возмущений. Возмущения приводят к одному из четырех типов эволюций фигуры: изменение частоты колебаний, изменение их амплитуды, прецессия фигуры, которая может трактоваться как уход гироскопа, и разрушение ее формы [1]. Под воздействием возмущений величины x_i становятся медленно меняющимися функциями времени. Для того, чтобы найти их изменение со временем используется замена фазовых переменных $(q, \dot{q}) \rightarrow x$ в соответствии с формулами

$$q = \begin{pmatrix} E \cos t \\ E \sin t \end{pmatrix} x, \quad \dot{q} = \begin{pmatrix} -E \sin t \\ E \cos t \end{pmatrix} x \quad (3.1)$$

В результате такой замены система переписывается в стандартной форме, к которой применяется метод осреднения. В результате этих преобразований получается система

$$\dot{x} = \varepsilon X(x), \quad X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -E \sin t \\ E \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} dt \quad (3.2)$$

4. Локальный базис. Каждой из четырех эволюций фигур можно поставить в соответствие совокупность направлений, таких что возмущение $X(x)$, имеющее проекцию на одно из таких направлений, вызывает соответствующую эволюцию. Совокупность таких направлений и образует локальный базис в каждой точке пространства x , который состоит из следующих пучков:

a) направления разрушения круговой формы: Эти направления образованы множеством нормалей к многообразию N :

$$e_1 = \left\| \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \right\|^T, \quad e_2 = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_6 \end{matrix} \right\|^T \quad (4.1)$$

b) направления прецессии строятся при помощи ортогональной матрицы A , выраженной, например, через углы Крылова α, β, γ :

$$\|A \cos t, A \sin t\|x = \|E \cos t, E \sin t\|y \Rightarrow y = y(x, \alpha, \beta, \gamma) \Rightarrow$$

$$e_4 = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \left\| \begin{matrix} -x_2 & x_1 & 0 & -x_5 & x_4 & 0 \end{matrix} \right\|^T, \quad e_5 = \frac{\partial y}{\partial \beta} = \left\| \begin{matrix} x_3 & 0 & -x_1 & x_6 & 0 & -x_4 \end{matrix} \right\|^T \quad (4.2)$$

$$e_6 = \frac{\partial y}{\partial \gamma} = \left\| \begin{matrix} 0 & -x_3 & x_2 & 0 & -x_6 & x_5 \end{matrix} \right\|^T$$

(производные вычисляются при $\alpha = \beta = \gamma = 0$)

c) направление изменения частоты одномерно и строится как

$$\|E \cos(t + \tau), E \sin(t + \tau)\|x = \|E \cos t, E \sin t\|y \Rightarrow y = y(x, \tau) \Rightarrow$$

$$e_6 = \frac{\partial y}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \left\| \begin{matrix} x_4 & x_5 & x_6 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \end{matrix} \right\|^T \quad (4.3)$$

d) направление изменения амплитуды также одномерно:

$$(1 + \mu)\|E \cos t, E \sin t\|x = \|E \cos t, E \sin t\|y \Rightarrow y = y(x, \mu) \Rightarrow$$

$$e_7 = \left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \right\|^T \quad (4.4)$$

Видно, что направления b) – d) не зависят от формы колебаний. Матрица Грама построенной совокупности направлений имеет вид

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \|x\|^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2 & 2S_1 \\ 0 & \|x\|^2 & 0 & 0 & 0 & 2S_1 & S_2 \\ \hline & & G_0 & 2K_2 & 0 & & \\ & & & 2K_1 & 0 & & \\ & & & 2K_3 & 0 & & \\ \hline & & & \|x\|^2 & 0 & & \\ \hline & & & & \|x\|^2 & & \end{array} \right\|, \quad \Gamma = \Gamma^T \quad (4.5)$$

матрица разбита на блоки, соответствующие перемножению векторов базиса из различных пучков, G_0 – (3×3) -блок, порождаемый направлениями прецессии

$$\begin{aligned} \text{Det } G_0 = K(x)\|x\|^2, \quad K(x) = K_1^2 + K_2^2 + K_3^2, \quad K_1 = x_3x_4 - x_1x_6 \\ K_2 = x_1x_5 - x_2x_4, \quad K_3 = x_2x_6 - x_3x_5 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Как показано в [1], условие $K(x) = 0$ равносильно тому, что в системе возбуждены прямолинейные колебания. Поэтому в случае круговых колебаний этот блок невырожден. Кроме того, направления разрушения ортогональны остальным направлениям при $x \in N$. Отметим и тот факт, что вектор с компонентами $\|K_3(x) K_1(x) K_2(x)\|^T$ представляет собой вектор нормали к плоскости колебаний в пространстве q . Значит, по его изменению можно судить о поворотах этой плоскости относительно инерциального пространства. Фактически этот вектор играет роль оси двухстепенного гироскопа. О конкретной процедуре его измерения будет написано позже. Пока же перечислим свойства базиса.

В отличие от прямолинейных колебаний, пучки разрушения и прецессии не вырождаются на N и, более того, пучок разрушения является почти всюду не вырожденным (кроме точки $x = 0$). Это непосредственно видно из структуры соответствующего блока матрицы Γ .

На многообразии N ортогональны подпространства

$$\{e_1, e_2\} \perp \{\{e_3, e_4, e_5\}, \{e_6\}, \{e_7\}\}, \quad \{e_3, e_4, e_5\} \perp \{e_7\}, \quad \{e_6\} \perp \{e_7\} \quad (4.7)$$

причем последние два соотношения справедливы во всем пространстве x .

Алгебра операторов, порождаемая направлениями e_i , семимерна и некоммутативна, хотя операторы групп, соответствующих различным эволюциям, коммутируют. Исключение из этого правила – операторы групп разрушения и изменения частоты.

N – инвариантное многообразие групп прецессии, изменения частоты и амплитуды.

Эволюционный базис неголономен, поскольку включает в себя векторные поля, не имеющие потенциала.

5. Классификация возмущений. Проводится по признаку вызываемых эволюций для сил линейных по скоростям и координатам. Эти силы представляются в виде

$$Q = (S + H + N)q + (D + R + \Gamma)\dot{q} \quad (5.1)$$

где S – симметрическая матрица потенциальных позиционных сил сферического типа, H – аналогичная матрица гиперболического типа, N – кососимметрическая матрица циркулярных сил, D – симметрическая матрица диссипативных сил сферического типа, R – аналогичная матрица гиперболического типа, Γ – кососимметрическая матрица гироскопических сил. Все эти матрицы постоянны и будут рассматриваться в своей канонической форме

$$\begin{aligned} S = \text{diag}\|s \dots s\|, \quad H = \text{diag}\|h_1 \dots h_3\|, \quad \text{tr } H = 0 \\ D = \text{diag}\|d \dots d\|, \quad R = \text{diag}\|r_1 \dots r_3\|, \quad \text{tr } R = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

а для кососимметрических матриц N и Γ :

$$N = \text{diag} \left\| \begin{array}{c} v \\ 0 \end{array} \right\|, \quad v = \left\| \begin{array}{c} 0 \ -n \\ n \ 0 \end{array} \right\|$$

где n – произвольное действительное число, а для матрицы Γ вместо n будет стоять γ . В записи для N нуль на диагонали может занимать и другое место (для Γ – аналогично). Силы с такими матрицами подставляются в формулы (3.2) для осреднения, в результате получаются выражения $X_S(x), X_H(x), \dots \in R^6$ для правых частей осредненной системы. Проектируя эти векторы при $x \in N$ (в смысле R^6) на направления локального базиса, можно получить табл. 1 влияния сил на эволюции круговых колебаний.

Таблица 1

	<i>S</i>	<i>H</i>	<i>N</i>	<i>D</i>	<i>R</i>	Γ
e_1, e_2		+			+	
e_3, e_4, e_5	+	+			+	+
e_6	+	+				+
e_7			+	+	+	

Наличие проекции отмечено плюсом. Из табл. 1 видно, что, например, диссипативные силы сферического типа приводят только к изменению амплитуды, а аналогичные силы гиперболического типа еще и к прецессии.

Уместно сравнить табл. 1 с аналогичной таблицей для случая прямолинейных колебаний, приведенной в [1]. Для прямолинейных колебаний имеется три направления e_1, e_2, e_3 разрушения формы, которые, однако, становятся линейно зависимыми на многообразии (в пространстве x), соответствующем прямолинейным колебаниям (число линейно независимых направлений в этом случае тоже равно двум), а соответствующая табл. 2 имеет вид

Таблица 2

	<i>S</i>	<i>H</i>	<i>N</i>	<i>D</i>	<i>R</i>	Γ
e_1, e_2, e_3		+	+			
e_4, e_5, e_6					+	+
e_7	+	+				
e_8				+	+	

Сопоставляя данные таблицы, можно заметить, что влияние сил для различных типов колебаний будет отличаться, причем в случае круговых колебаний та же сила вызывает большее или равное число эволюций. Например, гироскопические силы вызывают только лишь прецессию прямолинейных колебаний, тогда как для круговых колебаний добавляется изменение частоты.

6. Задача стабилизации формы. Эта задача сводится к поиску обратной связи, которая обеспечила бы экспоненциальную устойчивость многообразия N и не приводила бы к прецессии и изменению частоты колебаний.

Рассмотрим обратную связь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -S_1 e_1 - S_2 e_2 - S e_8 \\ S_1 &= x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 \\ S_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 \\ S &= 1/2(\|x\|^2 - 1) \end{aligned} \tag{6.1}$$

которая имеет своей целью не только стабилизировать форму колебаний, но и (единичную) амплитуду. Как видно из структуры матрицы Грама эта обратная связь не дает проекций на направления прецессии и изменения частоты, если $x \in N$; откуда следует, что она не вызывает соответствующих эволюций.

Вычислим производные функций S и S_i в силу уравнений обратной связи:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -S_1(1 + 2S) - 2SS_1 \\ \dot{S}_2 &= -S_2(1 + 2S) - SS_2 \\ \dot{S} &= -S(1 + 2S) - 2S_1^2 - S_2^2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Линеаризация этой системы имеет решение $S_i = S_i(0)e^{-t}$, $S = S(0)e^{-t}$, что доказывает экспоненциальную степень устойчивости многообразия $N \cap S^5$.

7. Алгоритм получения информации от гироскопа. Как уже отмечалось, роль оси кинетического момента “обычного” гироскопа в рассматриваемом случае имеет нормаль к плоскости, в которой лежит круговая траектория. Чтобы определить ориентацию этой плоскости достаточно найти векторы $x^1 = \|x_1 \ x_2 \ x_3\|^T$ и $x^2 = \|x_4 \ x_5 \ x_6\|^T$, тогда вектор $n = x^1 \times x^2$ будет вектором нормали к плоскости. В нулевом приближении, которое оправдывается возможной областью применения такого гироскопа, как датчика невысокой точности, можно считать, что за время порядка периода колебаний осциллятора векторы x^i не меняются под действием возмущений. Это предположение обусловлено тем, что частота колебаний предполагаемого прибора имеет величину порядка 10^3 – 10^4 Гц, так что за время одного колебания “уход” подобного гироскопа незначителен.

Для вычисления x^i удобнее всего воспользоваться отсчетным генератором [2], при помощи которого можно вычислить $q(0) = x^1$ и $q(\pi/2) = x^2$. Последние формулы очевидным образом следуют из решения порождающей системы (1.2). Кроме того, приведенный алгоритм допускает уточнение путем введения поправки к частоте отсчетного генератора, пропорциональной скалярному произведению $x^1 \cdot x^2$, которое в случае идеальной работы системы тождественно равно нулю, что видно из первого уравнения, задающего многообразие N .

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ в рамках программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (№ 6827).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев В.Ф. Об управлении формой колебаний в резонансных системах // 1992. ПММ. Т. 56. Вып. 5. С. 827–836.
2. Журавлев В.Ф. Бесплатформенная инерциальная система минимальной размерности. (Пространственный осциллятор – датчик полной инерциальной информации) // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 5. С. 5–10.
3. Legèr P. Quarason – a new low – cost vibrating gyroscope // 3rd Intern. Conf. on Integrated Navigation Systems. 1996. V. 1. Saint-Petersburg. P. 143–149.
4. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 637 с.
5. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.03.2005