МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2006

УДК 539.3

© 2006 г. В.М. МИРСАЛИМОВ

ОБРАТНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ С УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

На основе принципа равнопрочности проведен теоретический анализ по определению оптимального натяга для посадки упругих включений в отверстия изотропной упругой пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины и включений. Найденный натяг обеспечивает повышение несущей способности составной изгибаемой пластины.

1. Введение. Опыт показывает большую надежность и долговечность многокомпонентных конструкций перед однородными [1]. Как отмечается в [1], весьма перспективное направление в конструировании современных машин и их элементов подсказывает история техники. А именно, еще в 1861 г. акад. А.В. Гадолиным была предложена конструкция составных стволов артиллерийских орудий, скрепленных с помощью натяга, что повысило их несущую способность.

Для повышения несущей способности пластины с отверстиями целесообразно контуры круговых отверстий подкреплять с натягом упругими шайбами из другого материала. Подкрепляющие элементы, составляя по весу сравнительно небольшую часть, существенно влияют на ее прочность.

Ресурс работы составной конструкции определяется распределением напряжений в зонах взаимодействия деталей такой конструкции. Поэтому важное значение приобретает оптимальное проектирование составной (многокомпонентной) конструкции. Задача теории оптимального проектирования заключаются в определении характеристик конструкции, таким образом, чтобы изделие при действии заданных нагрузок являлось наилучшим из всех изделий рассматриваемого типа.

2. Постановка задачи. Пусть имеется изотропная упругая пластина, ослабленная периодической системой круглых отверстий, имеющих радиус λ ($\lambda < 1$) и центры этих отверстий в точках

$$P_m = m\omega \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad \omega = 2$$

Пусть требуется определить натяг для посадки включений в отверстия изотропной упругой пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий. Пластина подвергается однородному изгибу равномерно распределенными постоянными моментами (изгиб на бесконечности): $M_x = M_x^\infty$, $M_y = M_y^\infty$, $H_{xy} = 0$.

Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром отверстия L_0 в срединной $x0y$ плоскости пластины.

Следует отметить, что до сих пор неизвестны решения задач теории упругости по построению системы концентраторов (включений) таким образом, чтобы созданное ими упругое поле снижало бы концентрацию напряжений в перфорированной пластине.

Будем считать, что в круговые отверстия пластины L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) путем запрессовки или теплового воздействия вставлены с натягом упругие шайбы из другого материала с одинаковой с ней толщиной. Предполагается, что шайбы первоначально имеют большие размеры, чем отверстия пластины.

На основании симметрии краевых условий и геометрии области, занятой упругой средой, напряжения в изгибаемой пластине являются периодическими функциями с основным периодом ω.

Обозначим комплексные потенциалы относящихся к шайбе через $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, а относящиеся к пластине через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Так как решение для пластины обладает свойством периодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения пластины с включением лишь вдоль контура основного отверстия L_0.

Краевые условия рассматриваемой задачи имеют вид [2]:

$$\begin{aligned} &\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \\ &= \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta} + g'(\tau) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \\ &= \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)}\{\varepsilon_0\overline{\Phi_0(\tau)} + \Phi_0(\tau) - [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)]e^{2i\theta}\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Здесь ν и ν_0 – коэффициенты Пуассона материала пластины и шайбы, соответственно; D и D_0 – цилиндрические жесткости пластины и шайбы; $g(\tau)$ – искомая функция натяга, подлежит определению в процессе решения задачи из дополнительного условия.

В принятых предположениях теории Кирхгофа рассматриваемая задача сводится к отысканию двух пар функций $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$, $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих граничным условиям (2.1), (2.2).

Для нахождения функции натяга соединения нужно постановку задачи дополнить условием (критерием) определения натяга. В качестве условия определения натяга соединения (функция $g(\theta)$) принимаем условия равнопрочности на контуре круговых отверстий. Таким образом, требуется определить натяг соединения (функцию $g(\theta)$) так, чтобы созданное им в процессе нагружения составного тела напряженно-деформированное поле обеспечивало бы условие равнопрочности на контурах круговых отверстий в изгибаемой пластине.

Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $g(\theta)$ натяга запрессовки.

3. Метод решения. Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние шайбы, ищем в виде

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{2k} z^{2k} \tag{3.1}$$

С учетом средних моментов комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние пластины, ослабленной периодической системой круглых отверстий, ищем в виде [3]:

$$\Phi(z) = -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4D(1+\nu)} + \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k}\rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}$$

$$\Psi(z) = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2D(1-\nu)} + \sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\frac{\lambda^{2k+2}S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!} \quad (3.2)$$

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2(\pi z/\omega)} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2, \; S(z) = \sum_m{}'\left[\frac{P_m}{(z-P_m)^2} - \frac{2z}{P_m^2} - \frac{1}{P_m}\right]$$

Здесь $S(z)$ – специальная мероморфная функция.

Штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m = 0$.

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (3.2). Из условий равенства нулю главного вектора сил и главного момента этих же сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области занятой материалом пластины, следует, что

$$\alpha_0 = -\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\frac{1-\nu}{1+\nu}\beta_2\lambda^2$$

Из условий симметрии относительно координатных осей, находим, что $\operatorname{Im}\alpha_{2k} = 0$, $\operatorname{Im}\beta_{2k} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Можно убедиться, что представления (3.2) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимаем, что искомая функция $g'(\tau)$ может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье

$$g'(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^H e^{i2k\theta}, \quad A_{2k}^H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g'(\tau)e^{-2ki\theta}d\theta$$
$$\operatorname{Im}A_{2k}^H = 0 \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \quad (3.3)$$

Следовательно, задача оптимизации сводится к определению коэффициентов A_{2k}^H ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) – параметров управления этого ряда Фурье.

Обозначим левую часть краевого условия (2.1) через $f_1 - if_2$. Пусть на контуре L_0 функция $f_1 - if_2$ разлагается в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_i - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}e^{2ki\theta}, \quad \operatorname{Im}A_{2k} = 0 \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots) \quad (3.4)$$

Тогда на основании граничного условия (2.1) и соотношений (3.1), (3.4) и применяя метод степенных рядов, получим следующие соотношения

$$a_0 = \frac{A_0 - A_0^H}{2}, \quad a_{2k} = \frac{A_{-2k} - A_{-2k}^H}{\lambda^{2k}} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$
$$a_{2k}' = -(2k+1)\frac{A_{-2k-2} - A_{-2k-2}^H}{\lambda^{2k}} - \frac{A_{2k+2} - A_{2k+2}^H}{\lambda^{2k}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \quad (3.5)$$

определяющие коэффициенты a_{2k}, a_{2k}' функций $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$. Для определения неизвестных пока величин A_{2k} рассмотрим решение задачи для пластины.

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ позволяют после некоторых преобразований записать краевые условия на контуре кругового отверстия ($\tau = \lambda e^{i\theta}$) для отыскания потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в следующем виде:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}e^{2ki\theta} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} =$$

$$= \frac{D_0(1-\nu_0)}{D(1-\nu)}\left\{\frac{1+\varepsilon_0}{2}C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}e^{2ki\theta} + \varepsilon_0\sum_{k=1}^{\infty} C_{-2k}e^{-2ki\theta}\right\} \tag{3.7}$$

$$C_{2k} = A_{2k} - A_{2k}^{H}\ (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$$

Краевое условие (3.6) служит для определения коэффициентов α_{2k} и β_{2k}, а граничное условие (3.7) для определения величин A_{2k}.

Используя методы решения, изложенные в [2, 4, 5], получим три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k}, β_{2k} и A_{2k}, соответственно

$$\alpha_{2j+2} = \sum^{\infty} a_{j,k}\alpha_{2k+2} + b_j\ (j = 0, 1, 2, \ldots),\quad a_{j,k} = (2j+1)\gamma_{j,k}\lambda^{2j+2k+2} \tag{3.8}$$

$$\gamma_{0,0}^{*} = \frac{3}{8}g_2\lambda^2 + \varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i+1)g_{i+1}^2\lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}}$$

$$\gamma_{j,k}^{*} = -\frac{(2j+2k+2)!g_{k+j+1}}{(2j+1)(2k+1)!2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!g_{k+j+2}\lambda^2}{(2j+2)(2k+2)!2^{2j+2k+4}} +$$

$$+\varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+1)!(2k+2i+1)!g_{j+i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2j+1)!(2k+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k}^{*}$$

$$b_{0,k}^{*} = 0,\quad b_{j,0}^{*} = 0,\quad b_{j,k}^{*} = \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}}\left(1 + \frac{(1+\varepsilon)^2k_2\lambda^2}{k_1}\right)$$

$$b_0 = A_2' - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}}A_{-2k-2}'\quad (j = 0, 1, 2, \ldots),\quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_j = A_{2j+2}' - \frac{(2j+1)A_0'g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{k_1 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+3)g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}}A_{-2k-2}'$$

$$(j = 1, 2, \ldots),\quad g_j = 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{2j}}$$

$$k_1 = 1 - 2k_2\lambda^2,\quad k_2 = -\frac{\pi^2}{24}\frac{1-\nu}{1+\nu},\quad A_0' = A_0 + \frac{M_x^{\infty} + M_y^{\infty}}{2D(1+\nu)}$$

$$A_2' = A_2 - \frac{M_x^{\infty} - M_y^{\infty}}{2D(1+\nu)},\quad A_{2k}' = A_{2k}\ (k = -1, \pm2, \ldots)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{k_1}\left[-A_0^1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}}\alpha_{2k+2}\right] \tag{3.9}$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3)\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}}\alpha_{2k+2} - A'_{-2j-2}$$

$$A_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} D_{j,k}A_{2k+2} + T_j \; (j = 0, 1, 2, \ldots), \quad D_{j,k} = (2j+1)\lambda^{2j+2k+2}S_{j,k}/\gamma \qquad (3.10)$$

$$S_{j,k} = \frac{1-\mu_0/\mu}{1-\varepsilon}\left(\gamma_{j,k} + \frac{\mu}{\mu_0\varepsilon_0}\gamma^*_{j,k} + d_{j,k}\right), \quad d_{j,k} = \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda_2}{2^{2j+2k+4}}\eta(\mu_0/\mu)$$

$$\eta(\mu_0/\mu) = \frac{M}{[1+(1-2k_2\lambda^2)]M_1}$$

$$M = \frac{(1+\varepsilon_0)/\varepsilon_0}{1-(1+\varepsilon)k_2\lambda^2} - \frac{2}{1-k_2\lambda^2}, \quad M_1 = -\frac{\mu_0(1+\varepsilon_0)}{\mu(1-\varepsilon)} + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

$$T_j = T^* + H_j, \quad T^*_j = t^*_j/\gamma, \quad H_j = h_j/\gamma$$

$$t^*_0 = \frac{M^\infty_y - M^\infty_x}{2(1-\nu)D}(1+\mu/\mu_0\varepsilon_0)$$

$$t^*_j = \frac{M^\infty_x + M^\infty_y}{4(1+\nu)D}\frac{(2j+1)g_{j+1}}{2^{2j+2}}\lambda^{2j+2}\eta_1(\mu_0/\mu)$$

$$\eta_1(\mu_1/\mu) = \frac{(1-\mu/\mu_0\varepsilon_0)[\mu_0(1+\varepsilon_0)/\mu - (1+\varepsilon)]}{1-(1+\varepsilon)k_2\lambda^2 - (1-2k_2\lambda^2)(1+\varepsilon_0)\mu_0/2\mu}$$

$$h_0 = \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_{k+2}\lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}}(-A^H_{-2k-2})$$

$$h_j = -\frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}}(1-\varepsilon_0)\left\{\frac{-1}{2[1-(1+\varepsilon)k_2\lambda^2]\varepsilon_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{2Q\mu_0}\left[\frac{1}{1-2k_2\lambda^2} - \frac{1+\varepsilon_0}{2[1-(1+\varepsilon)k_2\lambda^2]\varepsilon_0}\right]\right\}A^H_0 +$$

$$+ \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}}A^H_{2k+2}$$

$$\gamma = \frac{(1-\mu_0/\mu)(1-\mu\varepsilon/\mu_0\varepsilon_0)}{1-\varepsilon} + \frac{1-\varepsilon_0}{\varepsilon_0}$$

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)!g_{j+k+1}}{(2j)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}}, \quad Q = -\frac{\mu_0}{\mu}\frac{1-\varepsilon_0}{2} + \frac{1+\varepsilon}{2} + \frac{1-\varepsilon}{2(1-2k_2\lambda^2)}$$

Величины $\gamma_{j,k}$ входящие в системы (3.8) и (3.10), определяются по формулам для $\gamma^*_{j,k}$ при $\varepsilon = 1$.

Полученные системы (3.8), (3.9) при заданном натяге полностью определяют решение задачи о напряженно-деформированном состоянии пластины, подкрепленной шайбами из другого упругого материала.

До сих пор формально натяг считался заданным. Вернемся, теперь, к задаче оптимизации. Коэффициенты A^H_{2k} подлежат определению в процессе решения задачи оптимизации. Перейдем к построению недостающих уравнений для замыкания систем уравнений (3.8), (3.9), (3.10).

Для этого определим изгибающий момент M_θ на контуре отверстия в пластине $|\tau| = \lambda$. С помощью формул [2]:

$$M_\theta + M_\rho = -4D(1+\nu)\mathrm{Re}\Phi(z)$$

$$M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} = 2D(1-\nu)[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta}$$

находим изгибающий момент M_θ в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_\theta = {} & \frac{1}{2}(M_x^\infty + M_y^\infty) + \frac{1}{2}(M_y^\infty - M_x^\infty)\cos 2\theta - 2D(1+\nu)\Bigg[\alpha_0 + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{2k+2j+2}r_{j,k}\cos 2j\theta\Bigg] + D(1-\nu)\times \\ & \times\Bigg\{-\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\alpha_{2k+2}\cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}\lambda^{2k+2j+2}(2j-2k-2)r_{j,k}\times \\ & \times\cos 2j\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{2k+2}\lambda^{2k+2j+2}\cos 2j\theta\Bigg\} \end{aligned} \tag{3.11}$$

В формуле (3.11) коэффициенты α_{2k} и β_{2k} зависят от величин A^H_{2k} – ряда Фурье искомой функции натяга. Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить искомые коэффициенты A^H_{2k}, будем использовать принцип наименьших квадратов, т.е. подберем такие величины коэффициентов A^H_{2k}, чтобы обеспечивалась минимизация напряжений на контуре отверстий пластины. Снижение концентрации напряжений на контуре отверстий осуществляем путем минимизации следующего критерия:

$$\sum_{i=1}^{N}[M_\theta(\theta_i) - M_0]^2 \to \min \tag{3.12}$$

Здесь M_0 – оптимальное значение изгибающего момента на контуре отверстия. Величина M_0 заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи.

Разбиваем отрезок $[0, 2\pi]$ на N равных частей $\Delta\theta = 2\pi/N$. В точках разбиения (узлах) θ_i вычисляем значения функции $M_\theta(\theta_i)$. Выражение

$$U = \sum_{i=1}^{N}[M_\theta(\theta_i) - M_0]^2 \tag{3.13}$$

представляет собой функцию, зависящую от управляющих параметров A_{2k}^H, M_0, а также коэффициентов α_{2k}, β_{2k}. Функция U явно зависит от величин α_{2k}, β_{2k}. В свою очередь коэффициенты α_{2k}, β_{2k}, зависят от коэффициентов A_{2k}^H (см. системы (3.8), (3.9) (3.10)). Из (3.11) с помощью (3.9) исключаем коэффициенты β_{2k}.

Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами $\alpha_{2k}(A_{2k}^H)$ и M_0 считаются те, для которых функция U будет принимать минимальное значение. Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем бесконечную систему уравнений для определения величин M_0, $\alpha_{2k}(A_{2k}^H)$:

$$\partial U/\partial M_0 = 0, \quad \partial U/\partial\alpha_{2k} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.14}$$

Система уравнений (3.14) упрощается, так как функция $M_\theta(\theta, \alpha_{2k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ линейна относительно параметров α_{2k}. Действительно, ее можно представить в следующем виде:

$$M_\theta(\theta, \alpha_{2k}) = f_0 + \alpha_2 f_2(\theta) + \alpha_4 f_4(\theta) + \alpha_6 f_6(\theta) + \ldots + \alpha_{2k+2} f_{2k+2}(\theta) + \ldots$$

$$f_0(\theta) = \frac{1}{2}(M_x^\infty + M_y^\infty) - 2D(1+\nu)\alpha_0^* + \frac{1}{2}(M_y^\infty - M_x^\infty)\cos 2\theta -$$

$$-\frac{A_0'}{K_1} f_2^1(\theta) - A_{-2} f_2^1(\theta) - A_{-4} f_4^1(\theta) - A_{-6} f_6^1(\theta) - \ldots - A_{-2k} f_{2k+2}^1(\theta) - \ldots$$

$$f_2(\theta) = f_2^0 + f_2^1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_2} + f_4^1\frac{\partial\beta_4}{\partial\alpha_2} + f_6^1\frac{\partial\beta_6}{\partial\alpha_2} + \ldots + f_{2k+2}^1\frac{\partial\beta_{2k+2}}{\partial\alpha_2} + \ldots$$

$$f_4(\theta) = f_4^0 + f_2^1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_4} + f_4^1\frac{\partial\beta_4}{\partial\alpha_4} + f_6^1\frac{\partial\beta_6}{\partial\alpha_4} + \ldots + f_{2k+2}^1\frac{\partial\beta_{2k+2}}{\partial\alpha_4} + \ldots$$

$$f_6(\theta) = f_6^0 + f_2^1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_6} + f_4^1\frac{\partial\beta_4}{\partial\alpha_6} + f_6^1\frac{\partial\beta_6}{\partial\alpha_6} + \ldots + f_{2k+2}^1\frac{\partial\beta_{2k+2}}{\partial\alpha_6} + \ldots$$

....

....

$$f_{2k+2}(\theta) = f_{2k+2}^0 + f_2^1\frac{\partial\beta_2}{\partial\alpha_{2k+2}} + f_4^1\frac{\partial\beta_4}{\partial\alpha_{2k+2}} + f_6^1\frac{\partial\beta_6}{\partial\alpha_{2k+2}} + \ldots + f_{2k+2}^1\frac{\partial\beta_{2k+2}}{\partial\alpha_{2k+2}} + \ldots$$

$$f_{2k+2}^0 = -2k\cos(2k+2)\theta + \sum_{j=0}^{\infty}(2j-2k)r_{j,k}\lambda^{2k+2j+2}\cos 2j\theta$$

$$f_{2k+2}^1 = \cos(2k+2)\theta + \sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{2k+2j+2}\cos 2j\theta \ (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\alpha_0^* = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\lambda^2\frac{A_0'}{k_1}$$

Остальные величины (частные производные) находятся по соотношениям для $\beta_2, \ldots, \beta_{2k+2}$ (см. (3.9)). Учитывая, приведенные соотношения, получим следующую линейную систему относительно неизвестных $M_0, \alpha_2, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2k+2}, \ldots$:

$$
\begin{aligned}
&-NM_0 + \alpha_0 \sum_{i=1}^{N} f_2(\theta_i) + \alpha_4 \sum_{i=1}^{N} f_4(\theta_i) + \ldots + \alpha_{2k+2} \sum_{i=1}^{N} f_{2k+2}(\theta_i) + \ldots = -\sum_{i=1}^{N} f_0(\theta_i) \\
&\alpha_2(f_2, f_2) + \alpha_4(f_2, f_4) + \ldots + \alpha_{2k+2}(f_2, f_{2k+2}) + \ldots = (f_2, Y) \\
&\alpha_2(f_4, f_2) + \alpha_4(f_4, f_4) + \ldots + \alpha_{2k+2}(f_4, f_{2k+2}) + \ldots = (f_4, Y) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_2(f_{2k+2}, f_2) + \alpha_4(f_{2k+2}, f_4) + \ldots + \alpha_{2k+2}(f_{2k+2}, f_{2k+2}) + \ldots = (f_{2k+2}, Y) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&(k = 0, 1, 2, \ldots)
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

$$
(f_j, f_k) = \left(\sum_{i=1}^{N} f_j(\theta_i) f_k(\theta_i)\right), \quad (f_j, Y) = \sum_{i=1}^{N} f_j(\theta_i) Y_i, \quad Y_i = M_0 - f_0(\theta_i)
$$

4. Анализ результатов. Бесконечная система (3.15) совместна с системами (3.8), (3.9) и (3.10) позволяет определить напряженно-деформированное состояние пластины, оптимальный натяг для посадки упругих шайб в отверстия и оптимальное значение нормального тангенциального изгибающего момента на контуре отверстия пластины.

Бесконечные системы (3.8), (3.9), (3.10) и (3.15) имеют весьма громоздкий вид. Так как $0 \le \lambda < 1$, а параметр λ входит в высоких степенях в отмеченные системы, то это значительно упрощает расчеты. В большинстве практически важных случаев можно каждую из этих систем урезать до двух-трех уравнений и, несмотря на это, получить практически точные результаты для рабочих диапазонов изменения радиуса λ отверстия.

Для численной реализации изложенного способа совместно решались линейные алгебраические системы (3.8), (3.9), (3.10) и (3.15). Использовался метод урезания алгебраических систем. Исследовался односторонний изгиб пластины постоянными моментами M_y^∞ ($M_x^\infty = 0$) и всесторонний изгиб моментами $M_x^\infty = M_y^\infty = M$.

Урезанные системы уравнений решались методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса отверстий.

В табл. 1 приведены результаты расчетов коэффициента A_{2k}^H для разных значений радиуса отверстий при одностороннем изгибе, а в табл. 2 приведены результаты для всестороннего изгиба. В расчетах было принято для пластины $\nu = 0.32$, $\mu = 4.5 \cdot 10^5$ МПа; для включения $\nu_0 = 0.31$, $\mu_0 = 2.6 \cdot 10^5$ МПа.

Случай кольцевых шайб рассматривается аналогично. В этом случае комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ ищутся в виде [6]:

$$
\Phi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a'_{2k} z^{2k}
$$

Таблица 1

λ	A_0^H	A_2^H	A_4^H	A_6^H	A_8^H
0.2	0.089	0.051	0.027	0.012	0.003
0.3	0.192	0.060	0.034	0.017	0.007
0.4	0.197	0.063	0.036	0.021	0.012
0.5	0.103	0.069	0.042	0.029	0.017

Таблица 2

λ	A_0^H	A_2^H	A_4^H	A_6^H	A_8^H
0.2	0.081	0.043	0.022	0.011	0.002
0.3	0.089	0.052	0.029	0.014	0.007
0.4	0.095	0.057	0.031	0.016	0.011
0.5	0.098	0.060	0.034	0.020	0.015

и кроме того добавляется граничное условие отсутствия усилий на внутреннем контуре кольцевой шайбы. Аналогично задача может быть рассмотрена для иных критериев выбора натяга.

Следует отметить, что можно было значение M_0 заранее выбирать из условия обеспечения несущей способности пластины.

Однако, как показывают расчеты, с помощью определения неизвестного оптимального значения M_0 уменьшается сумма квадратов отклонений, т.е. результаты поиска оказываются более уточненными.

5. Заключение. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины и шайбы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Решетов Д.Н.* Состояние и тенденции развития деталей машин // Вестн. машиностроения. 2000. № 10. С. 11–15.
2. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
3. *Мирсалимов В.М.* Некоторые упругопластические задачи для плоскости, ослабленной периодической системой круглых отверстий // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 152–158.
4. *Мирсалимов В.М.* Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных трещин в изотропной среде // ПМТФ. 1978. № 1. С. 164–174.
5. *Мирсалимов В.М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. Баку: Элм, 1984. 124 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Баку

Поступила в редакцию
24.05.2004