

УДК 539.3

© 2006 г. **К.Ф. ЧЕРНЫХ**

## АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ МЕТОД (РАСЧЛЕНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ) В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В плоской задаче линейной теории упругости широко используется традиционный метод интегралов типа Коши. В студенческие годы (1951) автор статьи обнаружил, что все решаемые при традиционном подходе задачи могут быть решены более простым и не требующим специальной математической подготовки способом, названным методом расчленения граничных условий. В дальнейшем он был распространен на условия сопряжения и двумерные задачи нелинейной теории упругости (плоская задача, антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения). Предложенный метод был использован в предложенной автором предельно простой (без потери общности) версии нелинейной теории упругости. Здесь после развития комплексного метода, введения новых типов граничных условий, условий сопряжения и законов упругости удалось получить точные решения двумерных краевых задач.

Далее были введены сопряженные статические и дисторсионные разрешающие функции, определяемые из компактной системы разрешающих функций. По найденным разрешающим функциям определяются “вторичные” величины: координаты материальных точек деформированной области, повороты и напряжения. Выявлены статически определимые задачи для произвольных (не обязательно упругих) материалов, а также дисторсионно определимые задачи.

В статье, содержащей в основном новые результаты, особенно предложенного метода расчленения, демонстрируются на нелинейной плоской задаче.

**1. Комплексный подход.** В нелинейной плоской задаче теории упругости широко используются комплексные координаты, дифференцированные по ним, и комплексные компоненты векторов и тензоров:

$$\zeta = x_1^{\circ} + ix_2^{\circ}, \quad \bar{\zeta} = x_1^{\circ} - ix_2^{\circ}, \quad x_3^{\circ}; \quad z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad x_3$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

$$(u_1 + iu_2), (u_1 - iu_2), u_3$$

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}), \quad T_5 = t_{33}$$

Здесь  $x_i^{\circ}$ ,  $x_i$  – координаты материальной точки до и после деформации,  $u_i$  – компоненты вектора, а  $t_{ij}$  – компоненты тензора. Ниже символом градус отмечены величины, отнесенные к недеформированной конфигурации тела.

Плоская деформация определяется зависимостями

$$z = z(\zeta, \bar{\zeta}), \quad x_3 = \lambda x_3^0$$

Здесь  $\lambda = \text{const}$  – кратность удлинений в направлении третьей координатной оси.

**2. Разрешающие функции. Основные комплексные зависимости.** Введем статические разрешающие функции (комплексные компоненты тензора номинальных напряжений)

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1, \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2, \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} \quad (2.1)$$

и сопряженные им разрешающие дисторсионные функции (комплексные компоненты тензора дисторсий):

$$\partial z / \partial \zeta, \partial z / \partial \bar{\zeta}, \partial x_3 / \partial x_3^0 = \lambda \quad (2.2)$$

Введенные величины определяются из следующей компактной системы разрешающих уравнений:

*нелинейный закон упругости*

$$\frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{2} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \zeta)}, \quad \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{2} = \frac{\partial \Phi}{\partial (\partial z / \partial \bar{\zeta})}, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$$

Здесь  $\Phi = \Phi[\partial z / \partial \zeta, \partial z / \partial \bar{\zeta}, \partial z / \partial \bar{\zeta}, \partial z / \partial \zeta, \lambda]$  – плотность энергии деформации.  
*уравнение равновесия*

$$\frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\partial \bar{\zeta}} + \frac{\partial \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\partial \zeta} = 0$$

(однородное) силовое (статическое) граничное условие (фиг. 1):

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 e^{i\gamma^0} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 e^{-i\gamma^0} = 0$$

(однородное) дисторсионное граничное условие – условие жесткого края

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right) e^{i\gamma^0} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} e^{-i\gamma^0} = 0$$

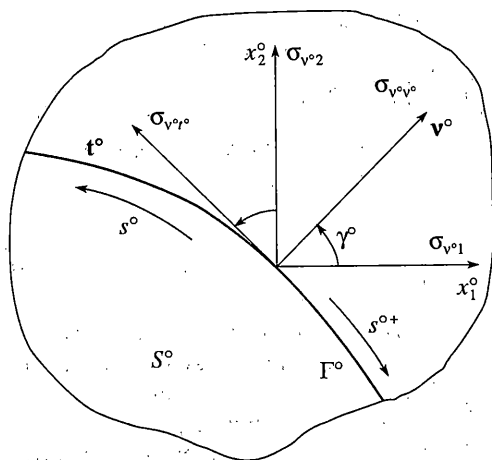
Дисторсионное граничное условие (условие жесткого края) имеет существенные преимущества перед традиционным геометрическим (заделка), будучи сформулированным в терминах дисторсионных разрешающих функций, входящих в систему разрешающих уравнений. Они и более удобны для практического использования (в частности, при рассмотрении в физике твердого тела границы с проскальзыванием). При использовании функций Гурса – Колосова дисторсионное граничное условие однотипно со статическим. Отметим, что используемые в линейной плоской задаче геометрические условия в “больших” функциях Гурса – Колосова  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Psi(\zeta)$  являются дисторсионными.

Далее на линии сопряжения  $\Gamma^0$  областей  $S^{0-}$ ,  $S^{0+}$  (фиг. 2) имеют место силовое

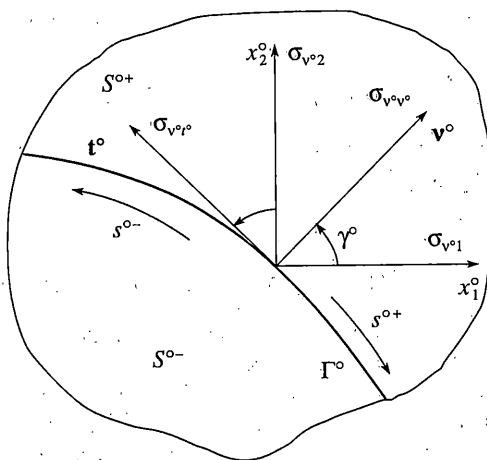
$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^+ e^{i\gamma^0} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^+ e^{-i\gamma^0} = \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^- e^{i\gamma^0} + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^- e^{-i\gamma^0}$$

и дисторсионное условие сопряжения

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right)^+ e^{i\gamma^0} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^+ e^{-i\gamma^0} = \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right)^- e^{i\gamma^0} - \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^- e^{-i\gamma^0}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Коль скоро эта компактная, прозрачная система разрешена, по найденным разрешающим функциям находятся все, у нас “вторичные”, величины:  
*конфигурация области после деформации*

$$z(\zeta, \bar{\zeta}) = \iint \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right) \quad (2.3)$$

*поворот окрестности материальной точки  $\omega$ :*

$$e^{i\omega} = \frac{\partial z / \partial \bar{\zeta}}{|\partial z / \partial \zeta|} \quad (2.4)$$

*условные напряжения*

$$\Sigma_1^0 = \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 = \operatorname{Re} \left\{ \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^{-1} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \{ F^{-1} \cdot J \Sigma \}_1 \right\}$$

$$\Sigma_2^0 = \sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0 + i2\sigma_{12}^0 = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^{-1} \{ F^{-1} \cdot J \Sigma \}_2 \quad (2.5)$$

$$\sigma_{33}^0 = \{ F^{-1} \cdot J \Sigma \}_{33}$$

Как было выяснено в работах автора истинные напряжения (напряжения Коши) имеют целый ряд недостатков и непригодны для рассмотрения наиболее интересных в приложениях сингулярных проблем. От этих недостатков свободно используемые условные напряжения (симметричные напряжения Био) [6, 7].

**3. Уравнение упругости.** Получению точных решений двумерных задач способствовало, в основном, введение новых законов упругости. Так для плоской задачи были введены два закона, первый из них – редуцированный стандартный материал – представляет собой стандартный (полулинейный) материал, в выражении энергии деформации которого сохранены лишь квадратичные (по комплексным компонентам тензора дисторсий) слагаемые. При этом

$$\Phi = \sigma^* \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right) \overline{\left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1 \right)} + \alpha \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} + \gamma(\lambda - 1) \quad (3.1)$$

Здесь  $\sigma^*$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  – упругие постоянные. При принятии закона Гука

$$\sigma^* = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha = \frac{E}{(1+\nu)}, \quad \gamma = \frac{E(1-\nu)}{4(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Для рассматриваемого материала разрешающие функции выражаются через функции Гурса – Колосова

$$\begin{aligned} \partial z / \partial \zeta - 1 &= \Phi(\zeta), \quad \partial z / \partial \bar{\zeta} = \overline{\Psi(\zeta)} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &= 2\sigma^* \Phi(\zeta), \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 = 2\alpha \overline{\Psi(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В разрешающей системе уравнений нелинейными являются лишь соотношения закона упругости. В рассматриваемом случае оно линейно: разрешающие функции связаны линейными зависимостями. Тем самым для редуцированного стандартного материала разрешающая система линейна при геометрической нелинейности общей задачи.

Большинство конструкционных материалов (включая и резиноподобные) малосжимаемы. С учетом этого и была предложена учитывающая общую (физическую и геометрическую) нелинейности модель малосжимаемого материала, для которого

$$\Phi = \frac{E}{1+\nu} \left[ \alpha(J-1) + \varphi \left( \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|, \lambda \right) \right] \quad (3.3)$$

Здесь  $\alpha$  – постоянная,  $J = \lambda(|\partial z / \partial \zeta|^2 - |\partial z / \partial \bar{\zeta}|^2)$  – кратность изменения объема. В силу предположенной малосжимаемости материала относительное изменение объема ( $J-1$ ) учтено простейшим (линейным) образом. Второе слагаемое (функция своих аргументов) учитывает, в основном, деформацию сдвига.

Этот (почти общий) закон упругости, учитывающий геометрическую и физическую нелинейности, позволяет получать точные решения краевых задач и дает возможность рассматривать также анизотропные материалы (композиты, кристаллы, текстуры).

Здесь разрешающие функции связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 &= \frac{E}{1+\nu} \left[ 2\alpha\lambda + \frac{\Omega(|\partial z / \partial \zeta|, \lambda)}{|\partial z / \partial \lambda|} \right] \frac{\partial z}{\partial \zeta} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2 &= -\frac{E}{1+\nu} 2\alpha\lambda \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}, \quad \Omega \left( \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|, \lambda \right) = \frac{\partial \varphi(|\partial z / \partial \zeta|, \lambda)}{\partial |\partial z / \partial \zeta|} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_{33} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \alpha \left( \left| \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right|^2 - \left| \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right|^2 \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right]$$

**4. Плоскость с отверстием. Плоскость с жестким включением.** Суть предложенного метода расчленения граничного условия состоит в следующем. Пусть удалось представить (расчленить) граничное условие в виде

$$F_1(\sigma, \bar{\sigma}) + \overline{F_2(\sigma, \bar{\sigma})} = f_1(\sigma, \bar{\sigma}) + \overline{f_2(\sigma, \bar{\sigma})}$$

где входящие в него величины являются граничными значениями искомых ( $F_1(\chi, \bar{\chi})$ ,  $F_2(\chi, \bar{\chi})$ ) и заданных ( $f_1(\chi, \bar{\chi})$ ,  $f_2(\chi, \bar{\chi})$ ) функций. Тогда можно принять

$$F_1(\chi, \bar{\chi}) = f_1(\chi, \bar{\chi}), \quad F_2(\chi, \bar{\chi}) = f_2(\chi, \bar{\chi}).$$

Метод расчленения граничных условий был получен автором (1951) и использован В.В. Новожиловым [1] применительно к задачам линейной плоской задачи, как альтернативный методу интегралов типа Коши. Более элементарный и не требующий специальной подготовки, он в дальнейшем был распространен на нелинейные двумерные задачи (антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения) [2–7]. Ниже будет показано, что он применим и к задачам, где функции Гурса – Колосова не могут быть введены, а также к условиям сопряжения.

Покажем эффективность метода на примере задачи для плоскости с отверстием, конформно отображаемой на внутренность единичного круга комплексной плоскости  $\chi$  следующей формулой

$$\zeta = \kappa(\chi) = R[\chi^{-1} + \kappa_0(\chi)], \quad \kappa_0(\chi) = c_1\chi + c_2\chi^2 + \dots + c_n\chi^n \quad (4.1)$$

На отвечающей контуру отверстия единичной окружности  $\chi = \sigma = e^{i\theta^\circ}$  имеют место следующие соотношения

$$\sigma = \overline{\sigma^{-1}}, \quad \bar{\sigma} = \sigma^{-1}$$

$$\frac{\sigma\kappa'(\sigma)}{R} = -\frac{1}{\sigma} + \sigma\kappa'_0(\sigma) = -\bar{\sigma} + \sigma\kappa'_0(\sigma) \quad (4.2)$$

$$e^{i\gamma^\circ} = \frac{\sigma\kappa'(\sigma)}{|\kappa'(\sigma)|} = \frac{R[-\bar{\sigma} + \sigma\kappa'_0(\sigma)]}{|\kappa'(\sigma)|}, \quad e^{-i\gamma^\circ} = \frac{R[-\sigma + \overline{\sigma\kappa'_0(\sigma)}]}{|\kappa'(\sigma)|}$$

Введем также функции вида

$$X^\vee(\chi, \bar{\chi}) = X(\kappa(\chi), \overline{\kappa(\chi)}) = X(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (4.3)$$

С учетом соотношений (4.1)–(4.3) однородное статическое граничное условие записывается следующим образом:

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^\vee \sigma\kappa'(\sigma) + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^\vee \overline{\sigma\kappa'(\sigma)} = 0 \quad (4.4)$$

Примем

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^\vee(\chi, \bar{\chi}) = a_0 + (\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^\vee(\chi, \bar{\chi}))_0$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^\vee(\chi, \bar{\chi}) = \bar{b}_0 + (\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^\vee(\chi, \bar{\chi}))_0 \quad (4.5)$$

Подставляя эти представления в силовое граничное условие (4.4), получаем с учетом соотношений (4.2) расчлененное граничное условие

$$(\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^\vee(\sigma, \bar{\sigma}))_0 \sigma\kappa'(\sigma) + (\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^\vee(\sigma, \bar{\sigma}))_0 \overline{\sigma\kappa'(\sigma)} =$$

$$= R[-a_0\sigma\kappa'_0(\sigma) + \bar{b}_0\sigma] + R[-b_0\sigma\kappa'_0(\sigma) + \bar{a}_0\sigma]$$

Приравнявая первое слагаемое первой строки первому слагаемому второй, а второе – второму, получаем, переходя с границы в область (т.е. заменяя  $\sigma$  на  $\chi$ ) и используя (4.5):

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^\vee(\chi) = \frac{a_0 - \bar{b}_0\chi^2}{1 - \chi^2\kappa'_0(\chi)}, \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^\vee(\chi) = \frac{b_0 - \bar{a}_0\chi^2}{1 - \chi^2\kappa'_0(\chi)} \quad (4.6)$$

Полученные выражения никак не зависят от свойств материала (определяющих соотношений, не обязательно закона упругости). Их уместно называть статически определи-

мыми разрешающими функциями. Дисторсионные разрешающие функции здесь определяются из определяющих соотношений. Так в рассматриваемом случае малосжимаемого материала для первой из них  $\partial z/\partial \zeta = |\partial z/\partial \zeta| e^{i\omega}$  модуль определяется из первого соотношения в (3.4):

$$\left| 2\alpha\lambda + \frac{\Omega(|\partial z/\partial \zeta|, \lambda)}{|\partial z/\partial \zeta|} \right| |\partial z/\partial \zeta| = \left| \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{E/(1+\nu)} \right| \quad (4.7)$$

а затем – из того же выражения аргумент

$$e^{-i\omega} = \text{sign}[2\alpha\lambda|\partial z/\partial \zeta| + \Omega(|\partial z/\partial \zeta|, \lambda)] \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1} \quad (4.8)$$

$$\text{sign } X = \begin{cases} 1 & X > 0 \\ -1 & \text{при } X < 0 \end{cases}$$

Вторую дислокационную разрешающую функцию определяет второе из соотношений (3.4). Что касается условных напряжений, то для их определения и вовсе не требуется знания дисторсионных разрешающих функций, поскольку из соотношений (2.4), (2.5), (4.7) и (4.8) следует

$$\Sigma_1^{\circ} \equiv \sigma_{11}^{\circ} + \sigma_{22}^{\circ} = \text{sign}[2\alpha\lambda|\partial z/\partial \zeta| + \Omega] \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 \quad (4.9)$$

$$\Sigma_2^{\circ} \equiv \sigma_{11}^{\circ} - \sigma_{22}^{\circ} + i2\sigma_{12}^{\circ} = \text{sign}[2\alpha\lambda|\partial z/\partial \zeta| + \Omega] \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1 \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2}{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1}$$

Аналогично рассматривается и задача для плоскости с жестким включением произвольной формы. Так граничное условие жесткого края (IV) записывается в виде

$$\left( \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{\vee} (\sigma, \bar{\sigma}) - 1 \right) \sigma \kappa'(\sigma) - \overline{\left( \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{\vee} (\sigma, \bar{\sigma}) \sigma \kappa'(\sigma)} = 0 \quad (4.10)$$

Пусть

$$\left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{\vee} (\chi, \bar{\chi}) - 1 = a_0 + \left( \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{\vee} (\chi, \bar{\chi}) - 1 \right)_0 \quad (4.11)$$

$$\left( \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{\vee} (\chi, \bar{\chi}) = \bar{b}_0 + \left( \left( \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{\vee} (\chi, \bar{\chi}) \right)_0$$

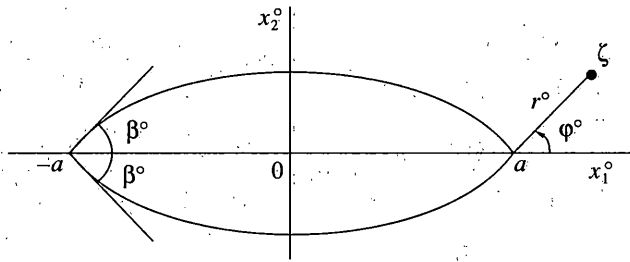
Подстановка этих представлений в граничное условие (4.10) приводит с учетом (4.1)–(4.2) к его расчлененному виду

$$\left( \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{\vee} (\chi, \bar{\chi}) - 1 \right)_0 \sigma \kappa'(\sigma) - \overline{\left( \left( \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{\vee} (\chi, \bar{\chi}) \sigma \kappa'(\sigma) \right)_0} =$$

$$= R[-a_0 \sigma \kappa'_0(\sigma) - \bar{b}_0 \sigma] - \overline{R[-b_0 \sigma \kappa'_0(\sigma) - \bar{a}_0 \sigma]}$$

Как и выше, отсюда и из равенств (4.11) получаем уже дисторсионно определяемые разрешающие функции

$$\left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^{\vee} (\chi) - 1 = \frac{a_0 - \bar{b}_0 \chi^2}{1 - \chi^2 \kappa'_0(\chi)}, \quad \left( \frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}} \right)^{\vee} (\bar{\chi}) = \frac{b_0 - \bar{a}_0 \chi^2}{1 - \chi^2 \kappa'_0(\chi)} \quad (4.12)$$



Фиг. 3

также не зависящие от свойств материала. Статические разрешающие функции и условные напряжения находятся из определяющих соотношений (не обязательно закона упругости). Входящие же в выражения (4.6) и (4.12) постоянные определяются напряжениями на бесконечности:

$$a_0 = \frac{\Sigma_1^{\circ\infty}}{2\sigma^*} = \frac{\sigma_1^{\circ\infty} + \sigma_{22}^{\circ\infty}}{2\sigma^*}, \quad \bar{b}_0 = \frac{\Sigma_2^{\circ\infty}}{2\alpha} = \frac{\sigma_{11}^{\circ\infty} - \sigma_{22}^{\circ\infty} + i2\sigma_{12}^{\circ\infty}}{2\alpha} \quad (4.13)$$

**5. Сопоставление методов.** Для сопоставления двух альтернативных методов рассмотрим плоскость, ослабленную отверстием в виде симметричной лунки с углом раствора  $2\beta$  (фиг. 3). Функция, отображающая внешность лунки на внешность единичной окружности, и ей обратная имеют вид [4]:

$$\zeta = \kappa(\chi) = a \frac{(\chi + 1)^{1/k} + (\chi - 1)^{1/k}}{(\chi + 1)^{1/k} - (\chi - 1)^{1/k}} \quad (5.1)$$

$$\chi = \kappa^{-1}(\zeta) = \frac{(\zeta + a) + (\zeta - a)}{(\zeta + a) - (\zeta - a)}, \quad k = \frac{\pi}{2(\pi - \beta)}$$

Будем считать, что берега лунки свободны от внешних воздействий, а окрестность бесконечно удаленной точки не поворачивается. Тогда в [4] на единичной окружности ( $\chi = e^{i\theta} = \sigma$ ) статическое граничное условие запишется для редуцированного стандартного материала в следующем виде:

$$\sigma^* \sigma \kappa'(\sigma) \Phi_0'(\sigma) + \overline{\alpha \sigma \kappa'(\sigma) \Psi_0'(\sigma)} = -\sigma^* a_0 \sigma \kappa'(\sigma) - \overline{\alpha b_0 \sigma \kappa'(\sigma)} \quad (5.2)$$

Согласно (5.1) имеем

$$\chi \kappa'(\chi) = \frac{4a}{k} \frac{\chi(\chi^2 - 1)^{1/k-1}}{[(\chi + 1)^{1/k-1} - (\chi - 1)^{1/k-1}]^2}, \quad \lim_{\chi \rightarrow \infty} \chi \kappa'(\chi) = \frac{4ak^2}{k} \chi \quad (5.3)$$

Решим эту задачу двумя способами: традиционным методом интегралов типа Коши и методом расчленения граничного условия.

В первом случае, умножая условие (5.2) и комплексно сопряженное ему на величину  $\frac{1}{2\pi i \sigma - \chi}$  и интегрируя полученное по единичной окружности, получаем

$$\sigma^* \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{\circ}} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1} \Phi_0^{\vee}(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma + \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{\circ}} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1} \Psi_0^{\vee}(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
 &= -a_0 \sigma^* \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma - \bar{b}_0 \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\overline{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma \\
 &\sigma^* \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\overline{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}} \Phi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma + \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1} \Psi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma = \quad (5.4) \\
 &= -a_0 \sigma^* \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\overline{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma - \bar{b}_0 \alpha \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma
 \end{aligned}$$

Имеем [4]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1} \Phi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma = \frac{\chi(\chi^2 - 1)^{1/k-1} \Phi_0^\vee(\chi)}{[(\chi + 1)^{1/k} - (\chi - 1)^{1/k}]^2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\overline{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}} \Phi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1} \Psi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma = \frac{\chi(\chi^2 - 1)^{1/k-1} \Psi_0^\vee(\chi)}{[(\chi + 1)^{1/k} - (\chi - 1)^{1/k}]^2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\overline{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}} \Psi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma = -\frac{\chi(\chi^2 - 1)^{1/k-1}}{[(\chi + 1)^{1/k} - (\chi - 1)^{1/k}]^2} - \frac{k^2}{4} \chi$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{\overline{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2 \sigma - \chi} d\sigma = -\frac{k^2}{4} \chi^{-1}$$

При выходе этих соотношений учитывалось, что согласно (5.3)  $G_\infty(\chi) = k^2\lambda/4$ . Вторым из интегралов (5.4) преобразовывался к виду ( $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$ ):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \left[ \frac{\overline{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2} - \frac{k^2}{4} \sigma \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \chi} + \frac{k^2}{4} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^0} \frac{d\theta}{\sigma(\sigma - \chi)}$$

Здесь первый интеграл равен нулю. Второй же интеграл является интегралом Коши и равен  $-\chi^{-1}$ . Подстановка полученных выражений в (5.4) приводит к следующим формулам для функций Гурса – Колосова:

$$\begin{aligned}
 \sigma^*[\Phi_0^\vee + a_0] &= \frac{k^2 [(\chi + 1)^{1/k} - (\chi - 1)^{1/k}]^2}{(\chi^2 - 1)^{1/k-1}} \left( \sigma^* a_0 - \frac{\alpha \bar{b}_0}{\chi^2} \right) \\
 \alpha[\Psi_0^\vee + \bar{b}_0] &= \frac{k^2 [(\chi + 1)^{1/k} - (\chi - 1)^{1/k}]^2}{(\chi^2 - 1)^{1/k-1}} \left( \alpha a_0 - \frac{\alpha^* \bar{a}_0}{\chi^2} \right)
 \end{aligned} \quad (5.5)$$



Перейдем ко второму способу – методу расчленения граничных условий. Для него, рассматривая равенства  $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$ ,  $\bar{\sigma} = \sigma^{-1}$  и (5.3), проведем расчленение условия (5.2), приведя его к виду

$$\begin{aligned} & \sigma^* \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1} \Phi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2} + \alpha \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1} \Psi_0^\vee(\sigma)}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2} = \\ & = \left[ -\sigma^* a_0 \left( \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2} - \frac{k^2}{4} \sigma \right) - \alpha \bar{b}_0 \frac{k^2}{4} \sigma^{-1} \right] + \\ & + \left[ -\alpha \bar{b}_0 \left( \frac{\sigma(\sigma^2 - 1)^{1/k-1}}{[(\sigma + 1)^{1/k} - (\sigma - 1)^{1/k}]^2} - \frac{k^2}{4} \sigma \right) - \sigma^* a_0 \frac{k^2}{4} \sigma^{-1} \right] \end{aligned}$$

Приравнявая первое слагаемое первой строки второй строке, а второе слагаемое – третьей строке и уходя с границы вовнутрь области (т.е. заменяя  $\sigma$  на  $\chi$ ), приходим к тем же выражениям (5.5). Отсюда видно, что метод расчленения граничных условий элементарен и технически более прост.

**б. Расчленение условий сопряжения.** Пусть занимающие физическую плоскость  $\zeta$  области  $S^{o-}$  (включение) и  $S^{o+}$  (матрица) сопряжены по общей границе  $\Gamma^o$  (фиг. 2), на которой заданы условия сопряжения. Помимо соотношений (4.1), (4.2) будем использовать следующие из них:

$$\frac{\sigma \kappa'(\sigma)}{R} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \bar{\kappa}'_0(\sigma^{-1}), \quad \frac{\bar{\sigma} \kappa'(\bar{\sigma})}{R} = -\frac{1}{\bar{\sigma}} + \frac{1}{\bar{\sigma}} \bar{\kappa}'_0(\bar{\sigma}^{-1}) \quad (6.1)$$

$$\bar{X}(\chi) = \bar{X}(\bar{\chi}), \quad \bar{X}(\sigma) = \bar{X}(\bar{\sigma}) = \bar{X}(\sigma^{-1}) \quad (6.2)$$

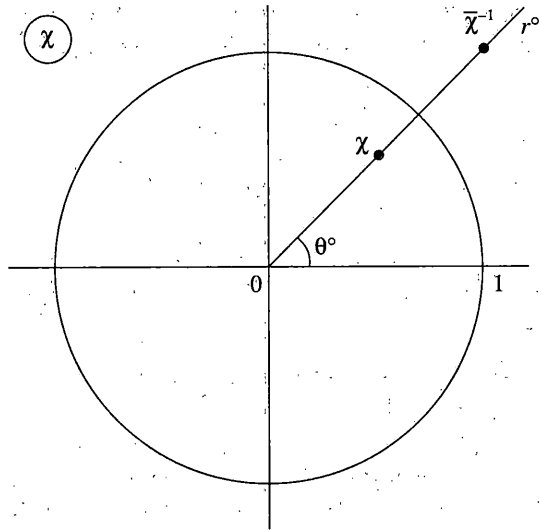
$$\bar{\kappa}'_0(\sigma^{-1}) = \bar{c}_1 + \dots + n \bar{c}_n \sigma^{1-n} \quad (6.3)$$

В соответствии с соотношениями (4.1), (4.2), (6.1)–(6.3) силовое условие можно представить в следующем расчленном виде

$$\begin{aligned} & \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee+}(\sigma, \bar{\sigma}) \sigma \kappa'(\sigma) + \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee+}(\sigma, \bar{\sigma}) \bar{\sigma} \kappa'(\bar{\sigma}) = \\ & = R \left[ -\frac{1}{\sigma} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-} \left( \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) + \frac{1}{\sigma} \kappa'_0 \left( \frac{1}{\sigma} \right) \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-} \left( \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) \right] + \\ & + R \left[ -\frac{1}{\bar{\sigma}} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-} \left( \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) + \frac{1}{\bar{\sigma}} \kappa'_0 \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-} \left( \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) \right] \end{aligned}$$

Приравнявая в выписанных равенствах первое слагаемое первой строки второй строке, а второе слагаемое – третьей строке, получаем

$$\begin{aligned} & \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee+}(\sigma, \bar{\sigma}) = R \left[ -\frac{1}{\sigma} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-} \left( \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) + \frac{1}{\sigma} \kappa'_0 \left( \frac{1}{\sigma} \right) \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-} \left( \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{1 - \sigma^2 \kappa'_0(\sigma)} \left[ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}}, \frac{1}{\sigma} \right) - \bar{\kappa}'_0 \left( \frac{1}{\sigma} \right) \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}}, \frac{1}{\sigma} \right) \right] \end{aligned}$$



Фиг. 4

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee+}(\sigma, \bar{\sigma}) &= R \left[ -\frac{1}{\sigma} \overline{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}}\right)} + \frac{1}{\sigma} \kappa'_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) \overline{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}}\right)} \right] = \\ &= \frac{1}{1 - \sigma^2 \kappa'_0(\sigma)} \left[ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}}\right) - \bar{\kappa}'_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-}\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\bar{\sigma}}\right) \right] \end{aligned}$$

Уходя здесь с границы  $\Gamma^\circ$  в области  $S^{0+}$ ,  $S^{0-}$  (т.е. заменяя в  $S^{0+}$  значение  $\sigma$  на  $\chi$ , а в  $S^{0-}$  отвечающую  $\chi$  сопряженную относительно единичной окружности инверсионно сопряженную точку  $\bar{\chi}^{-1}$  (фиг. 4)), получаем (используя соотношения (6.2)) первые два из выводимых аналогично выражений:

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{array}{l} \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee+}(\chi, \bar{\chi})}{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee+}(\chi, \bar{\chi})} \\ \frac{(\partial z / \partial \zeta - 1)^{\vee+}(\chi, \bar{\chi})}{(\partial z / \partial \bar{\zeta})^{\vee+}(\chi, \bar{\chi})} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{1}{1 - \chi^2 \kappa'_0(\chi)} \left( \left\| \begin{array}{l} \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})}{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})} \\ \frac{(\partial z / \partial \zeta - 1)^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})}{(\partial z / \partial \bar{\zeta})^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})} \end{array} \right\| - \bar{\kappa}'_0(\chi^{-1}) \left\| \begin{array}{l} \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})}{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})} \\ \frac{(\partial z / \partial \bar{\zeta})^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})}{(\partial z / \partial \zeta - 1)^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1})} \end{array} \right\| \right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Полученные соотношения связывают значения разрешающих функций в соответствующих – инверсионно-сопряженных – точках ( $\chi$  и  $\bar{\chi}^{-1}$ ) матрицы и включения. На соотношение же (6.4) следует смотреть, как на статико-дисторсионное продолжение разрешающих функций  $\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^-, \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^-, (\partial z/\partial \zeta - 1)^-, (\partial z/\partial \bar{\zeta})^-$  через линию сопряжения  $\Gamma^\circ$ .

Отметим, что проделанное продолжение никак не связано с аналитичностью разрешающих функций. Полученные разрешающие функции в случае бесконечной области (матрицы) определяются из условий на бесконечности, либо из формулируемого для них условия на внешней границе матрицы в случае конечной области.

Вывявим ограничения, накладываемые требованием конечности напряжений на вид граничного контура, напряжений, деформации и поворотов. Прежде всего, согласно соотношениям (4.1)–(4.3), имеем

$$\begin{aligned} \zeta &= R\chi^{-1}(1 + c_1\chi^2 + \dots + c_n\chi^{n+1}) \\ \kappa'_0(\chi) &= c_1 + \dots + nc_n\chi^{n-1}, \quad \bar{\kappa}'_0(\chi^{-1}) = \bar{c}_1 + \dots + n\bar{c}_n\chi^{1-n} \\ \chi^2 \kappa'(\chi)/R &= -1 + c_1\chi^2 + \dots + nc_n\chi^{n+1} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Пусть выражения для разрешающих функций, заданные в конечной области и так продолженные в бесконечную, при  $\zeta \rightarrow \infty$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^-(\zeta, \bar{\zeta}) &= O(|\zeta|^{p_1}), \quad \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^-(\zeta, \bar{\zeta}) = O(|\zeta|^{p_2}) \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right)^-(\zeta, \bar{\zeta}) &= O(|\zeta|^{p_3}), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^- = O(|\zeta|^{p_4}) \quad (p_i > 0) \end{aligned} \quad (6.6)$$

В соотношениях (6.4) наибольшей сингулярностью обладают величины в последнем столбце. Причем согласно выражениям (6.5):

$$\frac{\bar{\kappa}'_0(\chi^{-1})}{\chi^2 \kappa'_0(\chi) - 1} = O(|\chi|^{1-n})_{\chi \rightarrow 0} = O(|\zeta|^{1-n})_{\zeta \rightarrow \infty} \quad (6.7)$$

С учетом сказанного получаем из соотношений (6.6) и (6.7) общую оценку поведения на бесконечности определяющих величин матрицы (первый столбец в (6.4)):  $O(|\zeta|^{1-n+p})$  ( $p = \max(p_1, p_2, p_3, p_4)$ ).

Из требования конечности напряжений, деформаций и поворота в матрице (области  $S^{\circ+}$ ) следует, что здесь показатели степени должны быть неположительны. Отсюда и следует искомое неравенство:

$$p \leq n - 1 \quad (p = \max\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) \quad (6.8)$$

В случае строго неравенства при заданной форме включения (постоянной  $n$ ) оно ограничивает скорость возрастания напряжений (постоянная  $p$ ). Более интересен случай знака равенства при  $p$  целом числе

$$p = n - 1 \quad (6.9)$$

позволяющий рассматривать деформирование плоскости на бесконечности напряжениями  $\sigma_{ij}^\infty = \text{const}$ . Из полученного равенства следуют прямая и обратная обобщенные теоремы Эшелби:

*во включении эллиптической формы ( $n = 1$ ) реализуется однородное напряженно-деформированное состояние ( $p = 0$ ) и, обратно, однородное напряженно-деформированное состояние включений определяет его эллиптическую форму.*

Из равенства (6.9) также, чем больше показатель роста деформации (постоянная  $p$ ), тем “извилистей” контур включения (больше постоянная  $n$ ), и обратно. Увеличение “извилистости” контура влечет увеличение степени изменяемости деформации.

Отметим также, что проделанные преобразования проведены без потери общности (для произвольных материалов в матрице и включении и произвольной форме включения).

**7. Деформируемое включение в плоскости.** Рассмотренные условные сопряжения позволяют решать важные в приложениях проблемы деформируемых (нежестких) включений. Ниже будут рассмотрены точные решения двух задач [8–10]. Так, при однородном напряженно-деформированном состоянии во включении имеем

$$\begin{aligned} (\partial z / \partial \zeta)^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) &= (\partial z / \partial \zeta)^{-} = \text{const} \\ (\partial z / \partial \bar{\zeta})^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) &= (\partial z / \partial \bar{\zeta})^{-} = \text{const} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) &= \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{-} = \text{const} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}, \chi^{-1}) &= \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{-} = \text{const} \end{aligned} \tag{7.1}$$

При этом согласно обобщенной теореме Эшелби включение должно быть эллиптическим, для которого ( $a, b$  – полуоси эллипса):

$$\begin{aligned} \kappa'_0(\chi) = \bar{\kappa}'_0(\chi^{-1}) &= m, \quad R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} \\ \chi = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2Rm}, \quad \chi^{-1} &= \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2R} \end{aligned} \tag{7.2}$$

и соотношение (6.4) записывается в физической плоскости следующим образом:

$$\left\| \begin{array}{l} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^+(\zeta) \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^+(\zeta) \\ (\partial z / \partial \zeta)^+(\zeta) - 1 \\ (\partial z / \partial \bar{\zeta})^+(\zeta) \end{array} \right\| = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2\sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}} \left\| \begin{array}{l} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^- - m\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^- \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^- - m\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^- \\ (\partial z / \partial \zeta - 1)^- - m(\partial z / \partial \bar{\zeta})^- \\ (\partial z / \partial \bar{\zeta})^- - m(\partial z / \partial \zeta - 1)^- \end{array} \right\| \tag{7.3}$$

Напряженно-деформированное состояние определяется [6, 8] для включения по величинам (7.1) и для матрицы – по (7.3). Отметим, что полученное решение никак не зависит от вида материала (не обязательно упругого).

Другой крайний случай эллиптического включения с действующей на него сосредоточенной силой можно рассмотреть, положив [6–8]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} - 1\right)^- &= \frac{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2\varphi_1(\zeta, \bar{\zeta}, \lambda)}{2\pi \zeta}, & \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^- &= \frac{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2\varphi_2(\zeta, \bar{\zeta}, \lambda)}{2\pi \bar{\zeta}} \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^- &= \frac{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2\varphi_3(\zeta, \bar{\zeta}, \lambda)}{2\pi \zeta}, & \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^- &= \frac{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2\varphi_4(\zeta, \bar{\zeta}, \lambda)}{2\pi \bar{\zeta}} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь  $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$  – компоненты сосредоточенной силы в точке  $\zeta = 0$ . Подстановка этих выражений в соотношение (6.4) дает с учетом зависимостей (7.2):

$$\begin{aligned} &\left\| \begin{array}{l} \frac{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^+(\zeta, \bar{\zeta})}{\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^+(\zeta, \bar{\zeta})} \\ \frac{(\partial z/\partial \zeta)^+(\zeta, \bar{\zeta}) - 1}{(\partial z/\partial \bar{\zeta})^+(\zeta, \bar{\zeta})} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2\sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}} \left\| \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2 \left[ \frac{\varphi_3(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta^\wedge} + c_3 - m \left( \frac{\varphi_4(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta^\wedge} + c_4 \right) \right]}{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2 \left[ \frac{\varphi_4(\zeta^\vee, \bar{\zeta}^\vee, \lambda)}{\bar{\zeta}^\vee} + c_4 - m \left( \frac{\varphi_3(\zeta^\vee, \bar{\zeta}^\vee, \lambda)}{\zeta^\vee} + c_3 \right) \right]} \\ \frac{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2 \left[ \frac{\varphi_1(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta^\wedge} + c_1 - m \left( \frac{\varphi_2(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\bar{\zeta}^\wedge} + c_2 \right) \right]}{\mathfrak{F}_1 + i\mathfrak{F}_2 \left[ \frac{\varphi_4(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\bar{\zeta}^\wedge} + c_2 - m \left( \frac{\varphi_3(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta^\wedge} + c_1 \right) \right]} \end{array} \right\| \quad (7.5) \end{aligned}$$

$$\left( \zeta^\wedge \equiv \zeta \Big|_{\chi \rightarrow \bar{\chi}^{-1}} = R[\bar{\chi} + m\bar{\chi}^{-1}] = \frac{(1+m^2)\bar{\zeta} - (1-m^2)\sqrt{\bar{\zeta}^2 - 4R^2m}}{2m} \right)$$

где для редуцированного стандартного материала

$$\varphi_1 = \varphi_3/2\sigma_-^* = \frac{\alpha_-}{\sigma_-^* + \alpha_-}, \quad \varphi_2 = \varphi_4/2\alpha_- = \frac{\sigma_-^*}{\sigma_-^* + \alpha_-} \quad (7.6)$$

а для малосжимаемого материала

$$\varphi_1 = \frac{1+\nu\omega^*(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{E 2\pi\alpha\lambda}, \quad \varphi_2 = \frac{(1+\nu)\omega^*(\bar{\zeta}^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{E 2\pi\alpha\lambda}, \quad c_1 = B^*(\lambda), \quad c_2 = C^*(\lambda) \quad (7.7)$$

Произвольные функции  $\omega^*(\cdot)$ ,  $\Omega^*(\cdot)$ ,  $B^*(\cdot)$ ,  $C^*(\lambda)$  дают возможность рассмотреть широкий класс малосжимаемых материалов.

Аналогично рассматривается [6, 8] и случай с эллиптическим включением, содержащим краевую дислокацию. Для него справедливы соотношения

$$\left\| \begin{array}{l} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^+(\zeta, \bar{\zeta}) \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^+(\zeta, \bar{\zeta}) \\ (\partial z / \partial \zeta)^+(\zeta, \bar{\zeta}) - 1 \\ (\partial z / \partial \bar{\zeta})^+(\zeta, \bar{\zeta}) \end{array} \right\| = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2\sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}} \left\| \begin{array}{l} ibe^{i\theta^*} \left[ \frac{\Phi_3(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta^\wedge} - m \frac{\Phi_4(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\bar{\zeta}^\wedge} \right] \\ ibe^{i\theta^*} \left[ \frac{\Phi_4(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\bar{\zeta}^\wedge} - m \frac{\Phi_3(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta^\wedge} \right] \\ ibe^{i\theta^*} \left[ \frac{\Phi_1(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta} - m \frac{\Phi_4(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\bar{\zeta}} \right] \\ ibe^{i\theta^*} \left[ \frac{\Phi_2(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\bar{\zeta}^\wedge} - m \frac{\Phi_1(\zeta^\wedge, \bar{\zeta}^\wedge, \lambda)}{\zeta^\wedge} \right] \end{array} \right\| \quad (7.8)$$

$$\left( \zeta^\wedge \equiv \zeta \Big|_{x \rightarrow \bar{x}^{-1}} = R[\bar{\chi} + m\bar{\chi}^{-1}] = \frac{(1+m^2)\bar{\zeta} - (1-m^2)\sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{2m} \right)$$

где для редуцированного стандартного материала

$$\Phi_1 = \Phi_3 / 2\sigma_-^* = \frac{\alpha_-}{\sigma_-^* + \alpha_-}, \quad \Phi_2 = \Phi_4 / 2\alpha_- = \frac{\sigma_-^*}{\sigma_-^* + \alpha_-} \quad (7.9)$$

а для малосжимаемого материала

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -\omega^*(\sqrt{\zeta^\wedge \bar{\zeta}^\wedge}, \lambda), & \Phi_2 &= 1 - \omega^*(\sqrt{\zeta^\wedge \bar{\zeta}^\wedge}, \lambda) \\ \Phi_3 &= -2\alpha\lambda \frac{E}{1+\nu} \Omega^{**} \left( \frac{b}{2\pi\sqrt{\zeta^\wedge \bar{\zeta}^\wedge}} \omega^*(\sqrt{\zeta^\wedge \bar{\zeta}^\wedge}, \lambda), \lambda \right) \\ \Phi_4 &= -2\alpha\lambda \frac{E}{1+\nu} (1 - \omega^*(\sqrt{\zeta^\wedge \bar{\zeta}^\wedge}, \lambda)) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

В полученных соотношениях  $b$  – величина вектора Бюргера, а  $\theta_*$  – угол, определяющий его направление. Изложенное в этом разделе полезно также при рассмотрении зародыша новой фазы в материнском кристалле, а также двойникования [9].

**8. Включение в конечную матрицу.** Интересно, используя предложенный подход, рассмотреть включение в конечную область. Рассмотрим для простоты и наглядности в комплексной плоскости  $\zeta$  эллиптическую область  $S^{o+}$  с соосным эллиптическим включением  $S^{o-}$ . Рассмотрим внешнюю границу области  $\Gamma_+^o$ , на которой  $\sigma^+ = r_+ e^{i\theta^o}$  ( $r_+ > 1$ ) – аффикс точки границы. Имеем далее

$$\gamma^o = \theta^o - \pi, \quad e^{i\gamma^o} = -e^{i\theta^o} = -\sigma^+ r_+^{-1}, \quad e^{-i\gamma^o} = -\bar{\sigma}^+ r_+^{-1}$$

$$\bar{\sigma}^+ = r_+^2/\sigma^+, \quad \sigma^+ = r_+^2/\bar{\sigma}^+ \quad (8.1)$$

$$(\sigma^+)^{-1} - m\sigma^+ = 1/r_+^2(\bar{\sigma}^+)^{-1} - mr_+^2(\bar{\sigma}^+)^{-1}, \quad (\bar{\sigma}^+)^{-1} - m\bar{\sigma}^+ = 1/r_+^2(\sigma^+)^{-1} - mr_+^2(\sigma^+)^{-1}$$

Полагая, что на  $\Gamma_+^{\circ}$  приложено равномерное давление  $\sigma_0$ , имеем согласно соотношениям (3.1.10), (3.1.13) в [6] и (8.1) граничное условие

$$\left[ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee+} + 2\sigma_0\lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^{\vee+} \right] \sigma^+ + \left[ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee+} - 2\sigma_0\lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^{\vee+} \right] \bar{\sigma}^+ = 0 \quad (8.2)$$

Считая материал включения редуцированным стандартным, имеем согласно соотношениям (3.2):

$$\begin{aligned} \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}) &= 2\sigma_-^* \Phi^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}), & (\partial z/\partial \zeta)^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}) &= \Phi^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}) \\ \{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}) &= 2\alpha_- \Psi^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}), & (\partial z/\partial \bar{\zeta})^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}) &= \Psi^{\vee-}(\bar{\chi}^{-1}) \end{aligned} \quad (8.3)$$

При этом зависимости (6.4) принимают вид

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_1^{\vee+}(\sigma^+, \bar{\sigma}^+) = \frac{2(\sigma^+)^{-1}}{(\sigma^+)^{-1} - m/(\sigma^+)^{-1}} \left[ \sigma_-^* \Phi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) - m\alpha_- \Psi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) \right]$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^{\vee+}(\sigma^+, \bar{\sigma}^+) = \frac{(\sigma^+)^{-1}}{(\sigma^+)^{-1} - m/(\sigma^+)^{-1}} \left[ \Phi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) - m\Psi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) \right]$$

$$\{F^{-1} \cdot J\Sigma\}_2^{\vee+}(\sigma^+, \bar{\sigma}^+) = \frac{2(\bar{\sigma}^+)^{-1}}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}} \left[ \alpha_- \Psi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) - m\sigma_-^* \Phi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) \right]$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \bar{\zeta}}\right)^{\vee+}(\sigma^+, \bar{\sigma}^+) = \frac{(\bar{\sigma}^+)^{-1}}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}} \left[ \Psi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) - m\Phi^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^+}\right) \right]$$

Подстановка этих величин в условие (8.2) дает

$$\Phi^{\vee-} = a_0 + \Phi_0^{\vee-}, \quad \Psi^{\vee-} = b_0 + \Psi_0^{\vee-} \quad (8.4)$$

$$[1] \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) \Phi_0^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) + [2] \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) \Psi_0^{\vee-}\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) = [3] \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) + [4] \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) \quad (8.5)$$

$$[1] \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) = \frac{\sigma_-^* + \lambda\sigma_0}{1/r_+^2(\bar{\sigma}^+)^{-1} - mr_+^2(\bar{\sigma}^+)^{-1}} - m \frac{\sigma_-^* - \lambda\sigma_0}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}} \quad (8.6)$$

$$[2] \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) = \frac{\alpha_- - \lambda\sigma_0}{1/r_+^2(\bar{\sigma}^+)^{-1} - mr_+^2(\bar{\sigma}^+)^{-1}} - m \frac{\alpha_- + \lambda\sigma_0}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}}$$

$$[3] \left(\frac{1}{\bar{\sigma}^*}\right) = -\bar{b}_0 \frac{\alpha_- - \lambda\sigma_0}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}} + ma_0 \frac{\sigma_-^* - \lambda\sigma_0}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}}$$

$$[4] \left( \frac{1}{\bar{\sigma}^*} \right) = -\bar{a}_0 \frac{\sigma_-^* + \lambda \sigma_0}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}} + mb_0 \frac{\alpha_- + \lambda \sigma_0}{(\bar{\sigma}^+)^{-1} - m/(\bar{\sigma}^+)^{-1}}$$

Приравнивая в соотношении (8.5) первое слагаемое левой части первому слагаемому правой, а второе – второму, получаем с учетом представлений (8.4):

$$\Phi^{\vee} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}^*} \right) = a_0 + \frac{[3](1/\sigma^+)}{[1](1/\sigma^+)}, \quad \Psi^{\vee} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}^*} \right) = b_0 + \frac{[4](1/\sigma^+)}{[2](1/\sigma^+)}$$

Заменяя  $1/\bar{\sigma}^+$  на  $\chi$ , т.е. переходя с внешнего контура матрицы в область включения, получаем

$$\Phi^{\vee}(\chi) - a_0 = \frac{[3](\chi)}{[1](\chi)} = \frac{-\bar{b}_0(\alpha_- - \lambda \sigma_0) + ma_0(\sigma_-^* - \lambda \sigma_0)}{(\sigma_-^* + \lambda \sigma_0)\Omega(\chi; m) - m(\sigma_-^* - \lambda \sigma_0)} \quad (8.7)$$

$$\Psi^{\vee}(\chi) = b_0 + \frac{[4](\chi)}{[2](\chi)} = \frac{-\bar{a}_0(\sigma_-^* + \lambda \sigma_0) + mb_0(\alpha_- + \lambda \sigma_0)}{(\alpha_- - \lambda \sigma_0)\Omega(\chi; m) - m(\alpha_- + \lambda \sigma_0)}$$

$$\Omega(\chi; m) = \frac{\chi - m\chi^{-1}}{r_+^{-2}\chi^{-1} - mr_+^2\chi} = \frac{(1 - m^2)\zeta - (1 + m^2)\sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}}{m[(r_+^{-2} - r_+^2)\zeta - (r_+^{-2} + r_+^2)\sqrt{\zeta^2 - 4R^2m}]} \quad (8.8)$$

Эта переменная величина определяет характер напряженно-деформированного состояния во включении. Рассмотрим ее подробнее.

Прежде всего, окружности  $\chi = r^\circ e^{i\theta^\circ}$  ( $r^\circ = \text{const}$ ) отвечают на физической плоскости  $\zeta$  эллипсы

$$\zeta = x_1^\circ + ix_2^\circ; \quad x_1^\circ = R(r^{\circ-1} + mr^\circ) \cos \theta^\circ, \quad x_2^\circ = R(-r^{\circ-1} + mr^\circ) \sin \theta^\circ \quad (8.9)$$

При  $r^\circ = r_-^\circ = 1/\sqrt{m}$  эллипс вырождается в разрез с двумя берегами:

$$\Gamma_-^\circ: \zeta = x_1^\circ = 2R\sqrt{m} \cos \theta^\circ, \quad x_2^\circ = 0 \quad (-2R\sqrt{m} < x_1^\circ < 2R\sqrt{m}) \quad (8.10)$$

Выражение же (8.8) принимает на берегах разреза следующий вид:

$$\Omega(\zeta; m) = \frac{(1 - m^2) \cos \theta^\circ - i(1 + m^2) \sin \theta^\circ}{m[(r_+^{-2} - r_+^2) \cos \theta^\circ - i(r_+^{-2} + r_+^2) \sin \theta^\circ]} = \frac{1 - me^{i2\theta^\circ}}{m[r_+^{-2} - r_+^2 e^{i2\theta^\circ}]} \quad (8.11)$$

Поскольку на верхнем и нижнем берегах разреза  $\theta^\circ = \pi$  и  $\theta^\circ = -\pi$ , соответственно, функции Гурса – Колосова принимают там одинаковые значения, т.е. разрез фактически отсутствует. Кроме того, при  $r_+ > 1$  они везде конечны. Тем самым, отвечающее функциям (8.7) при выражении (8.8) полученное решение приемлемо в рассматриваемой (конечной) матрице с (деформируемым) включением. Хотя построенное решение носит несколько модельный характер, оно в силу своей простоты и наглядности выявляет особенности этой наиболее сложной из рассмотренных задач.

**9. Заключение.** Получена предельно простая (без потери общности) версия комплексной нелинейной теории упругости, особенностями которой является: отказ от использования уравнений совместности, перемещений, истинных напряжений. Получил дальнейшее развитие комплексный метод. Введены новые типы граничных условий и уравнений упругости. Развита (линейный и нелинейный) подходы к анизотропным ма-



териалам (кристаллы, текстуры, композиты). Прodelанное позволило получить точные решения актуальных двумерных нелинейных краевых задач теории упругости и физики твердого тела. Полученные результаты существенно (численно и даже качественно) отличаются от своих линейных аналогов [6–10].

Введены статические и дисторсионные разрешающие функции, через которые определяется напряженно-деформированное состояние. Для них сформулирована разрешающая система уравнений. При этом подходе перемещения, поворот и напряжения являются “вторичными” величинами, определяемыми после решения основной, разрешающей задачи. Для редуцированного стандартного материала разрешающая система линейна при геометрической нелинейности общей задачи.

Выявлены случаи получения точных решений задач для произвольного (не обязательно упругого) материала; либо частей решения (статически определяемые и дисторсионно определяемые задачи). При этом в случае статической определяемости находятся и напряжения. В случае дисторсионно определяемой задачи напряжения определяются путем прямой подстановки найденных дисторсионных разрешающих функций в уравнения состояния. При заданной же зависимости дисторсионных разрешающих функций от статических разрешающих функций эта зависимость также может быть произвольной (не обязательно определяемой дополнительной энергией).

Характерной особенностью разрешающей системы уравнений является отсутствие в ней уравнений совместности и равновесия. Последнее удовлетворялось для рассмотренных законов упругости при введении разрешающих функций. Далее, при традиционном подходе к решению нелинейных краевых задач является нахождение решения с последующим удовлетворением граничным условиям (условиям сопряжения). Здесь же вначале анализируется граничное условие (условие сопряжения), а уж потом используется (если понадобится) уравнение состояния (нелинейный закон упругости).

Предложенный ранее метод расчленения граничных условий (простой и более удобный, чем метод интегралов типа Коши – применимый и в случаях отсутствия функций Гурса – Колосова) распространен на нелинейные двумерные краевые задачи (плоская задача, антиплоская деформация, осесимметричная деформация тел вращения), анизотропные материалы и условия сопряжения. Внимательное рассмотрение техники его применения в главах книги к самым различным типам задач выявляет следующее общее в них: из искоемых граничных величин вычлняются их несомоуравновешенные (неоднозначные) части ( $a_0, b_0; \varphi_i/\zeta, \varphi_{ii}/\zeta$ ).

В линейной теории упругости известна статико-геометрическая аналогия. В нелинейной же механике твердого деформируемого тела прослеживается статико-дисторсионная аналогия, проявляющаяся в однотипности выражений для статических (силовых) и дисторсионных разрешающих функциях и отвечающих им соотношениях.

Соотношения (6.4), выражающие разрешающие функции матрицы через таковые для включения, по существу, “снимают с рассмотрения” условия сопряжения.

Для редуцированного стандартного и малосжимаемого материала входящее в разрешающую систему уравнений уравнение равновесия удовлетворяются автоматически.

В изложенном выше нигде не использовалась аналитичность рассматриваемых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта “Поддержка ведущих научных школ” (Ш-2180-2003) и РФФИ (02-01-01258).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.

3. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 190 с.
4. Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М.: Наука, 1996. 288 с.
5. Chernykh K.F. Nonlinear Theory of Anisotropic Elasticity. N. Y.: Begell Publishing House, 1998. – 248 p.
6. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 1. Теория. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1999. 276 с.
7. Черных К.Ф. Нелинейная сингулярная упругость. Ч. 2. Приложения. СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1999. 195 с.
8. Черных К.Ф. Комплексная нелинейная теория упругости // Успехи механики. 2002. Т. 1. № 4. С. 121–161.
9. Черных К.Ф. На подступах к нелинейной физической мезомеханике // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5. № 2. С. 5–15.
10. Черных К.Ф. Нелинейная упругость (теория и приложения). СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 419 с.

С.-Петербург

Поступила в редакцию  
26.03.2004