МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2006

УДК 531.3/629.7.05

© 2006 г. С.Е. ПЕРЕЛЯЕВ

О ГЛОБАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯХ ГРУППЫ ТРЕХМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ

Описаны и охарактеризованы основные методы введения глобальной взаимнооднозначной параметризации пространства вращений твердого тела (с математической точки зрения методы вложения группы *SO* (3) в R^n). Кроме широко известных методов девятимерной (с помощью матрицы направляющих косинусов) и шестимерной (с помощью двух столбцов этой матрицы) параметризаций, приводится и анализируется модифицированная шестимерная параметризация, которая необходима для описания мало известной пятимерной параметризации Хопфа. Проводится сравнительный анализ методов глобальной взаимно однозначной параметризации группы *SO* (3).

1. Введение. Задача задания ориентации твердого тела в пространстве (проблема параметризации группы *SO* (3)) была поставлена и решена Эйлером и с тех пор постоянно привлекает к себе внимание исследователей. Это связано с возрастанием интереса к динамике вращательных движений твердого тела, и проникновением в прикладные задачи механики новых методов геометро-топологического характера.

Обстоятельное изложение современного состояния проблемы и обширную библиографию можно найти в [1, 2]. Анализ этих публикаций приводит к выводу о некоторых затруднениях прямого использования предлагаемых методов, а в отдельных случаях даже невозможности их применения в конкретных задачах прикладной математики и механики.

Ниже описаны практически все известные глобальные взаимно однозначные параметризации пространства *SO* (3) конфигураций твердого тела и приведены ссылки на его четырехпараметрические представления, которые не являются взаимно однозначными (группа единичных кватернионов отображается в *SO* (3) однозначно, но не взаимно однозначно). Анализ проблемы можно найти, например, в [3, 4]. Принципиальная невозможность взаимно однозначной параметризации группы *SO* (3) с помощью любых четырех параметров впервые была доказана Г. Хопфом [5]. Доказательство основано на свойствах кольца гомологий проективного трехмерного пространства ($\mathbf{RP}^3$) и приводится в [5].

Для рассматриваемой группы *SO* (3) в пространстве $\mathbf{R}^3$ минимальное число параметров три, а максимальное число реально используемых параметров равно девяти [1–3, 6, 7]. Кроме этого существует определенное число наиболее известных трех и четырехмерных параметров ориентации (расположения) [1, 2, 8–11].

Учитывая большое число разновидностей всех известных параметров [8–12] и их модификаций (всего более восемнадцати) [11–16], для анализа методов глобальной взаимно однозначной параметризации группы *SO* (3) используются элементы математического аппарата топологии многообразий [15, 17].

Данное исследование дает стройное изложение теории параметризации группы *SO* (3) [18] и показывает, какие методы параметризации позволяют решать проблемы глобального взаимно однозначного и локального определения ориентации тела в пространстве $\mathbf{R}^3$ применительно к конкретным задачам механики [3].

Основное применение такая параметризация находит при интегрировании кинематических дифференциальных уравнений произвольного движения твердого тела относительно неподвижной точки.

1.1. Предварительные замечания, объект исследования. Рассмотрим часто встречающуюся в кинематике твердого тела задачу о вращении несвободного твердого тела вокруг неподвижной точки. Такой объект занимает множество положений в трехмерном векторном пространстве $\mathbf{R}^3$.

Для задания ориентации твердого тела относительно неподвижной точки введем два правых ортонормированных репера с общим началом: фиксированный в пространстве $\mathbf{R}^3$ репер – неподвижный триэдр и репер, связанный с данным телом – подвижный триэдр. При движении тела вокруг неподвижной точки происходит поворот подвижного триэдра относительно неподвижного. Поворот твердого тела математически может быть задан как линейное отображение $\mathbf{R}^3$ в себя, при котором расстояния между произвольными точками неизменны [3].

Как известно, положение подвижного триэдра в системе координат, определяемой неподвижным триэдром, задается матрицей $\mathbf{A} = \|\alpha_{ik}\|$ $(i, k = 1, 2, 3)$, столбцы которой – координаты ортов подвижного репера. Матрица $\mathbf{A}$, задающая переход от одного репера к другому, удовлетворяет условию ортогональности

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E} \quad \text{или} \quad \sum \alpha_{ij}\alpha_{kj} = \sum \alpha_{ji}\alpha_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \tag{1.1}$$

Множество трехмерных ортогональных матриц образует группу, которая эквивалентна группе вращений – отражений [1, 2, 14] твердого тела. Она называется трехмерной ортогональной группой и обозначается символом $O\,(3)$. Для любой матрицы $\mathbf{A}$ из этой группы $\det\mathbf{A} = \pm 1$. Подгруппа $O\,(3)$, состоящая из матриц $\mathbf{A}$, для которых $\det\mathbf{A} = 1$, соответствует отображениям, сохраняющим ориентацию (правый репер остается правым). Такие отображения реализуются поворотами (вращениями) твердого тела. Эта подгруппа называется группой собственных вращений (специальной ортогональной группой) и обозначается символом $SO\,(3)$.

Множество элементов группы образует топологическое пространство – трехмерное многообразие, которое также обозначается $SO\,(3)$.

Матрицу $\mathbf{A}$ можно рассматривать и как оператор линейного преобразования, соответствующего повороту тела из начального положения, определяемого неподвижным триэдром, в текущее его положение, заданное подвижным триэдром. Здесь множество положений рассматриваемого тела эквивалентно множеству его поворотов, и они образуют конфигурационное пространство твердого тела с одной неподвижной точкой. Пространство конфигураций твердого тела с неподвижной точкой – трехмерное вещественное проективное пространство $\mathbf{RP}^3$.

Одновременно пространство $\mathbf{RP}^3$ – трехмерное замкнутое многообразие и можно показать, что многообразие $SO\,(3)$ гомеоморфно пространству $\mathbf{RP}^3$.

При отождествлении всех положений тела с операторами поворотов вокруг этой точки пространство конфигураций приобретает структуру группы $SO\,(3)$ и превращается в группу Ли [15]. Из сказанного следует, что существует взаимнооднозначное соответствие между этим пространством и пространством угловых положений тела. Но так как пространство $SO\,(3)$ – конфигурационное многообразие тела с одной неподвижной точкой, то многообразие поворотов твердого тела ($SO\,(3)$) можно использовать для описания множества его положений (различных ориентаций) в пространстве $\mathbf{R}^3$. Поэтому группа $SO\,(3)$ является основной математической моделью множества поворотов твердого тела.

2. Глобальная и взаимно однозначная параметризация группы трехмерных вращений. Для постановки задачи и ее решения применим элементы современного аппарата топологии многообразий [17] и проведем анализ методов математического описания вращений в трехмерном векторном пространстве $\mathbf{R}^3$.

Сделаем несколько предварительных замечаний. В пространстве $\mathbf{R}^3$ понятие многообразия, как обобщение понятия поверхности, охватывает целый ряд геометрических объектов. Различные примеры многообразий вполне естественным образом возникают в разных задачах современной математики. Понятие многообразия используют и в прикладных естественных науках для описания множества положений (конфигурационного пространства) свободного и несвободного твердого тела (механической системы).

Под заданием ориентации твердого тела (отметим, что иной смысл имеет математический термин ориентация пространства) понимают использование линейных координат $x_1, \ldots, x_n$ n-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$ для задания соответствующей точки пространства $\mathbf{RP}^3$, определяющей ориентацию объекта.

Известно, что параметризацией механической системы с конечным числом степеней свободы называют введение конечного числа параметров, задание которых однозначно определяет положение тела в пространстве. Возьмем в качестве таких параметров ориентации координаты n-мерного векторного пространства $\mathbf{R}^n$, в которое погружено конфигурационное многообразие твердого тела.

Для описания и анализа n-мерной параметризации введем n-мерный вектор параметров $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$. Повороты твердого тела в пространстве $\mathbf{R}^n$ обычно задаются матрицей преобразования $\mathbf{X}_n$, размерности $n \times n$. Заметим, что в случае трехмерного ($n = 3$) векторного пространства имеем следующую ортогональную матрицу параметров:

$$\mathbf{X} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{Vmatrix} \qquad (2.1)$$

где $x_i (i = 1, \ldots, 9)$ – параметры ориентации твердого тела.

В общем случае столбцы матрицы $\mathbf{X}$, представляют собой координаты образов ориентированных ортогональных реперов. Множество таких реперов можно отождествить с группой вращений твердого тела SO (3). Поэтому каждая матрица $\mathbf{X} \in SO$ (3) представляет вращение базисного репера в векторном пространстве $\mathbf{R}^3$ и, как было отмечено выше, это пространство совпадает с пространством SO (3).

Исследуем группу SO (3) вращений трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$. Одна из важнейших топологических характеристик группы заключается в понятии односвязности группы [3]. Специфическим свойством группы SO (3) является то, что все кривые в ней могут быть непрерывным образом стянуты в точку. Рассматриваемая здесь группа SO (3) неодносвязна, так как все замкнутые кривые в ней разбиваются на два класса: первые – стягиваемые непрерывной деформацией в точку и вторые – стягиваемые к кривой, соответствующей повороту твердого тела на угол 2π вокруг фиксированной оси. Доказательство этого факта можно найти, например, в [3, 4].

Здесь удобно дать следующую интерпретацию конфигурационного многообразия положений твердого тела. Всякий его поворот определяется некой осью l и правовинтовым вращением на плоский угол Θ, который может быть представлен вектором длины Θ в направлении оси l [3, 4, 6–8, 17]. Поскольку можно рассматривать только интервал $0 \le \Theta \le \pi$, всякая точка многообразия SO (3) соответствует точке замкнутого шара $\bar{B}^3$ радиусом равным π.

Между множеством положений твердого тела и точками шара $\bar{B}^3$ взаимнооднозначного соответствия нет, так как поворот относительно положительного направления оси l на угол π представляет собой то же самое, что и поворот относительно отрицательного направления оси l на тот же угол π.

Поэтому на поверхности шара $\bar{B}^3$ (двумерной сфере S^2) пары диаметрально противоположных точек изображают одно и то же вращение из группы SO (3). Отождествив диаметрально противоположные точки поверхности $\bar{B}^3$, получим пространство $\bar{B}^*$, представляющее повороты непрерывным образом и находящееся со всеми поворотами тела во взаимно однозначном (1–1) соответствии [3, 4].

Рассмотрим непрерывный поворот тела в пространстве $\mathbf{R}^3$, приводящий этот объект к его исходной ориентации. Такой поворот соответствует замкнутому контуру в многообразии SO (3), который, как уже отмечалось выше, может, относится к двум классам – первому либо второму [3, 4]. Очевидно, что в случае простого вращения на угол 2π получим контур второго класса, тогда как вращение на угол 4π дает контур первого класса. Поэтому, при учете полного движения тела (а не только его начальной и конечной ориентации) в пространстве $\mathbf{R}^3$, вращение на 2π нельзя непрерывным образом деформировать в тривиальное движение, отвечающее отсутствию вращения, тогда как вращение на угол 4π – можно.

Из простых топологических соображений следует, что невозможно иметь глобальную (соответствующую любой точке замкнутого шара радиуса π) трехмерную параметризацию группы вращений SO (3) без наличия сингулярностей [3, 4, 15, 17, 18], так как SO (3) не гомеоморфно $\mathbf{R}^3$. Кроме того, пространство SO (3) компактно, а векторное пространство $\mathbf{R}^3$ нет. Невозможность отображения SO (3) в $\mathbf{R}^3$ без сингулярностей закрывает вопрос о поиске каких-либо трех новых параметров для параметризации группы SO (3), которые бы не вырождались.

В курсах современной топологии доказывается теорема, что всякое n-мерное ($n \geq 1$) замкнутое топологическое многообразие SO (3) в пространство $\mathbf{R}^n$ не вкладывается и не погружается. Например, многообразие SO (3) не вкладывается в $\mathbf{R}^3$.

Также не существует глобальная взаимно однозначная четырехмерная параметризация, так как невозможно такое вложение SO (3) в $\mathbf{R}^4$ [5, 15, 17, 18]. Первым этот важный фундаментальный результат получил в 1940 году известный швейцарский математик-тополог Г. Хопф [5], который в этой же работе показал, что многообразие SO (3) допускает вложение в пятимерное пространство $\mathbf{R}^5$.

Под проблемой глобального и взаимно однозначного определения ориентации твердого тела будем понимать задачу глобальной взаимно однозначной параметризации группы SO (3) с помощью конечного числа n ($n \leq 9$) переменных (параметров) минимальной размерности, без особенностей и многозначностей.

Чтобы найти глобальную и взаимно однозначную параметризацию группы вращений SO (3) с помощью n параметров, необходимо вложить пространство конфигураций тела SO (3) в пространство n измерений ($\mathbf{R}^n$).

2.1 Метод девятимерной параметризации. Наиболее известным примером метода девятимерной параметризации являются девять направляющих косинусов. Для описания и анализа классической девятимерной параметризации введем девятимерный вектор параметров $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9)^T$. Фиксируем какой-либо базис пространства $\mathbf{R}^3$ и рассмотрим соответствующее вложение группы SO (3) в девятимерное векторное пространство $\mathbf{R}^9$, с которым отождествим полугруппу линейных операторов. Композиции этих операторов соответствует произведение их матриц, операции обращения оператора – переход к обратной матрице.

С математической точки зрения указанной выше операции соответствует вложение, определяющего ориентацию тела сомножителя $\mathbf{RP}^3$, пространства конфигураций свободного тела $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{RP}^3$ в $\mathbf{R}^9$ – арифметическое пространство $\mathbb{R}^9$ всех ортогональных (3×3)-матриц $\mathbf{A} \equiv \mathbf{X}$. Таким образом, сопоставляя положению твердого тела матрицу $\mathbf{A}$ оператора преобразования координат, получим вложение, определяющего ориентацию твердого тела пространства $\mathbf{RP}^3 \equiv SO\,(3)$ в арифметическое пространство $\mathbb{R}^9 = \{\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}\}$ указанных выше матриц [15].

Поскольку матрица $\mathbf{A} \equiv \mathbf{X}$ ортогональная, то для ее элементов можно составить шесть независимых тождеств связи [6, 10, 15, 17], которые учитывают ортогональность осей в триэдре

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = 0\\
&\sum_{j=4}^{6} x_j^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1, \quad x_1x_7 + x_2x_8 + x_3x_9 = 0\\
&\sum_{k=7}^{9} x_k^2 = x_7^2 + x_8^2 + x_9^2 = 1, \quad x_4x_7 + x_5x_8 + x_6x_9 = 0
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Уравнения (2.2) – геометрическое представление конфигурационного многообразия положений тела с одной неподвижной точкой (группа $SO\,(3)$). Поэтому для метода девятимерной параметризации многообразие $SO\,(3) \equiv \mathbf{RP}^3$ гометрически может быть представлено пересечением шести гиперповерхностей в пространстве $\mathbf{R}^9$. Здесь три левые уравнения задают поверхности трех "сферических цилиндров", а три правые уравнения задают поверхности трех "конических цилиндров". Взаимное пересечение этих гиперповерхностей – геометрическое представление конфигурационного многообразия всех положений вращающегося твердого тела с одной неподвижной (закрепленной) точкой.

Достоинство такого метода параметризации – глобальность ориентации, симметричность (все координаты x_i равноправны) и возможность использования удобного формализованного аппарата матричного исчисления. Однако в ряде случаев этот метод параметризации не удобен, так как в нем число параметров ориентации равно девяти, а независимых среди них только три. Кроме того, следует помнить, что непосредственно пользуясь девятью направляющими косинусами как обобщенными координатами (параметрами), нельзя получить лагранжиан [6] и составить с его помощью уравнения движения [3]. Для этой цели используют не сами косинусы, а некоторую систему трех независимых функций этих косинусов, например углов Эйлера.

Таким образом, проблема глобального взаимно однозначного отображения группы $SO\,(3)$ в пространство $\mathbf{R}^9$ полностью решается с помощью девяти параметров – направляющих косинусов углов между базисными векторами. Математически строго это может быть доказано методом вложения $SO\,(3)$ в $\mathbf{R}^9$.

Для целого ряда задач аналитической механики важно знать кинематические соотношения, связывающие параметры ориентации и их производные по времени с угловой скоростью тела. В случаях, когда задана зависимость угловой скорости от времени, то кинематические соотношения преобразуются в дифференциальные уравнения относительно параметров ориентации. Интегрирование этих дифференциальных уравнений позволят найти вращательное движение тела, которое соответствует заданной зависимости угловой скорости объекта от времени.

Для метода девятимерной параметризации имеем девять скалярных кинематических уравнений Пуассона. Число скалярных уравнений соответствует числу направляющих косинусов $(\alpha_{ij} \equiv x_j)$, составляющих ортогональную матрицу $\mathbf{X}$.

Матричная форма записи таких уравнений имеет следующее представление:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Omega}(t)\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{\Omega}(t) = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_z(t) & -\omega_y(t) \\ -\omega_z(t) & 0 & \omega_x(t) \\ \omega_y(t) & -\omega_x(t) & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{\Omega}$ – кососимметрическая (3×3)-матрица угловых скоростей твердого тела. Для такой матрицы выполняется известное условие $\mathbf{\Omega}^T = \mathbf{\Omega}$.

В трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ матрице $\mathbf{\Omega}$ соответствует вектор угловой скорости $\omega = (\omega_X, \omega_Y, \omega_Z)^T$ подвижного триэдра, заданный проекциями на собственные оси. Модуль вектора $|\omega(t)|$ – мгновенная скорость вращения, переменная t – время. В последующих соотношениях параметр t в целях упрощения опускается из записи.

В кинематическом дифференциальном уравнении (2.3) матрица $\mathbf{X} \in SO(3) \subset R^9$ и все ее элементы x_i $(i = 1, \ldots, 9)$ соответствуют выражению (2.1). Отметим, что (2.3) получено с помощью известного векторно-матричного соотношения и отражает пассивную точку зрения на сложение поворотов твердого тела [3, 10, 13].

Действительно, можно показать, что если $\mathbf{W}$ – кососимметрический линейный (3×3)-оператор в пространстве $\mathbf{R}^3$, который в ортонормированном координатном базисе i, j, k (xyz) представляется кососимметрической матрицей $\hat{\mathbf{W}}$ размерности (3×3) известного вида [6], то для вектора $x \in \mathbf{R}^3$ справедливо известное матрично-векторное тождество: $\mathbf{Wx} = x \times w$, где $w = w_x i + w_y j + w_z k$ – вектор, $\mathbf{x}$ – матрица-столбец (3×1).

Данное тождество позволяет вывести дифференциальные уравнения вида (2.3).

Система (2.3) кинематических уравнений Пуассона – линейная, не имеет особых точек (сингулярностей) и полностью решает поставленную выше задачу глобального и взаимно однозначного определения ориентации твердого тела при его произвольном движении вокруг неподвижной точки.

Можно сделать следующие выводы по методу девятимерной параметризации:

1). Девятимерная параметризация является наиболее простым, известным и наглядным способом глобального и взаимно однозначного определения ориентации вращающегося твердого тела;

2). При известных значениях угловой скорости твердого тела, для вычисления девяти элементов ортогональной матрицы $\mathbf{X}$, в общем случае необходимо интегрировать девять скалярных кинематических уравнений Пуассона;

3). Для целого ряда задач метод девятимерной параметризации не удобен, так как число параметров ориентации равно девяти, а независимых среди них только три.

2.2 Метод шестимерной параметризации. По аналогии с девятимерной параметризацией для описания и анализа шестимерной параметризации введем шестимерный вектор параметров ориентации $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_6)^T$.

В этом методе параметризации при преобразовании, задаваемом матрицей $\mathbf{A} \equiv \mathrm{X}$, столбцы ортогональной матрицы представляют координаты образов векторов единичной длины. При этом известно, что если заданы первые два вектора $i = (x_1, x_2, x_3)^T$ и $j = (x_4, x_5, x_6)^T$, то соответственно третий вектор k однозначно определяется условием ортогональности матрицы $\mathbf{X}$ и известным условием $\det\mathbf{X} = 1$ $(\mathbf{X} \in SO(3), SO(3) \subset \mathbf{R}^6, \mathbf{X} \in \mathbf{R}^6)$. Таким образом, искомый третий вектор-столбец k ортогональной матрицы $\mathbf{X}$ может быть получен простым векторным произведением первых двух вектор-столбцов.

Поэтому шестимерная параметризация иногда называется двухвекторной, а непосредственно сами параметры ориентации – параметрами двухвекторной ориентации [15]. В качестве самих параметров ориентации можно взять непосредственно координаты двух ортогональных векторов i, j – координаты $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ соответствующего арифметического подпространства $\mathbb{R}^6$ введенного выше пространства $\mathbb{R}^9$ матриц размерности (3×3).

Аналитическое выражение матрицы **X** для метода шести параметров можно получить, выполнив операцию векторного произведения двух векторов

$$R_1 \times R_2 = R_3 \tag{2.4}$$

где R_1, R_2, R_3 – векторы, образованные соответственно первым, вторым и третьим столбцами введенной выше ортогональной (3×3)-матрицы **X**.

Итак, векторному произведению (2.4) соответствует некоторая ортогональная матрица **X**, столбцы которой представляют ортонормированную систему. В силу ортогональности самой матрицы, компоненты отдельных параметров связаны следующими соотношениями:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1, \quad x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0 \tag{2.5}$$

Система уравнений (2.5) – геометрическое представление конфигурационного многообразия всех положений твердого тела с одной неподвижной точкой и множество SO (3) ортогональных (3×3)-матриц может быть представлено пересечением трех гиперповерхностей в шестимерном евклидовом векторном пространстве $\mathbf{R}^6$.

Указанная выше система уравнений представляет собой в трехмерном пространстве три поверхности второго порядка – два “сферических цилиндра” и один “конус”. Пересечение этих поверхностей в пространстве $\mathbf{R}^6$ – геометрическое представление конфигурационного многообразия SO (3) всех положений твердого тела с одной неподвижной (закрепленной) точкой.

Следует отметить, что для некоторых приложений ортогональная матрица **X** шести параметров ориентации x_i $(i = \overline{1, 6})$ может быть выражена через косинусы углов Эйлера или Эйлера – Крылова [10, 12, 13]. Представление этих же шести переменных через другие кинематические параметры может быть получено приравниванием элементов матрицы **X** соответствующим элементам ортогональной матрицы **A**, выраженной, например, в углах Эйлера, Эйлера – Крылова, координатах кватерниона или бикватерниона, параметрах Кэли–Клейна [3, 6–10].

Представим кинематическое дифференциальное уравнение для метода шестимерной параметризации. Используя исходное кинематическое уравнение Пуассона (2.3) для матрицы $\mathbf{X}_6(3 \times 2)$, полученной из ортогональной (3×3)-матрицы **X** общего вида (2.1), отбрасыванием последнего столбца, имеем

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}_6 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{X}_6, \quad \mathbf{X}_6(0) = \mathbf{E} \tag{2.6}$$

Матричное уравнение (2.6) эквивалентно общему уравнению (2.3), но содержит только шесть скалярных переменных. Анализ расщепленных уравнений Пуассона (2.6) показывает, что они линейные, симметричные и весьма удобны при решении прикладных задач механики. При этом выполняются требования глобальной и взаимно однозначной (1–1) ориентации твердого тела.

Поэтому в прикладных задачах для определения произвольной ориентации объекта (твердого тела) достаточно постоянно решать шесть дифференциальных уравнений (2.6), а остальные три недостающие элементы матрицы параметров **X** вычислять путем векторного произведения двух первых строк или столбцов.

Таким образом, кинематические уравнения Пуассона обладают дополнительным свойством расщепляемости, в силу чего их применение требует решения не девяти, а всего шести скалярных дифференциальных уравнений.

В качестве ортонормированного базиса *ijk* обычно выбирают единичные векторы (орты), совпадающие с координатными осями объекта [1, 11] и из шести тождеств связи три уравнения (2.5) используют для нормировки и ортогонализации элементов, образующих матрицу параметров **X**.

Можно сделать следующие выводы по методу шестимерной параметризации:

4). Проблема глобального взаимно однозначного представления группы SO (3) может быть решена методом шести параметров (шесть направляющих косинусов), которые получаются методом редукции полной (3×3)-матрицы **X**;

5). В прикладных задачах, для определения элементов матрицы **X**, в силу расщепляемости кинематических уравнений Пуассона, необходимо интегрировать шесть симметричных, скалярных уравнений, переменными в которых являются искомые параметры ориентации x_i $(i = 1, \ldots, 6)$;

6). Тождества связи (2.5) обычно используются для нормализации и ортогонализации шести направляющих косинусов, непосредственно получаемых в процессе реальных вычислений.

2.3 Метод пятимерной параметризации. На вопрос какое же минимальное число параметров необходимо для глобального взаимно однозначного отображения группы SO (3) в векторное пространство $\mathbf{R}^9$ дал ответ Г. Хопф [5]. Он первым доказал невозможность вложения группы SO (3) в четырехмерное векторное пространство $\mathbf{R}^4$ и одновременно показал возможность вложения SO (3) в пятимерное векторное пространство $\mathbf{R}^5$.

Прежде чем непосредственно исследовать метод Хопфа следует сделать несколько предварительных замечаний, которые позволяют понять способ определения ориентации твердого тела с помощью пяти вещественных параметров.

Для описания процедуры вложения группы SO (3) в пространство $\mathbf{R}^5$ рассмотрим модифицированную шестимерную параметризацию [18]. Для этого введем перенормированный вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6)^T$ – шестимерный вектор-столбец, элементы которого состоят из первых двух столбцов матрицы $(1/\sqrt{2})\mathbf{X}$. При этом $\mathbf{X} \in SO(3) \subset \mathbf{R}^6$. В силу ортогональности матрицы **X**, шесть ее отдельных перенормированных параметров связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_4^2 + \tilde{x}_5^2 + \tilde{x}_6^2 = 1 \\ &(\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_3^2) - (\tilde{x}_4^2 + \tilde{x}_5^2 + \tilde{x}_6^2) = 0 \\ &\tilde{x}_1\tilde{x}_4 + \tilde{x}_2\tilde{x}_5 + \tilde{x}_3\tilde{x}_6 = 0 \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Уравнения (2.7) – геометрическое представление конфигурационного многообразия всех положений твердого тела с одной неподвижной точкой и множество SO (3) может быть представлено пересечением трех гиперповерхностей в пространстве $\mathbf{R}^6$.

Система уравнений (2.7) представляет собой три поверхности второго порядка – одну пятимерную сферу $S^5 \subset \mathbf{R}^6$ и два конуса. Пересечение этих поверхностей в пространстве $\mathbf{R}^6$ – геометрическое представление конфигурационного многообразия SO (3) всех положений твердого тела с одной неподвижной (закрепленной) точкой.

Таким образом, модифицированный шестимерный вектор $\tilde{x}$ состоит из шести перенормированных элементов направляющих косинусов и для него, на основании (2.7), справедливы следующие обобщающие матричные тождества [18]:

$$\tilde{x}^T\tilde{x} = 1, \quad \tilde{x}^T\mathbf{J}_i\tilde{x} = 0 \quad (i = 1, 2)$$
$$\mathbf{J}_1 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & -\mathbf{E}_3 \end{matrix} \right\|, \quad \mathbf{J}_2 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{O}_3 & \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{O}_3 \end{matrix} \right\| \tag{2.8}$$

где E_3 – единичная и O_3 – нулевая (3×3)-матрицы.

Для рассматриваемого здесь шестимерного вектора $\tilde{x}$ скалярное произведение $\tilde{x}^T\tilde{x} = 1$. Это многообразие представляет множество точек пятимерной сферы S^5 единичного радиуса, погруженной в пространство $\mathbf{R}^6$ [18, 19].

Погружая многообразие SO (3) в пятимерное пространство $\mathbf{R}^5$, с соблюдением требований взаимной однозначности, имеем вложение SO (3) $\to \mathbf{R}^5$. Многообразие SO (3) расположено на сфере S^5 и обозначая через M ($M \subset S^5 \subset \mathbf{R}^6$) множество этих точек на поверхности сферы S^5 имеем топологическое пространство $SO\ (3) \subset S^5$.

Очевидно, что множество всех точек M на поверхности единичной сферы S^5 удовлетворяет условию $\tilde{x}^T\tilde{x} = 1$. Тогда на сфере S^5 всегда можно указать такую точку α, которая отвечает условию $\alpha \in S^5 \subset \mathbf{R}^6$ и при этом одновременно $\alpha \notin M$.

В этом случае, способом стереографического проектирования сферы $S^5\backslash\{\alpha\}$ на гиперплоскость $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}^5$, ортогональную радиусу сферы (проходящему через центр проекции – точку α), можно добиться вложения множества M в пространство $\mathbf{R}^5$.

Множество M топологически эквивалентно многообразию SO (3), поэтому может быть задано взаимно однозначное отображение SO (3) $\to \mathbf{R}^5$.

Чтобы дать вышесказанному простую интерпретацию, следуя [18] введем прямоугольную (5×6)-матрицу $\mathbf{V}$, для которой выполняются соотношения $\mathbf{V}\alpha = 0$, $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{E}_5$, где $\mathbf{E}_5$ – единичная (5×5)-матрица. Одновременно, произведение прямоугольных матриц $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$ – (6×6)-матрица проектирования на подпространство $\mathbf{R}^6$. Данная проекция ортогональна радиусу сферы, проведенному через точку α.

В рассматриваемом здесь векторном пространстве $\mathbf{R}^6$ для всех перенормированных векторов $\tilde{x} \in (S^5\backslash\{\alpha\})$ через точки α и $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6)$ можно провести прямую линию до ее пересечения с введенной выше гиперплоскостью $\mathbf{P}\{((\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5, \tilde{x}_6) \in \mathbf{R}^5;\ \tilde{x}_6 = 0)\}$. Кроме того, так как существует стереографическая проекция модифицированного вектора $\tilde{x} \in M$ на гиперплоскость $\mathbf{P}$, то точка пересечения этой прямой с гиперплоскостью $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}^5$ дает искомый пятимерный вектор $y \in \mathbf{P}$. Последний удовлетворяет следующему проекционному уравнению:

$$y = \frac{\mathbf{V}\tilde{x}}{1 - \alpha^T\tilde{x}} \tag{2.9}$$

Уравнение (2.9) дает точку пересечения линии, соединяющей точки вектора $\tilde{x}$ и α с гиперплоскостью $\mathbf{P}$, ортогональную радиусу сферы S^5, проходящему через "полюс" α стереографической проекции. Координаты самой точки пересечения заданы уравнением (2.9). Последнее определено для всех векторов $\tilde{x} \in M$, так как знаменатель в уравнении (2.9) обращается в ноль только при условии $\alpha \equiv \tilde{x}$, но выше было показано, что $\alpha \notin M$.

Обратное отображение вектора $y \in \mathbf{P} \subset \mathbf{R}^5$ на пространство $\mathbf{R}^6$ позволяет найти перенормированный вектор $\tilde{x} \in \mathbf{R}^6$. При этом произведение $\mathbf{V}^Ty$ – шестимерный вектор, ортогональный радиусу, проходящему через точку α. Линия, соединяющая $\mathbf{V}^T y$ и “полюс” α, пересекает сферу S^5 в точке, где имеет место уравнение

$$\tilde{x} = \frac{\alpha(y^T y - 1) + 2\mathbf{V}^T y}{y^T y + 1} \tag{2.10}$$

Сказанное выше доказывает, что если $y \in \mathbf{R}^5$, то соотношение (2.9) задает взаимно однозначное соответствие при определении произвольной ориентации тела в пространстве. При этом если перенормированный вектор $\tilde{x} \in M$, то пятимерный вектор y должен удовлетворять двум тождествам связи [18]:

$$\begin{aligned} &\alpha^T \mathbf{J}_1 \alpha(y^T y - 1)^2 + 4y^T \mathbf{V}\mathbf{J}_1 \alpha(y^T y - 1) + 4y^T \mathbf{V}\mathbf{J}_1 \mathbf{V}^T y = 0 \\ &\alpha^T \mathbf{J}_2 \alpha(y^T y - 1)^2 + 4y^T \mathbf{V}\mathbf{J}_2 \alpha(y^T y - 1) + 4y^T \mathbf{V}\mathbf{J}_2 \mathbf{V}^T y = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ – матрицы, определенные выше в соотношениях (2.8).

Таким образом, вектор $y \in \mathbf{R}^5$ представляет любую точку группы вращений SO (3) взаимно однозначно. Поэтому для такого вектора важно получить кинематическое дифференциальное уравнение вращения. Однако прежде, чем дать саму процедуру вывода кинематического уравнения для пятимерного вектора y, приведем аналогичные уравнения для перенормированного шестимерного вектора $\tilde{x}$.

Для модифицированного вектора параметров $\tilde{x} \in \mathbf{R}^6$ на основании уравнения (2.6) можно получить кинематическое дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \mathbf{A}_6 \tilde{x}(t), \quad \mathbf{A}_6 = \begin{Vmatrix} \mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{\Omega}_3 \end{Vmatrix} \tag{2.12}$$

где $\mathbf{A}_6$ – кососимметрическая (6×6)-матрица, для которой $\mathbf{A}_6^T + \mathbf{A}_6 = 0$.

Кинематическое уравнение (2.12) в переменных вектора $\tilde{x} \in \mathbf{R}^6$ перенормированных параметров ориентации, требует только трех тождеств связи (2.7).

Последние соотношения обычно используются для контроля погрешностей, имеющих место при реальных бортовых вычислениях шести модифицированных параметров $\tilde{x}_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$.

Для вывода кинематических уравнений в параметрах искомого вектора $y \in \mathbf{R}^5$ необходимо выполнить дифференцирование соотношения (2.9) по времени t и сделать некоторые несложные дополнительные преобразования. После выполнения этих операций имеем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{(1 - \alpha^T \tilde{x})\mathbf{V}(d\tilde{x}/dt) + (\alpha^T (d\tilde{x}/dt))\mathbf{V}\tilde{x}}{(1 - \alpha^T \tilde{x})^2} \tag{2.13}$$

Подставляя в уравнение (2.13) выражение (2.10) для перенормированного вектора $\tilde{x}$ и выполнив определенные преобразования, получим искомое кинематическое дифференциальное уравнение вращения для метода пятимерной параметризации

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{1}{2}(y^T y + 1)(\mathbf{V} + y\alpha^T)\frac{d}{dt}\tilde{x} \tag{2.14}$$

Уравнение (2.14) содержит две неизвестные кинематические переменные y, $\tilde{x}$ и поэтому при его реализации не представляется возможным непосредственно определять искомый вектор y параметров ориентации. Для исключения переменной $\tilde{x}$ из правой части уравнения (2.14) необходимо последовательно подставить в него выражения (2.12) – для производной по времени t перенормированного вектора $\tilde{x}$ и соотношения (2.10) – непосредственно для самого вектора $\tilde{x}$.

После таких преобразований производная пятимерного вектора y по времени t будет соответствовать следующему кинематическому уравнению [18]:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \left(\frac{1}{2}(y^T y - 1)\mathbf{E}_5 - yy^T\right)\mathbf{VA}_6\alpha + \mathbf{VA}_6\mathbf{V}^T y \tag{2.15}$$

При непосредственной реализации метода пятимерной параметризации в современных векторно-матричных процессорах, необходимо знать аналитические выражения всех векторов и матриц, которые входят в правую часть выведенного уравнения (2.15). Поэтому, не останавливаясь подробно на методах получения элементов таких преобразований, приведем ниже выражения основных матриц, необходимых при формировании производных искомого вектора $y \in \mathbf{R}^5$.

Выбрав в качестве центра ("полюса") стереографической проекции точку α, координаты которой (0, 0, 0, 0, 0, 1), найдем необходимые аналитические выражения матриц, входящих в правую часть результирующего дифференциального уравнения (2.15):

$$\mathbf{V} = \|\mathbf{E}_5\ \mathbf{O}_{5\times1}\|,\quad \mathbf{A}_6 = \begin{Vmatrix} \mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{\Omega}_3 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{\Omega}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 0 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 0 \end{Vmatrix},\quad \alpha = \|0, 0, 0, 0, 0, 1\|^T$$

$$\mathbf{VA}_6\alpha = \|0, 0, 0, -\omega_y, \omega_x\|^T,\quad \mathbf{VA}_6\mathbf{V}^T = \begin{Vmatrix} \mathbf{\Omega}_3 & \mathbf{\Omega}_{3\times2} \\ \mathbf{O}_{2\times3} & \mathbf{\Omega}_2 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{\Omega}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_Z \\ -\omega_Z & 0 \end{Vmatrix}$$

Анализ результирующего кинематического дифференциального уравнения (2.15) для искомого пятимерного вектора y показывает, что оно несимметричное, нелинейное и не такое простое по структуре, как исходное линейное уравнение (2.3) для модифицированного шестимерного вектора $\tilde{x}$ параметров ориентации.

Несмотря на это, пятимерная параметризация Хопфа, несомненно, представляет определенный интерес, как способ, который использует минимально возможное число вещественных переменных для глобального взаимно-однозначного отображения группы SO (3) на пространство параметров.

При этом сам метод пятимерной параметризации Хопфа требует решения минимального числа скалярных кинематических уравнений вида (2.15).

Заметим, что вполне допустимо существование и другого вложения группы SO (3) в пространство параметров $\mathbf{R}^5$, которое позволит получить кинематическое уравнение несколько иного вида, нежели то, которое приведено выше и выведено на основании [18]. Однако, в любом случае, эти уравнения будут несимметричными и нелинейными, вне зависимости от способа их получения.

Можно сделать следующие выводы по методу пятимерной параметризации:

7). Минимально возможное число параметров для корректного решения задачи глобального взаимно однозначного отображения группы SO (3) в $\mathbf{R}^9$ равно пяти;

8). Метод пятимерной параметризации, несомненно, представляет принципиальный интерес при теоретических исследованиях в задачах глобальной взаимнооднозначной ориентации трехмерного твердого тела в пространстве;

9). Кинематические уравнения метода пятимерной параметризации имеют сложную структуру, несимметричные и нелинейные, что затрудняет, но не исключает их практическое применение в задачах прикладной математики и механики.

2.4 Метод четырехмерной параметризации. Метод четырехмерной параметризации не дает взаимно однозначного отображения SO (3) на пространство параметров. Поэтому такая параметризация не решает поставленной выше задачи. Однако четырехмерная параметризация представляет значительный интерес и с теоретической, и с прикладной точек зрения. Здесь рассмотрим широко применяемый на практике и в аналитических исследованиях способ задания ориентации твердого тела с помощью кватернионов единичной нормы [3–12, 14, 15, 17].

Математическое описание поворотов твердого тела при помощи кватернионов представляет собой многообразие всех его ориентаций, задаваемых группой G_1 единичных кватернионов. Совокупность G_1 всех единичных кватернионов образует по умножению топологическую группу, которая изоморфна группе унитарных матриц (SU (2)) с определителем равным 1.

Группа G_1 топологически эквивалентна трехмерной сфере $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ единичного радиуса [17–21]. Трехмерная группа вращений $SO\ (3) \to SU\ (2)/(\pm 1)$. Покажем, что группа $G_1 \cong SU\,(2)$ отображается в пространство SO (3) конфигураций твердого тела однозначно, но не взаимно-однозначно. Для этого, следуя [19], введем произвольный вектор $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbf{R}^4$, который (при $x_1 = \lambda_0, x_2 = \lambda_1, x_3 = \lambda_2, x_4 = \lambda_3$) может быть представлен в следующем координатном виде [3, 4, 9]:

$$q = \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k, \quad \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R^1 \tag{2.16}$$

где i, j, k – кватернионные единицы.

Условие нормировки координат кватерниона (2.16) имеет известный вид

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \tag{2.17}$$

Приведенное уравнение (2.17) является уравнением трехмерной сферы $S^3 \subset \mathbf{R}^4$.

Представление поворотов при помощи кватернионов дает многообразие – конфигурационное многообразие всех положений твердого тела с одной неподвижной точкой в пространстве $\mathbf{R}^4$. Оно является односвязным, но оно не находится во взаимно однозначном соответствии с группой вращений SO (3) [3, 4].

Для получения аналитического выражения ортогональной матрицы $\mathbf{A}$ через координаты единичного кватерниона введем в рассмотрение, так называемые [12], кватернионные (4×4)-матрицы

$$\mathbf{M}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{Vmatrix}, \quad \overline{\mathbf{M}}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ -\lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{Vmatrix} \tag{2.18}$$

Матрица $\mathbf{M}(\lambda)$ отличается от матрицы $\overline{\mathbf{M}}(\lambda)$ своим транспонированным векторным ядром. В пространстве $\mathbf{R}^3$ произведение кватернионов $q \circ (\ldots) \circ \bar{q}$ изоморфно ортогональному преобразованию $\mathbf{A}(\ldots)$. Собственному (q) и сопряженному ($\bar{q}$) кватернионам в пространстве кватернионных матриц соответствуют матрицы $\mathbf{M}(\lambda)$ и $\overline{\mathbf{M}}(\lambda)$. Кроме того $q \circ (\ldots) \circ \bar{q}$ изоморфно произведению $\overline{\mathbf{M}}(\lambda)\,\mathbf{M}^T(\lambda)(\ldots)$.

Через матрицы (2.18) весьма просто получается искомая ортогональная матрица направляющих косинусов $\mathbf{A}(\lambda)$ в параметрах Родрига–Гамильтона [12]

$$\overline{\mathbf{M}}(\lambda)\mathbf{M}^T(\lambda) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{A}_{(3\times 3)}(\lambda) & \\ 0 & & & \end{Vmatrix} \tag{2.19}$$

Непосредственной подстановкой выражений (2.18) для кватернионных (4×4)-матриц в соотношение (2.19) имеем аналитическое выражение ортогональной (3×3)-матрицы $\mathbf{A}$ через координаты единичного кватерниона

$$\mathbb{A}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3) \\ 2(\lambda_0\lambda_3+\lambda_1\lambda_2) & \lambda_0^2-\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_3^2 \end{Vmatrix} \tag{2.20}$$

На основании общей матрицы поворота (2.20) имеем аналитическое соотношение

$$\mathbb{A}(\lambda) = \mathbb{E} - 2\lambda_0\mathbf{Q} + 2\mathbf{Q}^2, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

где $\mathbb{E}$ – единичная (3×3)-матрица, $\mathbf{Q}$ – кососимметрическая (3×3)-матрица.

Анализ выражения (2.20) показывает, что данная ортогональная матрица $\mathbf{A}(\lambda)$ не изменится, если одни значения координат $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ кватерниона заменить на противоположные $(-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$. Т.е. в случае применения любых четырехмерных параметров (например, кватернионов), конечная ориентация твердого тела определяет пару диаметрально противоположных точек на сфере.

Таким образом, группа $G_1 = SU(2) \to SO(3)$ гладко, однозначно и что особенно важно, не имеет сингулярных (особых) точек. Однако, любая четырехмерная параметризация не взаимно однозначная (1–1), а вида (2–1), так как группа G_1 дважды накрывает многообразие $SO(3)$. Выше на примере единичных (гамильтоновых) кватернионов было показано, что два кватерниона $+q$ и $-q$ задают одно и то же положение твердого тела в реальном трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Отметим, что, как было показано в [5], проблема взаимно однозначного отображения $SO(3)$ в $\mathbb{R}^4$ не имеет решения для любой совокупности четырехмерных параметров, которые были найдены в разное время и независимо друг от друга Эйлером, Гауссом, Родригом, Гамильтоном и Кэли [16, 22, 25].

Матричная форма записи кинематического уравнения для метода четырех параметров (кватернионов) имеет известный вид

$$\frac{d}{dt}\Lambda = \frac{1}{2}\Omega_4\Lambda, \quad \Lambda = \|\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\|^T \tag{2.22}$$

где Ω_4 – кососимметрическая (4×4)-матрица абсолютных угловых скоростей твердого тела. Данная матрица имеет следующее выражение:

$$\Omega_4 = \begin{Vmatrix} 0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ -\omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (2.23)$$

Полагая, что кватернион $q = x_{(4\times 1)}$, на основании уравнения (2.23) можно получить кинематическое дифференциальное уравнение вида (2.3) в любых четырехмерных параметрах ориентации x_i $(i = 1, \ldots, 4) \in \mathbf{R}^4$.

Анализ уравнения (2.22) показывает, что для кватернионов исходное линейное кинематическое уравнение (2.3) преобразуется в линейное уравнение минимальной размерности, чего не допускает метод пятимерной параметризации.

Поэтому для описания ориентации вращающегося твердого тела весьма удобно использовать гиперкомплексную переменную – кватернион поворота, компонентами которого являются вещественные параметры Родрига – Гамильтона.

Следует отметить, что в некоторых прикладных задачах после интегрирования кинематических уравнений в кватернионах необходимо преобразовывать решение в параметры углов Эйлера – Крылова группы вращений *SO* (3).

Кватернионы и другие четырехмерные переменные – параметры Родрига – Гамильтона и Кэли–Клейна, весьма подробно и основательно исследованы в [2, 3, 6–10, 12, 14–17, 20, 25].

Можно сделать следующие выводы по методу четырехмерной параметризации:

10). Четырехмерная параметризация группы *SO* (3) глобальная и однозначная, хотя и не взаимно однозначная, весьма удобная для многих прикладных задач;

11). При использовании четырехмерных параметров (кватернионов) исходное линейное кинематическое уравнение преобразуется в линейное уравнение минимальной размерности, не имеющее сингулярных (особых) точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsiotras P., Longuski J.M.* A new parameterization of the attitude kinematics // J. Astronaut. Sci. 1995. V. 43. № 3. P. 243–262.
2. *Shuster M.D.* A survey of attitude representations // J. Astronaut. Sci. 1993. V. 41. № 4. P. 439–517.
3. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 1997. 320 с.
4. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987. 528 с.
5. *Hopf H.* Systeme symmetrischer bilinearformen und euklidische modelle der projektiven Räume // Vierteljahresschrift Naturforsch. Gesellsch. Zürich. BC: V. 85. Beibl. 32, 1940. P. 165–177.
6. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Гостехиздат, 1957. 408 с.
7. *Уиттекер Е.Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.
8. *Синг Д.Л.* Классическая динамика. М.: Физматгиз, 1963. 448 с.
9. *Ишлинский А.Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
10. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физмагиз, 1961. 824 с.
11. *Архангельский Ю.А.* Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
12. *Онищенко С.М.* Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Киев: Наук. думка, 1983. 208 с.
13. *Липтон А.* Выставка инерциальных систем на подвижном основании. М.: Наука, 1971. 168 с.
14. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 278 с.
15. *Кирпичников С.Н., Новоселов В.С.* Математические аспекты кинематики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. 252 с.

16. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной ориентации. Киев: Наук. думка, 1995. 290 с.
17. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986. 760 с.
18. *Stuelpnagel J.* On the parametrization of the three–dimensional rotation group // SIAM REVIEW. 1964. V. 6. № 4. P. 422–429.
19. *Понтрягин Л.С.* Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1976. 136 с.
20. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973. 519 с.
21. *Картан Э.М.* Теория спиноров. М.: Изд-во иностр. лит., 1947. 223 с.
22. *Осипов П.Н.* Векторная алгебра. Киев: КВАИУ, 1962. 149 с.
23. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
24. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
25. *Кантор И.Л., Солодовников А.С.* Гиперкомплексные числа. М.: Наука, 1973. 144 с.
26. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 3. Ч. I. М.: Физматгиз, 1958. 328 с.
27. *Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В.* Механика полета. (Общие сведения. Уравнения движения). Инженерный справочник. М.: Машиностроение, 1969. 420 с.
28. *Ang M.H., Tourassis V.D.* Singularities of Euler and Roll–Pitch–Yaw representations // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst. 1987. V. 23. № 3. P. 317–324.
29. *Junkins J.L., Shuster M.D.* The Geometry of the Euler angles // J. Astronaut. Sci. 1993. V. 41. № 4. P. 531–544.
30. *Bortz J.E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigaton // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Syst. 1971. V. 7. № 1. P. 61–66.
31. *Переляев С.Е.* Трехмерная параметризация группы вращений твердого тела в системах гироскопической ориентации // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 19–31.
32. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. Физматгиз, 1977. 832 с.
33. *Троило Т.* Некоторые теоремы о прецессионных движениях и о регулярной прецессии // Механика. Переод. сб. переводов иностр. статей. М.: 1973. № 5. С. 43–47.

Москва

Поступила в редакцию
24.03.2004