

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ВОЛНОВЫХ ПОЛЯХ

Рассматриваются эффекты трансформации волнового движения жидкости в односторонне направленное движение взвешенных в ней твердых частиц. Получены уравнения, описывающие такого рода движения частиц относительно среды для двух предельных случаев, когда доминирующей силой в процессах взаимодействия частиц и несущей среды является сила, обусловленная эффектом присоединенных масс, либо, когда доминирующей является сила вязкого сопротивления, вычисленная по закону Стокса. Для ряда конкретных волновых полей установлены характеристики движения частиц, выявлены случаи возникновения квазиравновесных устойчивых и неустойчивых равновесных положений частиц, соответствующие эффектам локализации частиц и возникновению адвективных движений соответственно.

Ряд примеров односторонне направленных движений твердых частиц, взвешенных в сжимаемой среде, и их локализация либо наоборот, адвективные движения вблизи седловых положений равновесия неоднократно наблюдались экспериментально [1, 2, 3]. Некоторые частные случаи таких движений теоретически изучены для идеальных [4, 5] и вязких [6] несущих сред. Ниже излагается подход, предложенный впервые автором в работах [7, 8], согласно которому явление трансформации волнового движения жидкости в односторонне направленное движение взвешенных в ней частиц можно систематически устанавливать путем стандартной процедуры, основанной на применении асимптотических методов нелинейной механики [9, 10]. В настоящей статье предлагаемый подход применяется к простейшим формам движения несущей среды, когда движение частиц в среде может быть описано с использованием гипотезы квазинесжимаемости. С его помощью удалось не только получить установленные ранее другими исследователями механизмы трансформации волнового движения среды в односторонне направленное движение частиц, но и выявить некоторые новые механизмы такого рода трансформаций, которые могут найти практическое применение. Рассмотренные примеры показали, что в волновых полях возможно возникновение трех характерных режимов движения частиц: односторонне направленное движение относительно несущей среды; локализация частиц, связанная с наличием устойчивых квазиравновесных положений частиц в волновом поле, а также адвекция, связанная с наличием седловых положений равновесия (когда фазовое пространство имеет размерность более двух и двоякоасимптотические решения Пуанкаре [11] уравнений движения частиц не сводятся к сепаратриссе).

1. Уравнения движения и постановка задачи. Рассмотрим движение двухфазной среды, представляющей собой смесь сжимаемой жидкости и твердых частиц. При описании сил, действующих на частицы, будем пользоваться приближением квазинесжимаемости, т.е. будем описывать их по формулам, справедливым для несжимаемой жидкости, но с учетом переменности ее плотности как параметра. Этот приближенный подход спра-

ведлив, если характерная длина, на которой меняется плотность несущей фазы много больше размера частицы [12]. Кроме того, принимаем, что взаимодействие между несущей средой и частицами может быть описано лишь силами, обусловленными эффектом присоединенных масс, и силами лобового сопротивления согласно закону Стокса. Такой подход справедлив, если выполняется любое из условий:

$$\sqrt{\frac{\eta}{\rho_0 \Omega}} \ll R \text{ или } \sqrt{\frac{\eta}{\rho_0 \Omega}} \gg R \quad (1.1)$$

где η – динамическая вязкость несущей среды, R – характерный радиус частиц, Ω – частота колебаний среды, ρ_0 – невозмущенная плотность среды.

Уравнения движения двухфазной среды для сформулированных выше предположений принимают вид [13, 14]:

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_n \mathbf{v}_n) = 0, \quad \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = -\frac{1}{\rho_n^0} \nabla P + \frac{1}{\rho_n} \mathbf{K}_{jn} + \mathbf{g}$$

$$\rho_2^0 = \rho^0 = \text{const}, \quad \rho_1(\rho_1^0)^{-1} + \rho_2(\rho^0)^{-1} = 1 \quad (n = 1, 2; j = 3 - n) \quad (1.2)$$

$$p = P_0 + \rho_1^0 - 1 + \frac{\Gamma - 1}{2} (\rho_1^0 - 1)^2$$

$$\mathbf{K}_{21} = -\mathbf{K}_{12} = \frac{9\eta\rho_2}{2\rho_0 R^2 \Omega \rho^0} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \frac{\rho_2 \rho_1^0}{2\rho^0} \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad (1.3)$$

Здесь ρ_n и \mathbf{v}_n ($n = 1, 2$) – средние безразмерные плотности (масштаб ρ_0) и скорости (масштаб – невозмущенная скорость звука в несущей среде c_0) соответственно, причем значение индекса $n = 1$ отвечает несущей среде, $n = 2$ – "среде" частиц, ρ_1^0, ρ_2^0 – истинные безразмерные плотности среды и частиц, P – безразмерное (масштаб $\rho_0 c_0^2$) давление, \mathbf{K}_{jn} – функции межфазного взаимодействия [13], \mathbf{g} – безразмерный (с масштабом $c_0 \Omega$) вектор ускорения свободного падения. Функции \mathbf{K}_{jn} должны учитывать силы, действующие между фазами. Механический смысл $\mathbf{K}_{12} \rho_2^{-1}$ – сила, действующая на единицу массы частиц со стороны несущей среды, а $\mathbf{K}_{21} \rho_1^{-1}$ – сила, действующая на единицу массы среды со стороны фазы частиц; P_0 – давление в той точке несущей среды, где $\rho_1^0 = \rho_0$; Γ – эмпирический постоянный коэффициент (согласно данным, приведенным в [14], $\Gamma = 1.4$ для воздуха и $\Gamma = 6$ для воды).

Аппроксимация сил межфазного взаимодействия (1.3) может уточняться. Ряд вариантов такого уточнения можно найти, например, в [12, 15].

Здесь в дальнейшем будем рассматривать случай малой объемной концентрации фазы частиц в смеси $\rho_2(\rho^0)^{-1} \ll 1$ и ограничимся системой уравнений нулевого приближения при разложении всех величин в ряды по малому параметру – объемной концентрации. При этом система (1.2) распадается на две системы, первая из которых описывает движение несущей среды, а вторая – фазы частиц.

Для несущей среды имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (1.4)$$

$$p = P_0 + \rho - 1 + 1/2(\Gamma - 1)(\rho - 1)^2$$

Для дисперсной фазы:

$$\ddot{\mathbf{r}}_p + \frac{1}{2\rho' + \rho} h \dot{\mathbf{r}}_p = \frac{1}{2\rho' + \rho} \left\{ 3\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] + h\mathbf{v} + 2(\rho' - \rho)\mathbf{g} \right\} \quad (1.5)$$

$$h = 9\eta\rho_0^{-1}\Omega^{-1}R^{-2}$$

где $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p(t)$ – радиус-вектор центра частицы в лагранжевых координатах; \mathbf{v}, ρ – коэффициенты при нулевой степени объемной концентрации в разложениях функций v_1 и ρ_1^0 соответственно в степенные ряды по ней; в функциях пространственных координат и времени $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r}), \rho = \rho(t, \mathbf{r})$ и их производных, фигурирующих уравнении (1.5), $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p$; \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения.

В дальнейшем будем рассматривать лишь такие движения частиц, которые могут быть описаны уравнением (1.5), в разложениях коэффициентов которого в ряды Тейлора относительно возмущений плотности и скорости несущей среды достаточно сохранить лишь члены, сумма степеней возмущений в которых не превышает двух, а членами с более высокими степенями возмущений пренебречь. Учитывая вышесказанное, разлагаем все члены (1.5) в ряды Тейлора и ограничиваемся членами, содержащими возмущения в степени не выше второй

$$\ddot{\mathbf{r}}_p + \alpha h \dot{\mathbf{r}}_p = 3\alpha \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} - 6\rho' \alpha^2 \mathbf{g} \delta \rho + [\alpha^2 \delta \rho - \alpha^3 (\delta \rho)^2] h \dot{\mathbf{r}}_p - \alpha^2 h \delta \rho \delta \mathbf{v} + 6\rho' \alpha^2 \delta \rho \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + 3\alpha (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} + 6\rho' \alpha^3 (\delta \rho)^2 + \alpha h \delta \mathbf{v} + 2(\rho' - 1)\alpha \mathbf{g} \quad (1.6)$$

Принимаем, что возмущения $\delta \mathbf{v} = \delta \bar{\mathbf{v}} + \delta \tilde{\mathbf{v}}$ и $\delta \rho = \delta \bar{\rho} + \delta \tilde{\rho}$ – представляют собой суммы моногармонических по явно входящему в них времени с частотами возмущений, приложенными на границе, слагаемых $\delta \bar{\mathbf{v}}$ и $\delta \bar{\rho}$, и слагаемых, независимых от времени $\delta \tilde{\mathbf{v}}$ и $\delta \tilde{\rho}$ и кроме того, они являются достаточно плавно изменяющимися функциями своих пространственных координат, т.е. их градиенты такого же порядка малости, как и сами функции.

Отметим, что слагаемые $\delta \bar{\mathbf{v}}$ определяют односторонне направленные течения, которые возникают в несущей среде под действием колебаний. Это может иметь место, например, в случае возникновения так называемого "акустического ветра" или "акустических течений" [2, 3]. Такого рода эффекты также могут привести к односторонне направленному движению частиц. Однако природа этого явления будет обусловлена просто увлечением частиц течением несущей среды.

При выполнении первого из условий (1.1) доминирующей силой среди сил, действующих на частицу, является сила присоединенных масс. Ниже будем называть этот случай режимом присоединенной массы. Отметим, что режим "присоединенной массы" не совпадает с приближением идеальной жидкости, так как он учитывает малое трение в соответствии со стоксовым приближением. При выполнении второго из условий (1.1) доминирующей силой среди сил, действующих на частицу, является стоксово лобовое сопротивление. Ниже будем называть этот случай вязким режимом.

2. Режим присоединенной массы. Принимаем, что амплитуды гармонически зависящих от времени частей возмущений скорости и плотности несущей среды и коэффициент h – малые величины первого порядка малости, а безразмерное абсолютное значение ускорения свободного падения и независимые от времени части возмущений скоро-

сти и плотности несущей среды – малые второго порядка малости. При этом уравнение (1.6) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_p = & \mu \left[3\alpha \frac{\partial \delta \ddot{\mathbf{u}}}{\partial t} - \alpha h \dot{\mathbf{r}}_p \right] + \\ & + \mu^2 \left[\alpha h \delta \ddot{\mathbf{u}} + 2(\rho' - 1)\alpha \mathbf{g} + \alpha^2 h \delta \bar{\rho} \dot{\mathbf{r}}_p + 6\rho' \alpha^2 \delta \bar{\rho} \frac{\partial \delta \ddot{\mathbf{u}}}{\partial t} + 3\alpha (\delta \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}) \delta \ddot{\mathbf{u}} \right] + \\ & + \mu^3 \left[\alpha h \delta \bar{\mathbf{u}} + \alpha^2 h \delta \bar{\rho} \dot{\mathbf{r}}_p + 6\rho' \alpha^2 \delta \bar{\rho} \frac{\partial \delta \ddot{\mathbf{u}}}{\partial t} + 3\alpha (\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}) \delta \ddot{\mathbf{u}} + 3\alpha (\delta \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}) \delta \bar{\mathbf{u}} - \right. \\ & - 6\rho' \alpha^2 \mathbf{g} \delta \bar{\rho} - \alpha^3 h \dot{\mathbf{r}}_p (\delta \bar{\rho})^2 - \alpha^2 h \delta \bar{\rho} \delta \ddot{\mathbf{u}} \left. \right] + \mu^4 \left[6\rho' \alpha^3 \mathbf{g} (\delta \bar{\rho})^2 - 6\rho' \alpha^2 \mathbf{g} \delta \bar{\rho} + \right. \\ & \left. + 3\alpha (\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}) \delta \bar{\mathbf{u}} - 2\alpha^3 h \dot{\mathbf{r}}_p \delta \bar{\rho} \delta \bar{\rho} - \alpha^2 h (\delta \bar{\rho} \delta \ddot{\mathbf{u}} + \delta \bar{\rho} \delta \bar{\mathbf{u}}) \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

В дальнейшем ограничимся изучением таких движений, для которых скорости частиц малые величины первого порядка малости. Причем, эти скорости состоят из вынужденных колебаний обусловленных действием вынуждающих сил, сводящихся в рассматриваемом случае к нестационарной части членов уравнения (2.1), описывающих присоединенную массу, а именно $3\alpha \partial \delta \ddot{\mathbf{u}} / \partial t$, и новой неизвестной – медленно меняющейся функции времени $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, описывающей односторонне направленное перемещение.

Согласно этому вводим новые переменные $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ с помощью следующих соотношений:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{r}}_p = \mu(\mathbf{y} + 3\alpha \delta \ddot{\mathbf{u}}), \quad \delta \ddot{\mathbf{u}} = \delta \ddot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{r}_p)$$

Уравнение (2.1) в новых переменных принимает вид (малыми величинами выше третьего порядка малости пренебрегаем):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mu(\mathbf{y} + 3\alpha \delta \ddot{\mathbf{u}}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mu \Phi_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mu^2 \Phi_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mu \Phi_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = & -\alpha h [\mathbf{y} + (3\alpha - 1)\delta \ddot{\mathbf{u}}] - 3\alpha \{ [\mathbf{y} + (3\alpha - 1)\delta \ddot{\mathbf{u}}] \cdot \mathbf{V} \} \delta \ddot{\mathbf{u}} + 2(\rho' - 1)\alpha \mathbf{g} + \\ & + 6\rho' \alpha^2 \delta \bar{\rho} \frac{\partial \delta \ddot{\mathbf{u}}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^2 \Phi_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \alpha^2 h \delta \bar{\rho} [\mathbf{y} + (3\alpha - 1)\delta \ddot{\mathbf{u}}] - 6\rho' \alpha^2 \mathbf{g} \delta \bar{\rho} + \alpha h \delta \bar{\mathbf{u}} + 6\rho' \alpha^2 \delta \bar{\rho} \frac{\partial \delta \ddot{\mathbf{u}}}{\partial t} + \\ & + 3\alpha (\delta \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}) \delta \ddot{\mathbf{u}} + 3\alpha (\delta \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{V}) \delta \bar{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

$$\delta \ddot{\mathbf{u}} = \delta \ddot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}), \quad \delta \bar{\rho} = \delta \bar{\rho}(t, \mathbf{x}), \quad \delta \bar{\mathbf{u}} = \delta \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \quad \delta \bar{\rho} = \delta \bar{\rho}(\mathbf{x})$$

Как видно, уравнение (2.2) – приведено к стандартной форме. Для его исследования можно использовать строго обоснованный метод усреднения Н.Н. Боголюбова [9].

При решении конкретных задач необходимо строить для уравнения (2.2) уравнения высших приближений, вплоть до второго. Предполагаем, что функции Φ_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют известным условиям [10], при которых к системе (2.2) можно применять метод усреднения. Согласно основной идее метода усреднения строим замену переменных следующим образом:

$$\mathbf{x}_i = \xi_1 + \sum_{j=1}^2 \mu^j \mathbf{X}_{1j}(t, \xi_1, \xi_2), \quad \mathbf{y} = \xi_2 + \sum_{j=1}^2 \mu^j \mathbf{X}_{2j}(t, \xi_1, \xi_2) \quad (2.3)$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^2 \mu^j \mathbf{P}_{ij}(\xi_1, \xi_2), \quad (i = 1, 2)$$

Для неизвестных функций X_{ij} и P_{ij} ($i, j = 1, 2$) находим

$$X_{11} = -3\alpha \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}, \quad P_{11} = \xi_2, \quad X_{21} = \alpha h(3\alpha - 1) \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + 3\alpha(\xi_2 \cdot \nabla) \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

$$P_{21} = -\alpha h \xi_2 - 3\alpha(3\alpha - 1) \overline{(\delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \delta \tilde{\mathbf{v}}} + 6\rho' \alpha^2 \delta \tilde{\rho} \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + 2(\rho' - 1)\alpha g$$

$$P_{12} = -9\alpha^2 \overline{\left(\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \delta \tilde{\mathbf{v}}}, \quad P_{22} = \alpha^2(3\alpha - 1)h(\delta \tilde{\rho} \delta \tilde{\mathbf{v}}) + \alpha h \delta \bar{v} +$$

$$+ 9\alpha^2 \overline{\left(\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right) (\xi_2 \cdot \nabla) \delta \tilde{\mathbf{v}}} - 9\alpha^2 \overline{[(\xi_2 \cdot \nabla) \left(\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right)] \delta \tilde{\mathbf{v}}}$$

Здесь черта над выражениями означает усреднение по явно входящему времени. Остальные коэффициенты приводить не будем, чтобы не загромождать текст.

Таким образом, в рассматриваемом случае после исключения ξ_2 приближенные уравнения второго приближения принимают следующий вид:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \alpha h \left(\delta \bar{v} - \frac{d\xi_1}{dt} \right) + 2(\rho' - 1)\alpha g + W \quad (2.4)$$

где

$$W = 2\alpha^2(1 - \rho')[\alpha h \delta \tilde{\rho} \delta \tilde{\mathbf{v}} - 3\overline{(\delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \delta \tilde{\mathbf{v}}}] + 6\rho' \alpha^2 \delta \tilde{\rho} \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \delta \tilde{\mathbf{v}} +$$

$$+ 9\alpha^2 \overline{\left[\left(\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \left(\left\langle \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right\rangle \delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla - \alpha h \right) - \left(\left\langle \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right\rangle \delta \tilde{\mathbf{v}} \right) \cdot \nabla \left(\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \right] \delta \tilde{\mathbf{v}} +}$$

$$+ 9\alpha^2 \overline{\left[\left(\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \left(\frac{d\xi_1}{dt} \cdot \nabla \right) - \left(\frac{d\xi_1}{dt} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla \right) \right] \delta \tilde{\mathbf{v}}} \quad (2.5)$$

где W – вибрационная сила; аргументами функций $\delta \tilde{\rho}$ и $\delta \tilde{\mathbf{v}}$ являются время t , а также ξ_1 .

Выражение (2.5) определяет вибрационную силу, трансформирующую колебания в односторонне направленные движения частиц, для любого течения жидкости, удовлетворяющего принятым выше предположениям. Для каждого конкретного случая необходимо задаться конкретными выражениями для периодических возмущений скорости жидкости $\delta \tilde{\mathbf{v}}$ и плотности $\delta \tilde{\rho}$ как функциями пространственных координат и времени.

3. Вязкий режим. Теперь рассмотрим движение частиц в сжимаемой среде в случае выполнения вязкого режима движения, т.е. принимаем второе из условий (1.1) выполненным.

Так же, как и в рассмотренном выше случае предполагаем, что движение частиц состоит из так называемого "быстрого движения", представляющего собой вынужденные колебания с частотой колебаний несущей среды и "медленного движения", представляющего собой односторонне направленный дрейф частиц относительно несущей среды. Колебания частиц обусловлены колебаниями несущей среды, а трансформация колебательного движения в односторонне направленное (в дрейф) обусловлена квадратичными нелинейностями уравнения (1.6) и взаимодействием упомянутых "быстрых" колебаний с нестационарной частью возмущения плотности.

Вязкий режим отличается от режима присоединенной массы тем, что в порождающем движении амплитуды "быстрых" вынужденных колебаний частиц определяются не только действием вынуждающих сил и силы инерции частиц, но также и вязким сопротивлением. Коэффициент h с одной стороны определяет величину вязкого демпфирования, а с другой – амплитуды вынуждающих эти колебания частиц сил. Тот факт, что в качестве порождающей можно выбрать линейную систему, обладающую устойчивыми решениями, позволяет исследовать вязкий режим движения частиц методом малого параметра.

Будем считать первые степени моногармонических по явно входящему времени частей возмущений скорости и плотности несущей среды $\delta \vec{v} = \delta \vec{v}(t, \mathbf{r}_p)$ и $\delta \bar{\rho} = \delta \bar{\rho}(t, \mathbf{r}_p)$ (за исключением тех, которые содержат в качестве коэффициента безразмерное ускорение свободного падения g) величинами первого порядка малости, независимые от времени части возмущений скорости и плотности несущей среды $\delta \vec{v} = \delta \vec{v}(\mathbf{r}_p)$, $\delta \bar{\rho} = \delta \bar{\rho}(\mathbf{r}_p)$; безразмерное ускорение свободного падения g – величинами второго порядка малости. Вводя в соответствии с этим в уравнение (1.6) малый параметр, степени которого будут обозначать порядок малости величин, приводим его к следующему виду:

$$\ddot{\mathbf{r}}_p + \alpha h \dot{\mathbf{r}}_p = \mu \Phi_1(t, \mathbf{r}_p, \dot{\mathbf{r}}_p) + \mu^2 \Phi_2(t, \mathbf{r}_p, \dot{\mathbf{r}}_p) \quad (3.1)$$

$$\mu \Phi_1(t, \mathbf{r}_p, \dot{\mathbf{r}}_p) = \mu \left(3\alpha \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} + \alpha h \delta \vec{v} + \alpha^2 h \delta \bar{\rho} \dot{\mathbf{r}}_p \right)$$

$$\mu^2 \Phi_2(t, \mathbf{r}_p, \dot{\mathbf{r}}_p) = \mu^2 \left\{ \alpha h \delta \vec{v} + 2(\rho' - 1)\alpha g + 3\alpha(\delta \vec{v} \cdot \mathbf{V})\delta \vec{v} - \alpha^2 h \delta \bar{\rho} \delta \vec{v} + \right. \\ \left. + h[\alpha^2 \delta \bar{\rho} - \alpha^3 (\delta \bar{\rho})^2] \dot{\mathbf{r}}_p + 6\rho' \alpha^2 \delta \bar{\rho} \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} \right\}$$

Членами порядка малости высшими, чем второй, пренебрегаем. Аргументами функций $\delta \vec{v}/\partial t$, $\delta \vec{v}$, $\delta \bar{\rho}$, фигурирующих в выражениях для Φ_1 и Φ_2 в правых частях, являются безразмерное время t и радиус-вектор центра масс частицы \mathbf{r}_p , а функций $\delta \vec{v}$ и $\delta \bar{\rho}$ – \mathbf{r}_p .

Для оценки величины вибрационной силы, действующей на частицу в рассматриваемом случае, был использован метод малого параметра. Решение уравнений (3.1) будем искать в следующем виде:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{x}_1 + \mu^2 \mathbf{x}_2 + \dots, \quad \dot{\mathbf{r}}_p = \mathbf{y}_0 + \mu \mathbf{y}_1 + \mu^2 \mathbf{y}_2 + \dots \quad (3.2)$$

где каждая из неизвестных функций $y_i = y_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) должна быть ограниченной, гармонической по времени функцией; функции $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$ могут быть представимы в виде сумм, которые наряду с гармоническими слагаемыми могут иметь слагаемые пропорциональные времени, что соответствует односторонне направленному дрейфу.

Уравнения нулевого приближения допускают следующее решение, удовлетворяющее последнему условию:

$$\mathbf{x}_0 = \text{const}, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Уравнение первого приближения имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{y}_1, \quad \dot{\mathbf{y}}_1 + \alpha h \mathbf{y}_1 = \Phi_1(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \quad (3.4)$$

Они представляют собой линейные неоднородные уравнения с моногармоническими вынуждающими членами в правой части. Периодическое решение уравнения (3.4) представляется следующим образом:

$$x_1 = \beta_1 \delta \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}_0) - \beta_2 \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t}, \quad y_1 = \beta_2 \delta \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}_0) + \beta_1 \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}(t, \mathbf{x}_0)}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\beta_1 = \frac{2(1-\rho')h\alpha^2}{1+h^2\alpha^2}, \quad \beta_2 = \frac{(h^2\alpha^2+3\alpha)}{1+h^2\alpha^2}$$

Отметим, что коэффициенты β_1 и β_2 – ограничены при неограниченном возрастании h .

Уравнения второго приближения, которыми мы здесь и ограничимся, принимают вид:

$$\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{y}_2, \quad \dot{\mathbf{y}}_2 + \alpha h \mathbf{y}_2 = \Phi_2(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + (\mathbf{x}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \Phi_1(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + (\mathbf{y}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{y}}) \Phi_1(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \quad (3.6)$$

где символом $\nabla_{\mathbf{x}}$ – обозначен оператор градиент по пространственным координатам, а символом $\nabla_{\mathbf{y}}$ – градиент по компонентам скорости частиц.

Правая часть второго из уравнений (3.6) представляет собой сумму независимого от времени и гармонических с нулевым средним по времени значением слагаемых. В соответствии с этим решение уравнений (3.6) также может быть представлено как сумма гармонических с нулевыми средними по времени значениями частных решений $\tilde{\mathbf{x}}_2$, $\tilde{\mathbf{y}}_2$ и решения уравнения, левая часть которого совпадает с левой частью уравнений (3.6), а правая является независимым от времени слагаемым правой части уравнений (3.6) – $\bar{\mathbf{x}}_2$, $\bar{\mathbf{y}}_2$. Именно последнее слагаемое и определяет односторонне направленное движение частиц, Уравнение для его нахождения может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\mathbf{x}}}_2 &= \bar{\mathbf{y}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_2 &= +\alpha h (\delta \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{y}}_2) + 2(\rho' - 1)\alpha \mathbf{g} + \mathbf{W} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \alpha^3 \chi w [(\overline{\delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla} \delta \tilde{\mathbf{v}})] - \alpha^3 \chi h \kappa \left(\overline{\frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla} \right) \delta \tilde{\mathbf{v}} - 3\alpha^3 \chi \kappa \left(\overline{\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \cdot \nabla} \right) \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \\ &+ 2(1-\rho')\alpha^3 h \chi \left[3(\overline{\delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla} \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}) + (\overline{\delta \tilde{\rho} \delta \tilde{\mathbf{v}}}) + h\alpha \left(\overline{\delta \tilde{\rho} \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}} \right) \right] + 6\rho'\alpha^2 \left(\overline{\delta \tilde{\rho} \frac{\partial \delta \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t}} \right) \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{1}{1+\alpha^2 h^2}, \quad w = h^2(5-2\rho') + 3(2\rho'+1)^2, \quad \kappa = h^2 + 6\rho' + 3$$

где черта над выражениями означает усреднение по явно входящему времени.

4. Возможные приложения. Сопоставление выражений для вибрационных сил, полученных для режима "присоединенной массы" (2.5) и вязкого режима (3.8), показывает, что эти выражения существенно различаются между собой. Основной причиной этого является отличие форм "быстрых" движений. Эти движения в обоих случаях представляются собой вынужденные колебания с частотой колебаний несущей жидкости. Амплитуды этих колебаний в случае режима "присоединенной массы" определяются вынуждающими силами, приложенными со стороны несущей среды к частицам, пропорциональными ускорению несущей среды, и силами инерции частиц без учета вязких сил

лобового сопротивления (которые в данном случае являются величинами более высокого порядка малости), в то время как в случае вязкого режима вязкие силы лобового сопротивления играют доминирующую роль при формировании амплитуд вынужденных колебаний, а силы инерции – малые более высокого порядка малости.

Ниже основное внимание будет обращено на то, к каким движениям частиц, направленным в одну сторону, могут привести различные волновые формы движения несущей среды. В качестве примеров будут рассмотрены плоские бегущая и стоячая волны, а также сферическая бегущая волна. Эти простейшие течения служат для иллюстрации и апробирования предлагаемой здесь методики исследования трансформации колебаний в односторонне направленное движение частиц.

Уравнения (2.4) и (3.7), описывающие односторонне направленные движения частиц в смеси, могут иметь частные решения, в виде равновесных положений. При этом исходное уравнений движения частиц в волновых полях (1.6) может также при выполнении ряда условий [9] иметь решения, близкие к этим равновесным положениям

$$\mathbf{r}_p = \text{const}, \quad \dot{\mathbf{r}}_p = 0 \quad (4.1)$$

Если эти решения устойчивы, то физически это означает, что в рассматриваемом волновом поле имеются равновесные частицы, вблизи которых частицы при своем движении локализируются.

Если равновесные положения для уравнений (2.4) и (3.7) представляют собой седловые (гиперболические) особые точки, то фазовые траектории, стремящиеся к ним, могут представлять собой либо сепаратриссы, либо двоякоасимптотические решения Пуанкаре [11], не сводящиеся к сепаратриссам. В последнем случае имеет место так называемая адвекция [16]: фазовые траектории принимают весьма запутанный вид. Траектории из близкой окрестности равновесного положения не приближаются к нему асимптотически и не удаляются на бесконечность. По-видимому, в этом случае и решения исходного уравнения (1.6) могут иметь такой же характер. Практически адвекция может быть использована в технологиях перемешивания: она обеспечивает такие движения частиц, которые приводят к перемешиванию.

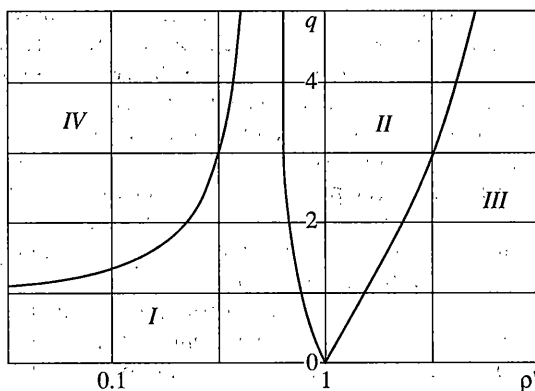
Рассмотрим несколько характерных случаев движения частиц в колеблющейся сплошной среде.

В качестве первого простейшего примера движения частиц в волновых полях рассмотрим движение частиц в плоской стоячей волне, частотные и геометрические характеристики которой – нерезонансны. Колебания скорости в сжимаемой среде в волне происходили вертикально, причем, среда занимала объем между двумя горизонтальными плоскостями, расположенными на расстоянии L друг от друга. Колебания скорости среды на одной из этих плоскостей имели амплитуду ε , а на другой была свободная поверхность, то есть изменения давления отсутствовали. Для описанного случая были составлены уравнения направленных односторонне движений частиц (2.5) и (3.7). Анализ этих уравнений позволил сделать следующие заключения о движении частиц.

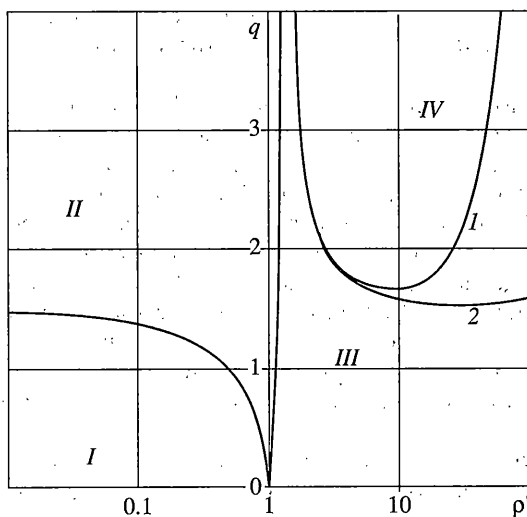
На фиг. 1, 2 в координатах $\{\rho', q\}$:

$$q = \frac{3\varepsilon^2 \Omega}{4g c_0 \cos^2(L\Omega/c_0)}$$

проиллюстрированы режимы движения частиц в стоячей волне для случаев, когда справедливо первое и второе из условий (1.1) соответственно. Несложный анализ полученных для данного случая уравнений (2.4) и (3.7) показал следующее. Пространство параметров разбито на четыре области, для каждой из которых реализуется свое качественно отличное движение частиц из состояния покоя. В областях, отмеченных римскими цифрами II и IV, движение частиц определяется волновым полем, т.е. вибрационными



Фиг. 1



Фиг. 2

силами, а в областях, отмеченных римскими цифрами I и III, определяющей является равнодействующая сил тяжести и Архимеда. Для значений параметров, соответствующих областям I, частицы всплывают, для значений, соответствующих областям III, — тонут. Для областей II в волновом поле возникают устойчивые квазиравновесные положения, которые располагаются в стоячей волне скорости на отрезке длиной в четверть длины волны с серединой в пучности. Таким образом, для областей II имеет место локализация частиц на отрезке длиной в четверть длины с серединой в пучности волны скорости. Вместе с тем для тех же значений параметров $\{\rho', q\}$, которым отвечают области II на фиг. 1, 2, в стоячей волне скорости на отрезке длиной в четверть длины волны с серединой в узле возникают седловые (судя по уравнениям (2.4) и (3.7)) равновесные положения. Поэтому, при переходе к рассмотрению пространственных движений частиц, близких к одномерному, возможно возникновение адвекции. Для значений параметров, которым отвечает область IV на фиг. 1, 2 имеет место локализация частиц вблизи узлов стоячей волны и возможно адвективное движение вблизи пучностей.

На фиг. 2 в координатах $\{\rho', q\}$ показаны области существования стационарных решений уравнения (3.7) и, следовательно, области вибрационных движений частиц в условиях вязкого режима. Границы областей строились для двух значений h : 100 (кривая 1) и 1000 (кривая 2). Различие этих границ проявляется только для плотностей больших, чем 7. При меньших значениях плотностей границы сливаются.

Отметим, что выражение для вибрационной силы при выполнении условий для реализации режима присоединенной массы, которое фигурирует в (2.5), выписанном для волнового поля в виде стоячей волны, практически совпадает с выражением для средней силы (действующей на частицу в плоской стоячей волне), полученным в работе [5] на основании решения точных гидродинамических уравнений идеальной жидкости.

Для волнового поля в виде плоской бегущей волны были установлены следующие выражения. Для безразмерной вибрационной силы, отнесенной к единице объема среды (масштаб $\rho_0 c_0 \Omega$) имеем:

для режима присоединенной массы

$$W = \varepsilon^2 \frac{9\eta^2(11-2\rho')}{2\rho_0\Omega R^2(2\rho'+1)^3} \quad (4.2)$$

для вязкого режима

$$W = \varepsilon^2 \frac{9\eta(1+(11-2\rho')/h^2)}{2\rho_0\Omega R^2(2\rho'+1)^3(1+1/h^2)} \quad (4.3)$$

Как видно, в обоих случаях вибрационная сила возрастает с ростом безразмерной амплитуды колебаний возмущений скорости несущей среды ε и коэффициента вязкости несущей среды η . При увеличении же плотности частиц ρ' и их радиуса R величина вибрационной силы уменьшается.

Следует подчеркнуть, что формулы для вибрационной силы (4.2) и (4.3) существенно отличаются от формулы, полученной в [4, 5] для силы радиационного давления, действующей на частицу в плоской бегущей волне в идеальной жидкости, так как она пропорциональна вязкости несущей среды. Формула для радиационного давления в плоской бегущей волне идеальной жидкости устанавливает, что радиационное давление пропорционально шестой степени безразмерного радиуса частицы R/L (или третьей, если она отнесена к единице объема частицы). В настоящем разделе работы членами выше третьей степени безразмерного радиуса частицы пренебрегалось. Поэтому сила радиационного давления не могла быть обнаружена. Однако была обнаружена сила, зависящая от вязкости, которая оказалась существенно больше, чем радиационное давление. Даже при условии малости коэффициента вязкого трения h (режим присоединенной массы) величина ее может значительно превосходить силу радиационного давления для некоторых диапазонов значений радиусов частиц R и частот колебаний Ω . В условиях вязкого режима при малых размерах частиц (например, для аэрозолей) и не слишком больших частотах (например, в низкочастотном звуковом диапазоне ≈ 1 кГц) эта сила превосходит радиационное давление на много порядков.

Для волнового поля в виде сферической бегущей волны выражения для проекций вибрационной силы на оси локального базиса сферической системы координат с началом в центре излучающей сферы имеют единственную отличную от нуля компоненту – радиальную. При выполнении условий, определяющих режим присоединенной массы, соответствующая проекция согласно (2.5) принимает следующий вид:

$$W = \alpha^2 \varepsilon^2 a_0^2 \left[3 \left(\frac{1-2\rho'}{\xi_1^3} + 2 \frac{1-\rho'}{\xi_1^5} \right) + \alpha h \left(\frac{11-2\rho'}{2\xi_1^2} + \frac{9}{\xi_1^4} \right) - 9\varepsilon^2 a_0^2 \left(\frac{1}{2\xi_1^5} + \frac{3}{\xi_1^7} + \frac{4}{\xi_1^9} \right) \right] \quad (4.4)$$

Для вязкого режима согласно (3.8) имеем:

$$W = \varepsilon^2 a_0^2 \alpha^2 \left\{ \alpha h \chi \left(\frac{h^2 + 9}{x_2^4} + \frac{h^2 + 11 - 2\rho'}{2x_2^2} \right) + \alpha \chi \frac{2(\rho' - 1)(h^2 - 6\rho' - 3)}{x_2^5} + \frac{[\alpha \chi (\alpha h^2 - 6)\rho'^2 + 3(\alpha \chi - 1)\rho' + \alpha \chi (3 - \alpha h^2)]}{x_2^3} \right\} \quad (4.5)$$

Отметим, что a_0 в (4.4) и (4.5) представляет собой безразмерный (масштаб c_0/Ω) радиус излучающей сферической бегущей волны сферы.

Анализ выражений (4.4) показывает, что для режима присоединенной массы по мере удаления от излучающей сферы зависимости вибрационной силы от расстояния могут быть двух качественно отличающихся друг от друга видов. Зависимости первого вида по мере удаления от излучающей сферы сначала монотонно возрастают, достигают максимума и затем монотонно убывают. Зависимости второго вида – монотонные на всем протяжении.

Вибрационные силы, описываемые кривыми второго вида, стремятся к нулю с ростом расстояния от излучающей сферы. Их действие на частицы практически сосредоточено в зоне, прилегающей к излучающей сфере. Вблизи излучающей сферы притяжение частиц к ней максимально, затем по мере удаления от нее, вибрационная сила быстро уменьшается по модулю и на границе вышеупомянутой зоны практически исчезает. По мере дальнейшего удаления от излучающей сферы вибрационная сила медленно и монотонно стремится к нулю, когда расстояние от излучающей сферы стремится к бесконечности.

Вибрационные силы, которым соответствуют кривые первого типа, на близком расстоянии от излучающей сферы описывают ослабевающее с удалением от нее притяжение. На некотором конечном расстоянии от сферы притяжение сменяется отталкиванием, которое сначала возрастает по модулю, а затем монотонно затухает, исчезая на бесконечности. Расстояние, при котором притяжение сменяется отталкиванием, и вибрационная сила обращается в нуль, определяет седловое равновесное положение. Здесь, также как и во многих предыдущих примерах, возможно возникновение адвективного движения, для строгого определения и вычисления параметров которого необходимо перейти от рассмотрения одномерных к многомерным движениям частиц. Если адвективное движение действительно возникает, то в определенной зоне сферической бегущей волны возможно перемешивание.

Для вязкого режима ограничимся лишь приближенным анализом выражения (4.5) при больших значениях h . Физически этому соответствует, например, малые размеры частиц.

Асимптотическое приближение для вибрационной силы принимает следующий вид:

$$W = \varepsilon^2 a_0^2 \alpha \left[h \left(\frac{1}{x_2^4} + \frac{1}{2x_2^2} \right) + \alpha \frac{\rho'^2 - 3\rho' - 1}{x_2^3} + \frac{2(\rho' - 1)}{x_2^5} \right] \quad (4.6)$$

Как видно, вибрационная сила для случая вязкого режима в данном случае содержит слагаемое, пропорциональное h . Отметим, что это не может привести к неограниченному росту скорости дрейфа частиц, так как на частицы действует сила лобового сопротивления также пропорциональная h .

Несложный анализ показывает, что для частиц, плотности которых меньше, чем плотность невозмущенной жидкости, существует окружающая излучающую сферу не-

устойчивая равновесная поверхность в виде сферы, на которой вибрационная сила обнуляется. Этой равновесной поверхности соответствует седловое неустойчивое положение равновесия. Внутри этой равновесной сферической поверхности вибрационная сила отрицательна, что соответствует притяжению частиц к излучающей сфере, а вне нее преобладает первое слагаемое, пропорциональное коэффициенту h , обуславливающее положительность вибрационной силы, а значит отталкивание. Приблизительно значение радиуса равновесной сферы может быть оценено следующим соотношением $x_2 \approx x_2^* = 2(1 - \rho')/h$. Если $x_2^* < a_0$, то области притяжения вблизи излучающей сферы не возникает и имеет место только отталкивание. Отметим, что абсолютное значение вибрационной силы в условиях вязкого режима (по крайней мере достаточно далеко от излучающей сферы $x_2 \gg x_2^*$) существенно превосходит абсолютное значение вибрационной силы в условиях режима присоединенной массы.

Волновое поле в виде сферической бегущей волны возникает вблизи совершающих радиальные колебания пузырьков в жидкости, например, при широко используемому в практике обогащения руд полезных ископаемых эффекту флотации, заключающемся в том, что мелкие твердые частицы притягиваются к пульсирующим пузырькам. В работе [17] флотирующее действие пузырей объясняется на основании предположения о несжимаемости несущей среды. Если, однако, частота колебаний пузыря значительна, то такого предположения сделать нельзя и следует учитывать сферическую волну, источником которой является пульсирующий пузырь. Из полученных результатов можно сделать вывод, что и в случае сжимаемой несущей среды частицы с плотностями $\rho' < 1$ будут притягиваться к нему, причем радиус захвата будет x_2^* .

5. Заключение. В работе в рамках принятых ограничений, позволяющих выписывать уравнение движения твердой частицы в колеблющейся сжимаемой среде, получены уравнения, описывающие трансформацию колебаний среды в односторонне направленные движения частиц. Для ряда простейших волновых полей установлены условия возникновения трех характерных режимов движения частиц: односторонне направленный дрейф, локализация вблизи устойчивых равновесных положений, адвекция вблизи седловых положений равновесия. Полученные результаты могут найти применение при разработке научных основ технологий гомогенизации эмульсий и суспензий, разделения частиц, взвешенных в жидкости, по плотностям и размерам, а также перемешивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике. М.: Иностранная литература, 1957. 624 с.
2. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
3. Физика и техника мощного ультразвука. Т. 3. Физические основы ультразвуковой технологии // Под ред. Л.Д. Розенберга. М.: Наука, 1970. 689 с.
4. Горьков Л.П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140. № 1. С. 88–91.
5. King L.V. On the acoustic radiation pressure on sphere // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1934. V. 147. № 861. P. 212–240.
6. Духин С.С. Теория дрейфа аэрозольной частицы в стоячей звуковой волне // Коллоидный журнал. 1960. Т. 22. Вып. 1. С. 128–130.
7. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. О движении твердых частиц, взвешенных в колеблющейся сжимаемой среде // Прикл. механика. 1975. Т. 11. Вып. 2. С. 3–14.
8. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Динамика частиц при воздействии вибрации. Киев: Наукдумка, 1975. 168 с.
9. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний, М.: Наука, 1988. 328 с.

10. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
11. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 2. М.: Наука, 1972. 999 с.
12. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 360 с.
13. Рахматулин Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20. Вып. 1. С. 184–195.
14. Бейер Р. Нелинейная акустика // Физическая акустика. М.: Мир, 1969. Т. 2. Ч. 6. С. 266–301.
15. Нигматулин Р.И. Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидродинамике многофазных сред // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 3. С. 451–463.
16. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech. 1984. V. 143. P. 1–21.
17. Ильин А.В., Кузнецов В.П., Новицкий Б.Г., Фридман В.М. Механизм флотационного действия пульсирующих газовых пузырьков // Акуст. ж. 1972. Т. 18. Вып. 4. С. 537–545.

Москва

Поступила в редакцию
13.05.2005