

К ЗАДАЧЕ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ТОРМОЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Исследуется задача о свободном торможении твердого тела в сопротивляющейся среде – важного в прикладном отношении случая движения. Предполагается, что однородное осесимметричное тело взаимодействует со средой лишь передней частью своей внешней поверхности, имеющей форму плоского круглого диска. Как показал эксперимент для круговых цилиндров [1], прямолинейное поступательное движение вдоль оси симметрии диска неустойчиво¹.

При простейших предположениях о силах воздействия со стороны среды показана невозможность колебаний с ограниченной амплитудой.

Точное аналитическое описание силомоментных характеристик воздействия среды на диск отсутствует. По этой причине используется прием “погружения” данной задачи в более широкий класс задач. Это позволяет получить относительно полное качественное описание движения тела в рамках принятых модельных предположений.

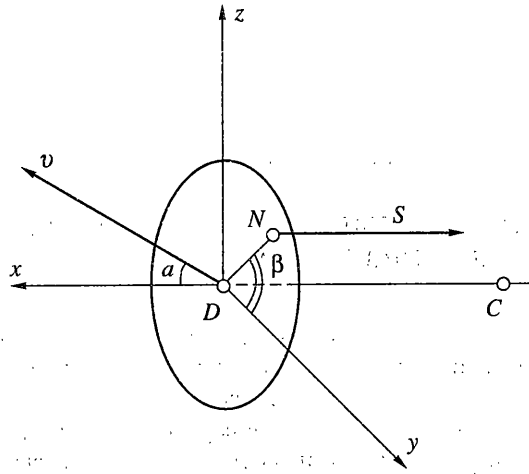
Несмотря на трудности технического характера, для исследуемых динамических систем удается получить примеры частных решений, а также семейства фазовых портретов в трехмерном пространстве квазискоростей, состоящие из счетного множества траекторно неэквивалентных портретов с различными нелинейными качественными свойствами.

1. Постановка задачи и уравнения движения. 1.1. Силомоментные характеристики воздействия среды на динамически симметричное тело. Рассмотрим задачу о пространственном движении однородного осесимметричного твердого тела массы m , часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания [2–5]. Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объема, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа однородных круговых цилиндров в жидкость.

Предположим, что касательные силы к диску отсутствуют. Тогда сила S , приложенная к телу со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела (направлена по нормали к диску) и квадратична по скорости его центра (ньютоновское сопротивление, фиг. 1). Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

При выполнении вышеперечисленных условий среди движений тела существует режим прямолинейного поступательного торможения: тело способно совершать поступательное движение в направлении его оси симметрии, т.е. перпендикулярно плоскости

¹ См. также: Самсонов В.А., Шамолин М.В., Ерошин В.А., Макаришин В.М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании. Научный отчет Ин-га механики МГУ № 4396. М., 1995. – 41 с.



Фиг. 1

диска. При этом точка N приложения силы S воздействия среды совпадает с геометрическим центром D диска (фиг. 1).

При возмущений режима прямолинейного поступательного торможения вектор скорости \mathbf{v} точки D , вообще говоря, отклоняется от оси геометрической симметрии на некоторый угол (атаки) α . При этом точка N приложения силы сопротивления S смещается от центра диска на величину R и лежит в плоскости, образованной вектором \mathbf{v} и осью симметрии тела.

Для плоскопараллельного движения тела с передним симметричным плоским торцом, опираясь на неустойчивость прямолинейного поступательного торможения, показано отсутствие автоколебаний тела [6, 7]. Вполне естественно распространить данный результат на пространственное движение осесимметричного тела и показать отсутствие колебаний ограниченной амплитуды.

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$ (фиг. 1) и направим ось x вдоль оси геометрической симметрии тела. Оси y и z жестко свяжем с круглым диском, тем самым образовав правую систему координат.

Компоненты вектора угловой скорости Ω в системе $Dxyz$ будем обозначать через $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$.

Тензор инерции динамически симметричного тела во введенных связанных осях $Dxyz$ имеет диагональный вид $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2\}$.

1.2. Гипотеза квазистационарности. Воспользуемся гипотезой квазистационарности и будем предполагать, что величина R определяется лишь одним параметром – углом атаки α , измеряемым между вектором скорости \mathbf{v} центра D диска и прямой x . Таким образом $DN = R(\alpha)$.

Кроме того, примем величину силы S сопротивления в виде $S = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathbf{v}|$. Для удобства дальнейшего описания вместо коэффициента сопротивления $s_1(\alpha)$ введем вспомогательную знакопеременную функцию $s(\alpha)$ по следующему правилу: $s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha) \text{sign} \cos \alpha \geq 0$. Пара функций $R(\alpha)$ и $s(\alpha)$, таким образом, определяет воздействие среды на диск при данных модельных предположениях.

1.3. Системы координат. Для описания положения тела в пространстве выберем декартовы координаты (x_0, y_0, z_0) точки D и три угла (θ, ψ, ϕ) , которые определяются подобно навигационным углам. Поворот от системы $Dx_0y_0z_0$ к системе $Dxyz$ представляет

ся в виде композиции трех поворотов. При этом вектора, имеющие некоторые координаты в базисе (e_x, e_y, e_z) , получают новые координаты в базисе $(e_{x_0}, e_{y_0}, e_{z_0})$. Такое преобразование будет задано в базисе (e_x, e_y, e_z) матрицей

$$T = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -\cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \\ \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \sin \psi \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \psi \sin \varphi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \psi \sin \varphi & \cos \theta \cos \psi \end{vmatrix}$$

и фазовое состояние системы характеризуется двенадцатью величинами: $(x_0^\bullet, y_0^\bullet, z_0^\bullet, \theta^\bullet, \psi^\bullet, \varphi^\bullet, x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$.

Сферические координаты (ν, α, β) конца вектора скорости точки D (при этом угол β отсчитывается от оси y в плоскости диска до прямой DN) и компоненты угловой скорости $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$ связаны с переменными $(x_0^\bullet, y_0^\bullet, z_0^\bullet, \theta^\bullet, \psi^\bullet, \varphi^\bullet, x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$ неинтегрируемыми соотношениями. Таким образом, фазовое состояние системы можно определять через функции $(\nu, \alpha, \beta, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$, а первые шесть величин рассматривать в качестве квазискоростей системы.

Кинетическая энергия тела и сила воздействия среды не зависят от положения тела в пространстве. Поэтому координаты $(x_0, y_0, z_0, \theta, \psi, \varphi)$ являются циклическими. Это приводит к понижению порядка динамической системы.

1.4. Полная система уравнений движения. В силу теорем о движении центра масс (в проекциях на связанные оси $Dxyz$) и об изменении кинетического момента относительно этих осей, получаем динамическую часть дифференциальных уравнений движения, рассматриваемую в шестимерном фазовом пространстве квазискоростей (σ – расстояние DC):

$$\begin{aligned} & \nu^\bullet \cos \alpha - \alpha^\bullet \nu \sin \alpha + \Omega_y \nu \sin \alpha \sin \beta - \Omega_z \nu \sin \alpha \cos \beta + \sigma(\Omega_y^2 + \Omega_z^2) = -s(\alpha) \nu^2 / m \\ & \nu^\bullet \sin \alpha \cos \beta + \alpha^\bullet \nu \cos \alpha \cos \beta - \beta^\bullet \nu \sin \alpha \sin \beta + \Omega_z \nu \cos \alpha - \\ & - \Omega_x \nu \sin \alpha \sin \beta - \sigma \Omega_x \Omega_y - \sigma \Omega_z^2 = 0 \\ & \nu^\bullet \sin \alpha \sin \beta + \alpha^\bullet \nu \cos \alpha \sin \beta + \beta^\bullet \nu \sin \alpha \cos \beta + \Omega_x \nu \sin \alpha \cos \beta - \\ & - \Omega_y \nu \cos \alpha - \sigma \Omega_x \Omega_z + \sigma \Omega_y^2 = 0 \\ & I_1 \Omega_x^\bullet = 0, \quad I_2 \Omega_y^\bullet + (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_z = -F(\alpha) \sin \beta \nu^2 \\ & I_2 \Omega_z^\bullet + (I_2 - I_1) \Omega_x \Omega_y = F(\alpha) \cos \beta \nu^2, \quad F(\alpha) = R(\alpha) s(\alpha) \end{aligned} \tag{1.1}$$

В дальнейшем для формальной интерпретации неподвижных точек системы (1.1), влияющих на классификацию многомерных фазовых портретов системы, полученной из (1.1), дополним ее следующими кинематическими соотношениями:

$$\begin{aligned} \theta^\bullet &= \frac{1}{\cos \psi} [\Omega_x \cos \varphi - \Omega_y \sin \varphi] \\ \psi^\bullet &= \Omega_x \sin \varphi + \Omega_y \cos \varphi, \quad \varphi^\bullet = \Omega_z + \frac{\sin \psi}{\cos \psi} [\Omega_y \sin \varphi - \Omega_x \cos \varphi] \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \cos \beta \\ v \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

Системы (1.1) и (1.2) вместе образуют полную систему для описания пространственного движения в среде твердого тела под действием силы сопротивления в условиях квазистационарности.

2. “Погружение” рассматриваемой задачи в более общий класс задач. Система (1.1) содержит функции $F(\alpha)$, $s(\alpha)$, явный вид которых, даже для такой простой формы, как диск, аналитически описать довольно затруднительно.

По этой причине (как и в [6, 7]) используется прием “погружения” данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $F(\alpha)$, $s(\alpha)$.

Опорным является результат С.А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного обтекания пластины бесконечной длины получил функции $R(\alpha)$, $s(\alpha)$ в аналитическом виде [5]:

$$R(\alpha) = R_0(\alpha) = A \sin \alpha \in \mathcal{R}, \quad A > 0 \quad (2.1)$$

$$s(\alpha) = s_0(\alpha) = B \cos \alpha \in \Sigma, \quad B > 0 \quad (2.2)$$

Этот результат помогает построить функциональные классы $\{R\}$, $\{s\}$, а затем и $\{F\}$.

2.1. Формальное описание классов функций воздействия среды. Сочетая (2.1), (2.2) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания, формально введем классы функций воздействия среды. Они состоят из функций достаточно гладких, 2π -периодических ($R(\alpha)$ – нечетная, а $s(\alpha)$ – четная), удовлетворяющих следующему условию: $R(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причем $R'(0) > 0$, $R'(\pi) < 0$ (класс функций $\{R\} = \mathcal{R}$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причем $s(0) > 0$, $s'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{s\} = \Sigma$). Как R так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом

$$R \in \mathcal{R} \quad (2.3)$$

$$s \in \Sigma \quad (2.4)$$

Из вышеперечисленных условий следует, что F – достаточно гладкая нечетная π -периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $F'(0) > 0$, $F'(\pi/2) < 0$ (класс функций $\{F\} = \Phi$). Таким образом

$$F \in \Phi \quad (2.5)$$

В частности, аналитическая функция [5]:

$$F = F_0(\alpha) = AB \sin \alpha \cos \alpha \in \Phi \quad (2.6)$$

является типичным представителем класса функций Φ .

2.2. Задача нелинейного анализа. В связи с отмеченной в [1] неустойчивостью прямолинейного поступательного торможения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды (в частности, автоколебания)?

Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли пара функций R и s воздействия среды такая, чтобы для некоторого решения динамической части уравне-

ний движения выполнялось бы ограничение $0 < \alpha(t) < \alpha^* < \pi/2$, начиная с некоторого момента времени $t = t_1$?

Как уже отмечалось, одной из целей данной работы является распространение результатов, имеющих в динамике плоскопараллельного движения тела, на случай движения пространственного, т.е. подтверждение следующего отрицательного ответа на вопрос о наличии ограниченных колебаний. При квазистационарном описании взаимодействия среды с осесимметричным телом, совершающим движение без собственного вращения, когда функции воздействия среды R и s (или F) зависят лишь от угла атаки, для любой допустимой пары функций $R(\alpha)$ и $s(\alpha)$ (или $F(\alpha)$) во всем диапазоне ($0 < \alpha < \pi/2$) конечных углов атаки в системе отсутствуют какие-либо колебательные решения конечной (ограниченной) амплитуды.

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности прямолинейного поступательного торможения, поскольку при некоторых углах атаки происходит замыв боковой поверхности, и настоящая модель воздействия среды на тело перестает быть достоверной. Но для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов атаки, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов. Далее, исходная система (1.1) является механической системой маятникового типа, обладающей интересными нелинейными свойствами. Это побуждает проводить полный нелинейный анализ. Тем самым, вторая часть данной работы представляет самостоятельный методический интерес.

3. Качественное исследование динамической части уравнений движения тела.

3.1. *Аналитический первый интеграл.* Как уже отмечалось, выбор фазовых переменных позволяет рассматривать систему динамических уравнений шестого порядка в качестве независимой. Более того, в силу (1.1) сохраняется компонента продольной составляющей угловой скорости:

$$\Omega_x = \Omega_{x0} = \text{const.} \quad (3.1)$$

Ниже ограничимся движением тела без собственного вращения, т.е. при $\Omega_{x0} = 0$.

3.2. *Динамические уравнения движения тела без собственного вращения.* Введем следующие обозначения: $z_1 = \Omega_2 \cos \beta + \Omega_1 \sin \beta$, $z_2 = \Omega_2 \cos \beta - \Omega_1 \sin \beta$, $z_i = Z_i v$ ($i = 1, 2$),

$\alpha^{\cdot} = \alpha^{\cdot} v$, $\beta^{\cdot} = \beta^{\cdot} v$, $v^{\cdot} = v^{\cdot} v$, $(\cdot) = d/dq$. Тогда система (1.1) в случае (3.1) при $\Omega_{x0} = 0$ можно преобразовать к следующему виду:

$$v^{\cdot} = v \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) \quad (3.2)$$

$$\alpha^{\cdot} = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \sin \alpha + \frac{\sigma}{I_2} F(\alpha) \cos \alpha + \frac{s(\alpha)}{m} \sin \alpha \quad (3.3)$$

$$Z_2^{\cdot} = \frac{1}{I_2} F(\alpha) - Z_2 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (3.4)$$

$$Z_1^{\cdot} = -Z_1 \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (3.5)$$

$$\beta^{\cdot} = Z_1 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2) \cos \alpha + \frac{\sigma}{I_2} F(\alpha) \sin \alpha - \frac{s(\alpha)}{m} \cos \alpha$$

Уравнения (3.2)–(3.5) образуют замкнутую подсистему четвертого порядка, а уравнения (3.3)–(3.5) – третьего.

В дальнейшем рассмотрим систему (3.3)–(3.5) при выполнении “опорных” условий (2.1), (2.2) (или (2.6)). При некоторых естественных условиях она отражает основные топологические свойства разбиения на траектории фазового пространства более общей системы (3.2)–(3.5) при условии (2.3), (2.4) (или (2.5)). Полученная таким образом “опорная” система (качественным анализом которой будем заниматься в первую очередь) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) \tag{3.6}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \sigma n_0^2 \sin\alpha \cos^2\alpha + \frac{B}{m} \sin\alpha \cos\alpha \tag{3.7}$$

$$Z_2' = n_0^2 \sin\alpha \cos\alpha - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{3.8}$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{3.9}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -\sigma(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \sigma n_0^2 \sin^2\alpha \cos\alpha - \frac{B}{m} \cos^2\alpha, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}$$

4. Некоторые частные решения. Нелинейный анализ начнем с выделения неподвижных точек рассматриваемых динамических систем.

От системы (3.2)–(3.5) отделилась подсистема третьего порядка (3.3)–(3.5), неподвижные точки которой могут являться проекциями неособых фазовых траекторий системы четвертого порядка (3.2)–(3.5).

Поэтому вопрос о неподвижных точках разбивается на два: для системы (3.2)–(3.5) в четырехмерном фазовом пространстве и для укороченной системы (3.3)–(3.5) в ее трехмерном фазовом пространстве. Как будет показано ниже, у нее существуют положения равновесия, которые заполняют даже одномерные многообразия.

У исходной системы (1.1) существуют частные решения следующего вида:

$$v(q) = \frac{v^0}{1 + v^0 \kappa t}, \quad v^0 = v(0), \quad \kappa > 0, \quad \alpha(t) \equiv \pi k, \quad k \in \{0, 1\},$$

$$\Omega_x \equiv \Omega_y(t) \equiv \Omega_z(t) \equiv 0, \quad \beta = \beta(t)$$

которые формально пропадают после ее приведения к нормальному виду. Такое преобразование приводит к эквивалентной системе, если доопределить систему (3.3)–(3.5) по непрерывности около точек (0, 0, 0) и (π , 0, 0), которые становятся ее неподвижными точками.

4.1. Тривиальные и нетривиальные неподвижные точки системы третьего порядка. После доопределения системы (3.3)–(3.5) на множестве $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3: 0 \leq \alpha \leq \pi, Z_1 \geq 0\}$ существуют следующие неподвижные точки (изолированные):

$$\alpha = \pi k, \quad k \in \{0, 1\}, \quad Z_1 = Z_2 = 0 \tag{4.1}$$

При $k = 0$ неподвижная точка (4.1) совпадает с началом координат и соответствует прямолинейному поступательному торможению.

Неподвижные точки системы (3.2)–(3.5) порождаются аналогичным образом соответствующими неподвижными точками системы (1.1), не приведенной к нормальному

виду. Система (4.1) задает точки, в которые из четырехмерного пространства в трехмерное ортогонально проектируются частные решения системы (3.2)–(3.5) следующего вида:

$$v(q) = v^0 e^{\frac{B}{m}q}, \quad v^0 = v(0), \quad \alpha(q) \equiv \pi k, \quad k \in \{0, 1\}, \quad Z_1(q) \equiv Z_2(q) \equiv 0$$

Кроме того, у системы (3.2)–(3.5) существуют неизолированные неподвижные точки, которые заполняют окружность, задаваемую уравнениями:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \left(Z_2 - \frac{1}{2\sigma} \right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2} \quad (4.2)$$

Система (4.2) задает в фазовом пространстве неподвижные точки, в которые проектируются целые многообразия неподвижных точек системы (3.2)–(3.5).

Неподвижные точки, заданные системой (4.2), не имеют физического смысла, поскольку около них построенная модель вырождается, так как при $\alpha = \pi/2$ сила воздействия среды формально обращается в нуль.

Однако именно эти точки позволяют получить классификацию счетного множества неэквивалентных глобальных фазовых портретов системы (3.3)–(3.5). Различия в типах таких портретов наблюдается как раз вблизи неподвижных точек, заданных системой (4.2). Поэтому уделим формальному изучению таких неподвижных точек необходимое внимание.

Ввиду простоты нахождения неподвижных точек (4.1), (4.2), а также в случае (4.1) явной механической интерпретации стационарных движений, соответствующим этим точкам, будем называть их тривиальными неподвижными точками (ТНТ).

Определение 1. Нетривиальными неподвижными точками (ННТ) системы (3.3)–(3.5) будем называть неподвижные точки, не лежащие на плоскостях $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_2 \sin \alpha \cos \alpha = 0\}$.

Примечание. Дадим формальную интерпретацию ННТ “опорной” системы (3.7)–(3.9), взятой для простоты выкладок.

Плоскость $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ является интегральной для данной системы. Портрет, лежащий на этой плоскости, – фазовый портрет системы (она получится в случае $Z_1 \equiv 0$) из динамики плоскопараллельного движения тела [6, 7]. ННТ находятся в явном виде из следующей системы:

$$Z_2 = \frac{\sigma n_0^2}{2} \sin \alpha, \quad Z_1^2 = n_0^2 \left[1 - \frac{\sigma^2 n_0^2}{4} \right] \sin^2 \alpha, \quad \sigma n_0 < 2, \quad \cos \alpha = -\frac{\sigma n_0^2 m}{2B}$$

При $\sigma n_0 > 2$ ННТ лежат на интегральной плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ [9] и соответствуют динамике плоскопараллельного движения.

Таким образом, у системы (1.1) при условиях (2.1), (2.2) и $\Omega_{x0} \equiv 0$ существуют частные решения вида

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 \kappa t}, \quad v_0 = v(0), \quad \kappa > 0$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha_0 \neq \pi k, \quad k \in \{0, 1\}, \quad \alpha_0 = \alpha(0); \quad \beta(t) = \beta_0 + \frac{\beta_0}{v_0 \kappa} \ln(1 + v_0 \kappa t), \quad \beta_0 = \beta(0)$$

$$\Omega_y(t) = \frac{1}{1 + v_0 \kappa t} [\Omega_{y0} \cos \beta(t) - \Omega_{z0} \sin \beta(t)]$$

$$\Omega_z(t) = \frac{1}{1 + v_0 \kappa t} [\Omega_{y0} \sin \beta(t) + \Omega_{z0} \cos \beta(t)]$$

4.2. *Неизолированные неподвижные точки системы четвертого порядка.* Такие точки системы (3.2)–(3.5) будут заданы следующими соотношениями с положительным параметром v_1 :

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \left(Z_2 - \frac{1}{2\sigma} \right)^2 + Z_1^2 = \frac{1}{4\sigma^2}, \quad v = v_1 \quad (4.3)$$

Система (4.3) задает в четырехмерном фазовом пространстве системы (3.2)–(3.5) одномерное многообразие (окружность), сплошь заполненное неподвижными точками.

4.3. *Интерпретация неподвижных точек четырехмерного фазового пространства.* Неподвижные точки системы (3.6)–(3.9) (впрочем как и (3.2)–(3.5)) играют важную роль в классификации глобальных фазовых портретов системы (3.7)–(3.9), ((3.2)–(3.5)). Поэтому проведем их формальную интерпретацию.

В соответствии с (4.3) рассмотрим частное решение системы (3.2)–(3.5) $\alpha = \pi/2, v = v_0, \Omega_y = \Omega_{y0}, \Omega_z = \Omega_{z0}$.

Кинематические соотношения

$$\dot{\theta} = -\frac{\Omega_{y0}}{\cos \psi} \sin \varphi, \quad \dot{\psi} = \Omega_{y0} \cos \varphi, \quad \dot{\varphi} = \Omega_{z0} + \frac{\Omega_{y0}}{\cos \psi} \sin \varphi \sin \psi \quad (4.4)$$

полученные из (1.2), допускают отделение независимой подсистемы второго порядка (в виде двух последних уравнений), которая обладает аналитическим первым интегралом.

Предложение 1. Система (4.4) обладает первым интегралом вида

$$\Omega_{y0} \sin \varphi \cos \psi - \Omega_{z0} \sin \psi = C_1 = \text{const} \quad (4.5)$$

который означает, что сохраняется проекция на ось Ox_0 абсолютной угловой скорости твердого тела.

В силу предложения 1 и двух последних уравнений из (4.4), которые образуют независимую систему второго порядка, угол ψ найдется из равенства

$$\sin \psi = \pm \frac{\Omega_{y0} \sqrt{(\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2) - C_1^2}}{\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2} \sin \left\{ \sqrt{\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2} (t + C_2) \right\} - \frac{C_1 \Omega_{z0}}{\Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2}, \quad C_2 = \text{const} \quad (4.6)$$

Тождества (4.4)–(4.5) позволяют определить зависимость угла φ (а затем и θ) от времени через конечную комбинацию элементарных функций.

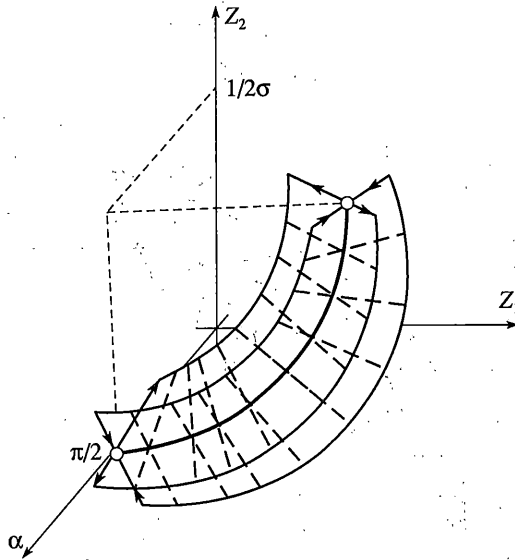
В силу (1.2) на исследуемых фазовых траекториях выполнено равенство

$$\dot{x}_0 = -v_0 \cos \psi \sin \varphi = \frac{v_0}{\Omega_{y0}} [-C_1 - \Omega_{z0} \sin \psi]$$

а, в силу (4.6):

$$\dot{x}_0 = \frac{v_0}{\Omega_{y0}} [A_1 \mp A_2 \sin(A_3 t + A_4)], \quad A_k = A_k(\Omega_{y0}, \Omega_{z0}, C_1, C_2) \quad (k = 1, 2)$$

Таким образом, при $C_1 = 0$ (случай плоскопараллельного движения, где $\Omega_{z0} = 1/\sigma, \alpha = \pi/2$) координата x_0 периодически меняется со временем. Аналогично определяются y_0 и z_0 .



Фиг. 2

5. Симметрии фазового пространства модельной динамической системы и начало топологического анализа. 5.1. *Топологическая классификация неподвижных точек системы.* Введем два безразмерных параметра: $\mu_1 = 2B/(m\pi_0)$, $\mu_2 = \sigma\pi_0$. Будем рассматривать систему (3.7)–(3.9) при $\sigma\pi_0 < 2$.

Предложение 2. (1). Неизолированные неподвижные точки, заполняющие окружность (4.2) при $Z_2 < 1/2\sigma$, в каждой перпендикулярной к ней площадке являются седлами (фиг. 2), а при $Z_2 = 1/2\sigma$ – являются притягивающими.

(2). Изолированная неподвижная точка (4.1) при $k = 0$ является отталкивающей (фиг. 3).

(3). Изолированная неподвижная точка (4.1) при $k = 1$ является: отталкивающей, если $\mu_2 < \mu_1$ и притягивающей, если $\mu_2 > \mu_1$.

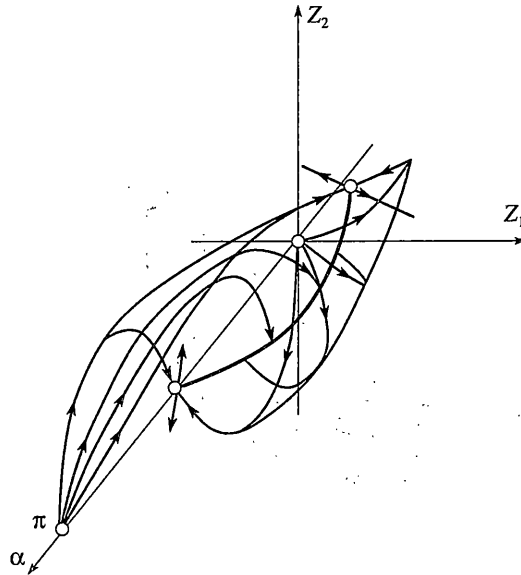
5.2. Симметрии фазового пространства. В силу отделения от системы четвертого порядка независимой подсистемы третьего порядка, фазовые траектории системы (3.2)–(3.5) в четырехмерном фазовом пространстве лежат на поверхностях, являющихся трехмерными цилиндрами. В частности, если существует во всем фазовом пространстве полный набор первых интегралов системы (3.2)–(3.5), то один из них является функцией переменных (α, Z_1, Z_2) , а поэтому задает семейство цилиндров в $R_+^1\{v\} \times R^3(\alpha, Z_1, Z_2)$.

Фазовый портрет системы (3.2)–(3.5) в четырехмерном фазовом пространстве удобнее строить с помощью фазового портрета системы (3.3)–(3.5) в трехмерном фазовом пространстве.

Исследуемое векторное поле геометрически устроено так, что становится возможным “поднятие” фазовых траекторий из трехмерного в четырехмерное фазовое пространство.

Поскольку $v > 0$, то движение возможно лишь в области $W = \{(\alpha, Z_1, Z_2, v) \in R^4 : v > 0\}$.

Если формально сделать замену переменных в области W по формуле $p = \ln v$, то полученное векторное поле в четырехмерном пространстве $R^4\{\alpha, Z_1, Z_2, p\}$ не зависит от p и однозначно ортогонально проектируется на все семейство плоскостей $\{(\alpha, Z_1, Z_2, p) \in R^4 : p = \text{const}\}$. При этом неподвижные точки системы (3.3)–(3.5) в пространстве



Фиг. 3

$R^3\{\alpha, Z_1, Z_2\}$ по-прежнему совпадают с объединением или проекций многообразий особых точек, или проекций неособых фазовых траекторий области W .

Для любых $F \in \Phi, s \in \Sigma$ векторное поле системы (3.3)–(3.5) обладает свойством центральной симметрии относительно точек $(\pi k, 0, 0), k \in \{0, 1\}$, т.е. в координатах (α, Z_1, Z_2) векторное поле меняет направление при замене

$$\begin{pmatrix} \pi k + \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi k - \alpha \\ -Z_1, -Z_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \{0, 1\}$$

Как уже отмечалось, плоскость $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ является интегральной, а векторное поле системы обладает следующей симметрией: его α - и Z_2 -составляющие сохраняются, а Z_1 -составляющая меняет знак при замене

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1, Z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1, Z_2 \end{pmatrix}, \quad k \in \{0, 1\}$$

Для дальнейшего анализа введем определения семейства трехмерных слоев

$$\Pi_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : \alpha_1 < \alpha < \alpha_2\}, \quad \Pi_{(-\pi/2, \pi/2)} = \Pi, \quad \Pi_{(\pi/2, 3\pi/2)} = \Pi'$$

Заметим, что фактическим фазовым пространством системы (3.3)–(3.5) является множество $\Pi_{(0, \pi)} \cap \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 > 0\}$.

6. Классификация фазовых портретов системы в трехмерном пространстве для некоторой области параметров. 6.1. *Введение в классификацию фазовых портретов.* Изучим те динамические системы вида (3.3)–(3.5), при которых ННТ существуют лишь вне интегральной плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$ (т.е. выполнено условие $\sigma n_0 < 2$).

Далее, в общем пространстве физических параметров системы (3.3)–(3.5) $\{(\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \mu_1 > 0, \mu_2 > 0\}$ в основном будем изучать лишь область

$$\left\{ (\mu_1, \mu_2) \in R^2 : \frac{s(\alpha)}{m \cos \alpha} \geq \frac{\sigma F(\alpha)}{I_2 \sin \alpha}, \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \sigma n_0 < 2 \right\} \quad (6.1)$$

При этом выполнены условия (2.3)–(2.5) (или, в частности, (2.1), (2.2)).

Типичная топологическая классификация ТНТ была приведена выше. Для проведения полной классификации фазовых портретов приведем ряд утверждений, решающих многие актуальные вопросы качественного характера.

Используя методы многомерных топографических систем Пуанкаре и систем сравнения [10] можно доказать следующие предложения.

Предложение 3. Все фазовые траектории, начинающиеся в слое $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : 0 < \alpha < \pi/2\}$, либо за конечное время покидают этот слой, либо стремятся к седловидным неизолированным неподвижным точкам, лежащим на окружности (4.2) (см. также предложение 2).

Предложение 4. У системы (3.3)–(3.5) траектории, уходящие на бесконечность, существуют лишь на интегральной плоскости $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 = 0\}$; α - и ω -предельными им множествами являются бесконечно удаленные точки $(+0, 0, +\infty)$ и $(\pi - 0, 0, +\infty)$ на данной плоскости.

Задача отыскания периодических траекторий в фазовом пространстве, стягиваемых по слою $\Pi_{(0, \pi)} = \{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : 0 < \alpha < \pi\}$ в точку, в общей постановке достаточно сложна, однако в области рассматриваемых параметров справедливо утверждение.

Предложение 5. У систем вида (3.3)–(3.5) в области параметров (6.1) не существует замкнутых характеристик, т.е. замкнутых кривых, составленных из траекторий векторно-поля системы (3.3)–(3.5).

Основным вопросом классификации (трехмерных) портретов является вопрос о поведении устойчивых и неустойчивых сепаратрис имеющихся (в данном случае неизолированных) седел.

Предложение 6. (1). Устойчивые сепаратрисы в слое Π для точек (4.2) при $Z_2 < 1/2\sigma$ имеют в качестве α -предельных множеств начало координат (фиг. 3).

(2). В области параметров (6.1) сепаратрисы, входящие в точки (4.2) при $Z_2 < 1/2\sigma$ в слое Π , имеют в качестве α -предельного множества точку $(\pi, 0, 0)$ (фиг. 3).

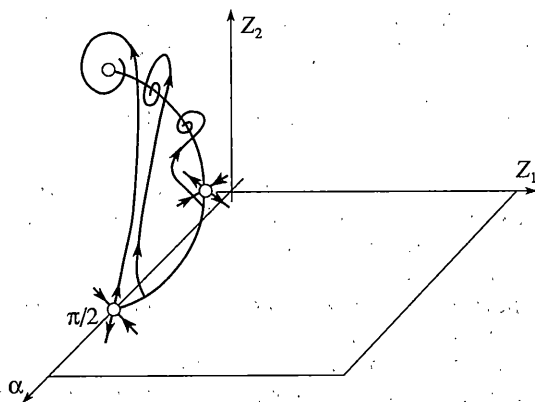
6.2. Индекс сепаратрисного поведения и основная теорема классификации. Рассмотрим вопрос о поведении сепаратрис, выходящих из точек (4.2) при $Z_2 < 1/2\sigma$. Для этого дадим (аналогично [6–8]) определение индексу сепаратрисного поведения (ИСП) для данной системы.

Определение 2. ИСП (будем обозначать его isp) называется число $I \in N_0$. По определению $isp = 1$, если существуют сепаратрисы, выходящие из точек (4.2) при $Z_2 < 1/2\sigma$ в слой Π , которые имеют в качестве ω -предельного множества точки (4.2) при $Z_2 > 1/2\sigma$ ($I \in N_0$). При этом сепаратрисы охватывают окружность (4.2) и уходят в область $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_2 < 0\}$ I раз. При этом таких сепаратрис, охватывающих окружность (4.2) и уходящих в область $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_2 < 0\}$ $(I + 1)$ раз, не существует.

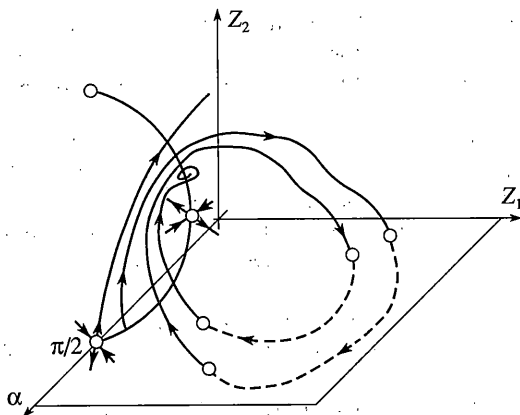
Теорема классификации². Для любого isp из области определения существует точка из пространства параметров (6.1) системы (3.3)–(3.5), для которой в фазовом пространстве системы реализуется поведение рассматриваемых сепаратрис в соответствии с определением 2, которое, таким образом, корректно.

Теорема доказывается методами многомерной теории мотононных векторных полей [10]. Монотонность понимается относительно параметра $\mu^* = 2s^*/(mn_0)$, где

² Шамолин М.В. Методы анализа классов неконсервативных систем в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой. Докторская диссертация. М.: МГУ, 2004. – 329 с.



Фиг. 4



Фиг. 5

$s^* = \max_{\alpha \in R} |s(\alpha)|$ (ср. также с аналогичными результатами из динамики плоскопараллельного движения [6–8]).

6.3. Классификация некоторого множества трехмерных фазовых портретов. В силу основной теоремы, можно провести полную классификацию фазовых портретов системы (3.3)–(3.5), когда ее параметры пробегают область (6.1). Таких неэквивалентных портретов существует счетное множество.

Для проведения полной классификации портретов остается исследовать сепаратрисы, выходящие из точек (4.2) при $Z_2 < 1/2\sigma$ в слой Π . Такие сепаратрисы могут иметь предельное множество – ННТ, которое в полупространстве $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : Z_1 > 0\}$ имеет седловой тип с одним притягивающим собственным направлением и двумя отталкивающими. Одна устойчивая ветвь (данного ННТ) имеет в качестве α – предельного множества точку $(\pi, 0, 0)$. Неустойчивые же направления, на которые “натягивается” целая плоскость, имеют в качестве предельных множеств притягивающие точки (4.2) при $Z_2 > 1/2\sigma$, а также бесконечно удаленную точку (см. предложение 4).

Типы трехмерных фазовых портретов “кодирует” индекс isp , который “отвечает” за сепаратрисные поверхности “вдали” от НПП.

6.4. Примеры трехмерных фазовых портретов. На фиг. 4, 5 изображены некоторые фрагменты фазовых портретов системы (3.3)–(3.5), которые являются неэквивалентными (фиг. 4: $isp = 0$; фиг. 5: $isp = 2$).

7. Заключение. При квазистационарном описании взаимодействия среды с телом, когда функции воздействия среды R и s зависят лишь от угла атаки (т.е. при простейшем предположении), для любой допустимой пары функций $R(\alpha)$ и $s(\alpha)$ воздействия среды прямолинейное поступательное движение неустойчиво. Опираясь на предложение 3, дающее ответ на вопрос о поведении траекторий в слое $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : 0 < \alpha < \pi/2\}$, можно сделать вывод: почти все траектории редуцированного трехмерного фазового пространства, лежащие в области $\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in R^3 : 0 < \alpha < \pi/2, Z_1 > 0\}$, за конечное время покидают данную область. В частности, не существует простых и сложных предельных циклов в этой области.

Автор выражает благодарность В.А. Самсонову за множество ценных замечаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента Российской Федерации для молодых докторов наук (МД-2311.2005.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-08-01378-а и 05-01-00401-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерошин В.А., Самсонов В.А., Шамолин М.В.* Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. МЖТ. 1995. № 3. С. 23–27.
2. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды. М.: Наука, 1976. 495 с.
3. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 322 с.
4. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.* Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
5. *Чаплыгин С.А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1933. С. 133–135.
6. *Шамолин М.В.* Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1996. № 4. С. 57–69.
7. *Шамолин М.В.* Новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 5. С. 611–614.
8. *Шамолин М.В.* Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.
9. *Шамолин М.В.* Некоторые классы частных решений в динамике твердого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 2. С. 178–189.
10. *Шамолин М.В.* Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. Вып. 3. С. 177–178.

Москва

Поступила в редакцию
29.06.2002