

УДК 539.3

© 2006 г. Ф.С. ХАЙРУЛЛИН

**МЕТОД РАСЧЕТА ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С НЕ КОНТАКТИРУЮЩИМИ
НЕПОСРЕДСТВЕННО МЕЖДУ СОБОЙ СЛОЯМИ**

В трехслойных оболочках обычно жесткость заполнителя намного меньше жесткости несущих слоев. Часто возникают случаи, когда заполнитель настолько мягкий, что он фактически не передает нагрузку от одного слоя другому. В этом случае для соединения несущих слоев могут быть использованы жесткие стержневые вкладыши. Если расстояния между соединительными вкладышами довольно большие, то такие конструкции нельзя рассматривать как обычные трехслойные оболочки. При расчете таких конструкций необходимо рассматривать совместную работу оболочечных и стержневых элементов и каждый несущий слой задавать как отдельную оболочку.

Такого же рода задачи возникают при определении напряженно-деформированного состояния рамных конструкций, на которые устанавливаются двухсторонние обшивки.

Введем следующие гипотезы: для оболочек и стержней справедливы гипотезы типа Тимошенко; оболочечные и стержневые элементы жестко соединены между собой; в зонах контакта деформации сдвига оболочек и стержней одинаковые. Для всех элементов конструкции справедлив закон Гука, деформации малы.

Срединные поверхности оболочечных элементов разбиваются на четырехугольные подобласти Ω_k [1] (фиг. 1) таким образом, чтобы стержневые элементы проходили вдоль граничных линий или имели контакты в угловых точках подобластей.

Для решения задачи используется вариационный принцип Лагранжа [2], на основании которого

$$\delta \mathcal{E} = \delta \Pi - \delta A = 0 \tag{1}$$

где \mathcal{E} , Π – соответственно полная энергия и потенциальная энергия деформации кон-

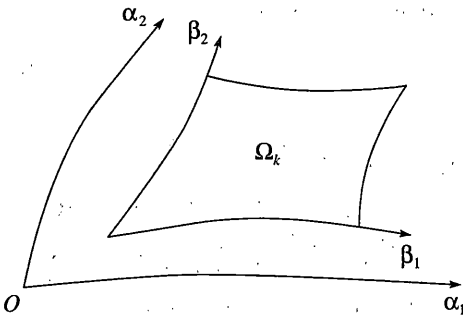
струкции; δA – вариация работы внешних сил; $\Pi = \sum_{k=1}^K \Pi_k^0 + \sum_{i=1}^I \Pi_i^s$; $\Pi_k^0 = \Pi_k^0(\{\mathbf{u}\})$ и

$\Pi_i^s = \Pi_i^s(\{\mathbf{v}\})$ – потенциальные энергии деформации подобласти Ω_k и стержневого элемента с осью λ_i ; $\{\mathbf{u}\} = \{u_1, u_2, w, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}^T$, $\{\mathbf{v}\} = \{v_1, v_2, v_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}^T$ – векторы перемещений и углов поворота соответственно подобласти Ω_k оболочки в ортогональной гауссовой системе координат α_1, α_2 в линиях главной кривизны и стержня в ортогональной криволинейной системе координат, связанной с главными осями инерции стержня; Ψ_3 – средний поворот окрестности рассматриваемой точки вокруг нормали.

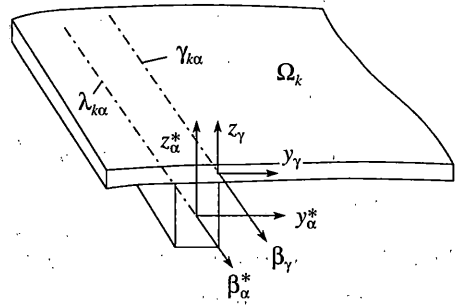
В пределах подобласти искомые функции задаем в глобальной системе координат в виде [1]:

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \{\mathbf{U}_{mn}\} t_m(\beta_1) t_n(\beta_2) \tag{2}$$

где $\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{w}, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2, \tilde{\Psi}_3\}^T$ – вектор перемещений и углов поворота подобласти Ω_k оболочки в глобальной системе координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$; $\{\mathbf{U}_{mn}\} = \{U_{mn}^{(1)}, U_{mn}^{(2)}, U_{mn}^{(3)}, U_{mn}^{(4)}\}$,



Фиг. 1



Фиг. 2

$U_{mn}^{(5)}, U_{mn}^{(6)}\}^T$ – вектор неизвестных постоянных; β_1, β_2 – локальная криволинейная система координат, в которой граничные линии $\gamma_{k\alpha}$ ($\alpha = \overline{1, 4}$) подобласти Ω_k совпадают с координатными линиями $\beta_1 = 0, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_2 = 1$ и координатная сетка на этих линиях равномерная:

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, \quad t_2(\beta_1) = \beta_1, \quad t_m(\beta_1) = t_1(\beta_1)[t_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}) \quad (3)$$

На границах $\gamma_{k\alpha}$ подобласти Ω_k :

$$\{\tilde{u}_\alpha\} = \sum_{m=1}^M \{U_{m\alpha}\} t_m(\beta_1), \quad \{\tilde{u}_{\alpha+2}\} = \sum_{n=1}^N \{U_{\alpha n}\} t_n(\beta_2) \quad (\alpha = \overline{1, 2}) \quad (4)$$

в угловых точках

$$\{\tilde{u}(0, 0)\} = \{U_{11}\}, \quad \{\tilde{u}(1, 0)\} = \{U_{21}\}, \quad \{\tilde{u}(0, 1)\} = \{U_{12}\}, \quad \{\tilde{u}(1, 1)\} = \{U_{22}\}$$

Для определенности предположим, что вдоль всех четырех сторон подобласти Ω_k проходят стержневые элементы, относительно осей $\lambda_{k\alpha}$ которых линии $\gamma_{k\alpha}$ имеют эксцентриситеты a_α, b_α по координатным линиям y_α^*, z_α^* (фиг. 2). Здесь линия z_α^* направлена по нормали к срединной поверхности оболочки, β_α^* – вдоль оси стержня, линии $\beta_\alpha^*, y_\alpha^*, z_\alpha^*$ составляют ортогональную систему координат.

Предполагая, что эксцентриситеты a_α, b_α одного порядка с толщиной оболочки и с поперечными размерами стержней, на основании выше введенных гипотез устанавливаем следующую зависимость между перемещениями граничной линии $\gamma_{k\alpha}$ и соответствующего стержня $\lambda_{k\alpha}$:

$$\{\mathbf{u}_\alpha^*\} = [A_\alpha] \{\mathbf{v}_\alpha^*\}$$

где $\{\mathbf{u}_\alpha^*\}, \{\mathbf{v}_\alpha^*\}$ – векторы перемещений и углов поворота граничной линии $\gamma_{k\alpha}$ и стержня $\lambda_{k\alpha}$ в системе координат $\beta_\alpha^*, y_\alpha^*, z_\alpha^*$ ($\alpha = \overline{1, 4}$):

$$[A_\alpha] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_\alpha & -b_\alpha \\ 0 & 1 & 0 & -a_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В глобальной системе координат это равенство принимает вид:

$$\{\tilde{u}_\alpha\} = [\tilde{A}_\alpha]\{\tilde{v}_\alpha\} \quad (5)$$

$$[\tilde{A}_\alpha] = [C_\alpha]^T [A_\alpha] [C_\alpha], \quad [C_\alpha] = \begin{bmatrix} C_\alpha^* & 0 \\ 0 & C_\alpha^* \end{bmatrix}$$

Здесь $[C_\alpha^*]$ – матрица направляющих косинусов системы координат $\beta_\alpha^* y_\alpha^* z_\alpha^*$ в глобальной системе координат.

Перемещения оси стержня $\lambda_{k\alpha}$ задаем в виде аналогичном (4):

$$\{\tilde{v}_\alpha\} = \sum_{m=1}^M \{V_{\alpha m}\} t_m(\beta_1), \quad \{\tilde{v}_{\alpha+2}\} = \sum_{n=1}^N \{V_{\alpha+2, n}\} t_n(\beta_2) \quad (\alpha = \overline{1, 2}) \quad (6)$$

где $\{V_{\alpha m}\}$, $\{V_{\alpha+2, n}\}$ – векторы неизвестных постоянных. Для сокращения дальнейших выкладок предположим, что $M = N$.

Подставляя формулы (4) и (6) в равенства (5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (\{U_{m\alpha}\} - [\tilde{A}_\alpha]\{V_{\alpha m}\}) t_m(\beta_1) &= 0 \\ \sum_{n=1}^N (\{U_{n\alpha}\} - [\tilde{A}_{\alpha+2}]\{V_{\alpha+2, n}\}) t_n(\beta_2) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Из этих уравнений параметры $\{U_{m\alpha}\}$, $\{U_{n\alpha}\}$, определяющие перемещения граничных линий $\gamma_{k\alpha}$, выражаются через параметры $\{V_{\alpha m}\}$, $\{V_{\alpha+2, n}\}$, определяющие перемещения стержней $\lambda_{k\alpha}$. Эти уравнения разрешаются точно, только если линии $\gamma_{k\alpha}$ и $\lambda_{k\alpha}$ совпадают или они являются прямыми. В этом случае

$$\{U_{m\alpha}\} = [\tilde{A}_\alpha]\{V_{\alpha m}\}, \quad \{U_{n\alpha}\} = [\tilde{A}_{\alpha+2}]\{V_{\alpha+2, n}\} \quad (8)$$

В общем случае параметры $\{U_{m\alpha}\}$, $\{U_{n\alpha}\}$ представляем в виде

$$\{U_{m\alpha}\} = \sum_{i=1}^M [B_{\alpha i}^m]\{V_{\alpha i}\}, \quad \{U_{n\alpha}\} = \sum_{i=1}^N [B_{\alpha+2, i}^n]\{V_{\alpha+2, i}\} \quad (\alpha = \overline{1, 2}) \quad (9)$$

где $[B_{\alpha i}^m]$, $[B_{\alpha+2, i}^n]$ – матрицы неизвестных постоянных.

Подставляя формулы (9) в уравнения (7) и удовлетворяя эти уравнения в дискретных точках $\beta_1 = \beta_{1j}$, $\beta_2 = \beta_{2j}$ ($j = \overline{1, M}$), получаем систему уравнений относительно неизвестных $[B_{\alpha i}^m]$, $[B_{\alpha+2, i}^n]$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M [B_{\alpha i}^m] t_m(\beta_{1j}) &= [\tilde{A}_\alpha(\beta_{1j})] t_i(\beta_{1j}) \\ \sum_{n=1}^N [B_{\alpha+2, i}^n] t_n(\beta_{2j}) &= [\tilde{A}_{\alpha+2}(\beta_{1j})] t_i(\beta_{2j}) \quad (j = \overline{1, M}, i = \overline{1, M}) \end{aligned} \quad (10)$$

Системы уравнений (10) имеют единственное решение, так как определителями этих систем являются определители Вандермонда [3].

Формирование матрицы жесткости конструкции производится поэлементно. Подставляя аппроксимирующие функции (2) в вариационное уравнение (1), после соответствующих преобразований для элемента оболочки Ω_k получаем система уравнений

$$[K_k]\{U_k\} = \{P_k\} \quad (11)$$

где $[K_k]$, $\{P_k\}$ – матрица жесткости и вектор правой части, $\{U_k\} = \{\{U_{11}\}^T, \{U_{12}\}^T, \dots, \{U_{MN}\}^T\}^T$ – вектор неизвестных постоянных для подобласти Ω_k .

Исключая из системы уравнений (11) параметры, определяющие искомые функции внутри подобласти, получим систему уравнений относительно параметров, определяющих искомые функции на границах подобласти Ω_k :

$$[K_k^Y]\{U_k^Y\} = \{P_k^Y\}$$

Здесь $\{U_k^Y\}$ – вектор, составленный из векторов, входящих в аппроксимирующие формулы (4).

В этой системе уравнений для каждой из границ заменяем параметры, определяющие перемещения граничных линий $\gamma_{k\alpha}$, на параметры, определяющие перемещения стержней $\lambda_{k\alpha}$, в соответствии с формулами (9) (в частном случае (8)):

$$[K_k^o]\{V_k^o\} = \{P_k^o\}, \quad [K_k^o] = [B_k]^T [K_k^Y] [B_k], \quad \{P_k^o\} = [B_k]^T \{P_k^Y\} \quad (12)$$

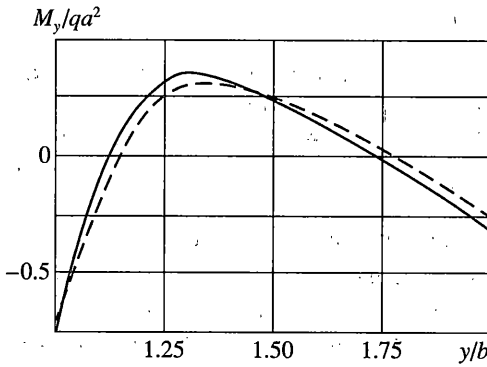
где $[B_k]$ – матрица, составленная из матриц $[B_{\alpha 1}^m]$, $[B_{\alpha+2, 1}^n]$; $\{V_k^o\}$ – вектор, состоящий из векторов $\{V_{\alpha m}\}$, $\{V_{\alpha+2, n}\}$.

Проходя таким образом по всем подобластям Ω_k оболочки и добавляя к полученной матрице жесткости оболочки матрицы жесткости отдельных стержней, приходим к системе уравнений: $[K]\{V\} = \{P\}$. Здесь $[K]$, $\{P\}$ – матрица жесткости и вектор правой части конструкции, $\{V\} = \{\{V_1\}^T, \{V_2\}^T, \dots, \{V_l\}^T\}^T$, $\{V_i\}$ – вектор неизвестных параметров стержня λ_i .

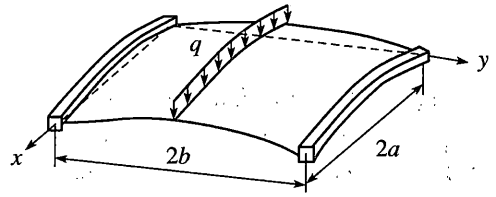
Если вдоль каких-то границ подобластей нет стержневых элементов, то для этих границ вводятся фиктивные стержни с нулевыми жесткостными характеристиками и при формировании глобальной матрицы жесткости соответствующие параметры исключаются.

На основе предложенной методики разработан алгоритм и составлена программа по расчету сложных оболочечно-стержневых конструкций. Для иллюстрации достоверности результатов приводится график (фиг. 3) изгибающего момента M_y в оболочке, средняя поверхность которого имеет форму эллиптического параболоида (фиг. 4). Два края оболочки оперты на криволинейные упругие бруссы, другие два края имеют шарнирное закрепление. Оболочка нагружена нагрузкой, распределенной по линии, приняты следующие числовые параметры: $z = f_1(2 - x/a)x/a + f_2(2 - y/b)y/b$, $f_1 = f_2 = 0.45$ м, $a = b = 6$ м, $h = 0.06$ м, $E = 1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.15$, $b_s = 0.2$ м, $h_s = 0.3$ м, $E_s = 1 \cdot 10^5$ МПа, $q = 60$ кН/м (b_s, h_s – размеры поперечного сечения бруссов). Штриховой линией на графике показаны результаты, приведенные в [4].

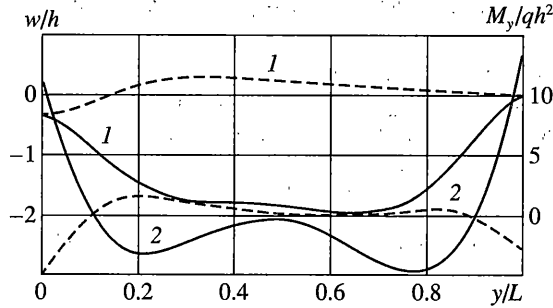
На фиг. 5 приводятся графики прогибов w (кривые 1) и моментов M_y (кривые 2) на верхней (сплошные линии) и нижней (штриховые линии) слоях двухслойной круговой цилиндрической оболочки с регулярной системой продольных (8 стрингеров) и поперечных (3 шпангоута) ребер. На оболочку действует внешнее давление, шарнирное закрепление оболочки осуществляется через шпангоуты, находящиеся на границах оболочки. Координата OY направлена вдоль оси цилиндра. При расчетах полагается, что



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$L = 1$ м, $R = 0.5$ м, $h = 0.01$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0.3$, $b_s = 0.02$ м, $h_s = 0.03$ м, $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа, $q = -1$ МПа, $a_{\pm} = \pm 0.01$ м, $b_{\pm} = 0$, где a_{\pm} , b_{\pm} – эксцентриситеты верхнего и нижнего слоев оболочки. Результаты приведены для линий, проходящих на одинаковом расстоянии от продольных ребер оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хайруллин Ф.С. Метод расчета тонких оболочек сложной формы // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 30–33.
2. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. М.: Наука, 1978. 288 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 832 с.
4. Александров А.В., Лащенков Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы / Под ред. А.Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1983. 488 с.

Набережные Челны

Поступила в редакцию
10.11.2002