

УДК 531.383:532.516

© 2006 г. С.А. АНЦИФЕРОВ, Д.В. КОНДРАТОВ, Л.И. МОГИЛЕВИЧ

**ВОЗМУЩАЮЩИЙ МОМЕНТ В ПОПЛАВКОВОМ МАЯТНИКОВОМ
АКСЕЛЕРОМЕТРЕ НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ
ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ТОРЦЫ**

Рассматривается влияние несимметричности истечения жидкости в торцы на вибрационный возмущающий момент в поплавковом маятниковом акселерометре. Для разрешения данной проблемы ставится задача гидродинамики. В результате решения поставленной задачи найдена постоянная составляющая гидродинамического момента. Приведены расчеты постоянной составляющей гидродинамического момента.

Поплавковые маятниковые акселерометры являются прецизионными приборами систем навигации, и их точность определяет точность всей системы навигации. Требования к точности этих приборов вынуждают исследовать возможные отклонения от идеальных случаев их работы.

Рассматривается поплавковый маятниковый акселерометр, условно представленный на фиг 1.

Корпус 1 прибора является абсолютно жестким телом, содержащим цилиндрическую камеру длины l_1 . Абсолютно жесткий корпус поплавка 2 содержит маятниковую массу 3 на плече L , направленном вертикально вниз. Зазор между стенками поплавка и камеры радиусов R_2 и R_1 полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью 4. Наружная поверхность поплавка и поверхность камеры образуют цилиндр в цилиндре длиной l_2 , l_1 соответственно [1–3]. Радиальный зазор цилиндрической щели $\delta = R_1 - R_2 \ll R_2$. Левый торцевой зазор значительно меньше радиального ($a_1 = (l_1 - l_2)/2 \ll \delta$), а правый торцевой зазор одного порядка с радиальным ($a_2 = O(\delta)$) [4]. Цанговые крепления 5 крепят прибор на рабочем месте, причем опоры поплавка 6 разгружены поддерживающим слоем жидкости.

Пусть система $O_1x_1y_1z_1$ связана с корпусом прибора, а $O_2x_2y_2z_2$ связана с поплавком; x_2, y_2, z_2 – главные оси инерции. При этом центр O_2 совпадает с центром подвеса поплавка, а O_1 совпадает с геометрическим центром камеры.

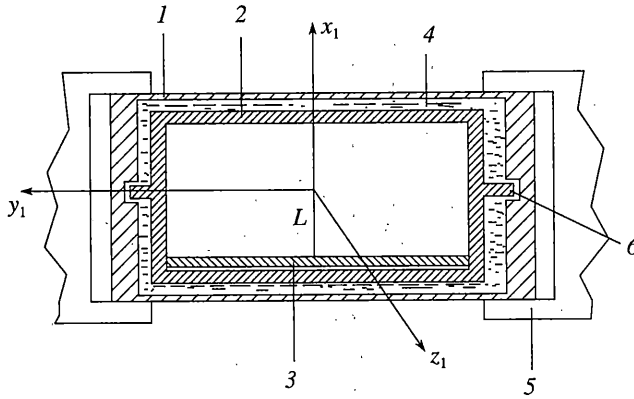
Таким образом, механическая модель поплавкового маятникового акселерометра представляет собой совокупность абсолютно твердых тел 1 и 2 с демпфирующими и сложными динамическими связями между корпусом поплавка 2 и корпусом прибора 1 через опоры 6 и слой жидкости 4.

Угловые смещения n -го тела $O_nx_ny_nz_n$ относительно предыдущего $i = n-1$ -го тела $O_ix_iy_iz_i$ задаются углами Эйлера–Крылова $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$. Поступательные смещения центра масс O_n n -го тела относительно i -го тела $O_ix_iz_i$ задаются величинами x_i, y_i, z_i ($i = n-1, n = 1, 2$).

Введем в рассмотрение матрицы:

$$S_n = \begin{vmatrix} \cos \beta_n \cos \gamma_n & \sin \gamma_n & 0 \\ -\cos \beta_n \sin \gamma_n & \cos \gamma_n & 0 \\ \sin \beta_n & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_{in} = \begin{vmatrix} \cos \beta_n \cos \gamma_n & \cos \alpha_n \sin \gamma_n + \sin \alpha_n \sin \beta_n \cos \gamma_n & \sin \alpha_n \sin \gamma_n - \cos \alpha_n \sin \beta_n \cos \gamma_n \\ -\cos \beta_n \sin \gamma_n & \cos \alpha_n \cos \gamma_n - \sin \alpha_n \sin \beta_n \sin \gamma_n & \sin \alpha_n \cos \gamma_n + \cos \alpha_n \sin \beta_n \sin \gamma_n \\ \sin \beta_n & -\sin \alpha_n \cos \beta_n & \cos \alpha_n \cos \beta_n \end{vmatrix} \quad (1)$$



Фиг. 1

Проекции угловой скорости ω_1 корпуса прибора на свои оси x_1, y_1, z_1 запишутся в виде

$$\begin{vmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{vmatrix} = S_1 \begin{vmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\gamma}_1 \end{vmatrix}, \quad S_1 = S_n \Big|_{n=1} \quad (2)$$

Здесь $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы Эйлера–Крылова поворота корпуса прибора $O_1x_1y_1z_1$ относительно системы $O_0x_0y_0z_0$ не вращающейся в инерциальном пространстве, точка сверху означает дифференцирование по времени t .

Проекции угловой скорости ω_2 поплавка на свои оси x_2, y_2, z_2 равны

$$\begin{vmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{vmatrix} = C_{12} \begin{vmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{vmatrix} + S_2 \begin{vmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\gamma}_1 \end{vmatrix}, \quad C_{12} = C_{in} \Big|_{\substack{i=1 \\ n=1}}, \quad S_2 = S_n \Big|_{n=2} \quad (3)$$

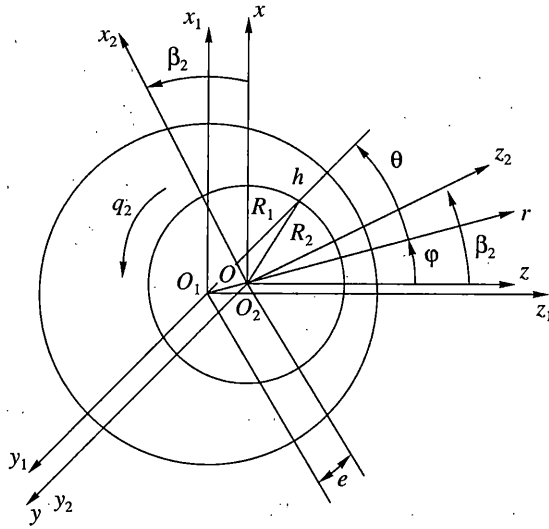
Вектор W_n абсолютного ускорения O_n центра масс n -го тела имеет вид:

$$W_n = W_i + \frac{d\omega_i}{dt} \times r_i + \omega_i(\omega_i \cdot r_i) - \omega_i^2 \cdot r_i + 2\omega_i \times V_n^r + W_n^r \quad (i = n-1) \quad (4)$$

где $W_i = W_{ixi}i + W_{iyi}j + W_{izi}k$ – вектор абсолютного ускорения O_i ; $W_n^r = \ddot{x}_i i + \ddot{y}_i j + \ddot{z}_i k$ – вектор относительного ускорения O_n ; $V_n^r = \dot{x}_i i + \dot{y}_i j + \dot{z}_i k$ – вектор относительной скорости O_n ; $r_i = x_i i + y_i j + z_i k$ – радиус-вектор O_n ; $\omega_i = p_i i + q_i j + r_i k$ – вектор абсолютной угловой скорости системы $O_i x_i y_i z_i$.

Проекции W_n на оси x_i, y_i, z_i будут равны

$$\begin{aligned} W_{nxi} &= W_{ixi} + \dot{q}_i z_i - \dot{r}_i y_i + p_i(p_i x_i + q_i y_i + r_i z_i) - \omega_i^2 x_i + \ddot{x}_i + 2(q_i \dot{z}_i - r_i \dot{y}_i) \\ W_{nyi} &= W_{iei} + \dot{r}_i x_i - \dot{p}_i z_i + q_i(p_i x_i + q_i y_i + r_i z_i) - \omega_i^2 y_i + \ddot{y}_i + 2(r_i \dot{x}_i - p_i \dot{z}_i) \\ W_{nzi} &= W_{izi} + \dot{p}_i y_i - \dot{q}_i x_i + r_i(p_i x_i + q_i y_i + r_i z_i) - \omega_i^2 z_i + \ddot{z}_i + 2(p_i \dot{y}_i - q_i \dot{x}_i) \end{aligned} \quad (5)$$



Фиг. 2

$$\bar{\omega}_i^2 = \omega_i^2 = p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 \quad (i = n - 1, n = 1, 2)$$

Задаются $W_{1x1}, W_{1y1}, W_{1z1}$ – проекции ускорений корпуса прибора на свои оси. Вычисляются по формулам (5) $W_{2x1}, W_{2y1}, W_{2z1}$ – проекции ускорений поплавка на оси прибора. Затем, определяются $W_{2x2}, W_{2y2}, W_{2z2}$ по формуле

$$\begin{pmatrix} W_{2x2} \\ W_{2y2} \\ W_{2z2} \end{pmatrix} = C_{12} \begin{pmatrix} W_{2x1} \\ W_{2y1} \\ W_{2z1} \end{pmatrix}, \quad C_{12} = C_{in} \Big|_{\substack{i=1 \\ n=2}} \quad (6)$$

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, y полюс которой совпадает с O_1 – центром системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Поперечная ось проходит через точки O_1 и O_2 – центр системы координат $O_2x_2y_2z_2$, движущейся в плоскости $O_1x_1z_1$, и наклонена под углом ϕ к оси O_1z_1 . Эксцентриситет O_1O_2 обозначим через e . Оси декартовой системы координат O_2x_2, O_2z_2 повернуты на угол β_2 относительно O_1x_1, O_1z_1 в данный момент времени (фиг. 2).

Закон движения основания (корпуса прибора) относительно инерциальной системы координат имеет вид гармонических функций [3]:

$$x_0(t) = E_x f_{x0}(\omega t), \quad y_0(t) \equiv 0, \quad z_0(t) = E_z f_{z0}(\omega t)$$

$$f_{x0}(\omega t) = \sin(\omega t + \phi_{x0}), \quad f_{z0}(\omega t) = \sin(\omega t + \phi_{z0})$$

а закон движения центра подвеса поплавка относительно камеры запишется в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{1m} f_{x1}(\omega t), \quad y_1(t) \equiv 0, \quad z_1(t) = z_{1m} f_{z1}(\omega t) \\ f_{x1}(\omega t) &= \sin(\omega t + \phi_{x1}), \quad f_{z1}(\omega t) = \sin(\omega t + \phi_{z1}) \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь E_x, E_z, x_{1m}, z_{1m} – амплитуды колебаний корпуса прибора и поплавка, ω – частота колебаний.

Для определения сил и моментов, действующих со стороны слоя вязкой несжимаемой жидкости на поплавков, необходимо рассмотреть абсолютное ускорение жидкости в камере между стенками корпуса прибора и поплавком. Абсолютное ускорение единицы объема жидкости в камере имеет вид

$$\mathbf{W}_4 = \mathbf{W}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_1 (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{r}) - \boldsymbol{\omega}_1^2 r + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

где ∇ – оператор Гамильтона; $\mathbf{r} = r \cdot \mathbf{n}_r + y \cdot \mathbf{j}$ – радиус-вектор центра масс частицы относительно полюса O_1 цилиндрической системы координат; $\mathbf{V} = V_r \mathbf{n}_r + V_\theta \mathbf{n}_\theta + V_y \mathbf{j}$ – скорость жидкости относительно камеры в проекциях на оси r, θ, y ; $\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{j}$ – орты базиса цилиндрической системы координат r, θ, y .

Рассмотрим движение жидкости, окружающей поплавков в поплавковой камере. Уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности для вязкой несжимаемой жидкости с учетом переносного движения основания поплавкового маятникового акселерометра в выбранной системе координат r, θ, y , жестко связанной с центром поплавковой камеры примут форму:

$$\mathbf{W}_4 = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{8}$$

Здесь P – давление жидкости, $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости, ν – кинематический коэффициент вязкости жидкости, Δ – оператор Лапласа.

Граничные условия на непроницаемых поверхностях поплавка и камеры в цилиндрической щели будут равны

$$\begin{aligned} V_r = V_\theta = V_y = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2 + \delta \\ V_r = \dot{z}_1 \cos(\theta + \varphi) + \dot{x}_1 \sin(\theta + \varphi) \\ V_\theta = -\dot{z}_1 \sin(\theta + \varphi) + \dot{x}_1 \cos(\theta + \varphi) + (R_2 + e \cos \theta) \dot{\beta}_2, \quad V_y = 0 \quad \text{при} \quad r = R_2 + e \cos \theta \end{aligned} \tag{9}$$

В торцевых щелях слева и справа граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} V_r = V_\theta = V_y = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2/2 + a_l \quad \text{и} \quad y = -l_2/2 - a_r \\ V_r = \dot{z}_1 \cos(\theta + \varphi) + \dot{x}_1 \sin(\theta + \varphi) \\ V_\theta = -\dot{z}_1 \sin(\theta + \varphi) + \dot{x}_1 \cos(\theta + \varphi) + (R_2 + e \cdot \cos \theta) \dot{\beta}_2 \\ V_y = 0 \quad \text{при} \quad y = l_2/2 \quad \text{и} \quad y = -l_2/2 \end{aligned} \tag{10}$$

Кроме того, необходимы условия согласования давления и расхода жидкости при переходе от цилиндрической щели в торцевые слева и справа

$$P_C|_{Y=\pm l_2/2} = P_E|_{r=R_2+e \cos \theta}, \quad \int_{R_2+e \cos \theta}^{R_2+\delta} V_Y \Big|_{Y=\pm l_2/2} dr = - \int_{\pm l_2/2}^{\pm l_2/2+a} V_r \Big|_{r=R_2+e \cos \theta} dy$$

где индекс C – относится к цилиндрической щели, а E – к торцевой щели, $+a = +a_r, -a = -a_r$.

Перейдем к безразмерным переменным [3]:

$$\begin{aligned} \xi = (r - R_2)/\delta, \quad \theta = \theta, \quad \tau = \omega t, \quad \zeta = 2y/l_2, \quad \lambda = e/\delta, \quad \psi = \delta/R_2 \ll 1 \\ V_r = e\omega U_\xi, \quad V_\theta = (e\omega/\psi) U_\theta, \quad V_y = (e\omega/\psi)(l_2/2R_2) U_\zeta \end{aligned}$$

$$p = P_0 + \frac{\rho v \lambda \omega}{\psi^2} \cdot P - \rho W_1 \cdot r - \frac{1}{2} \rho [(\omega_1 \cdot r)^2 - \omega_1^2 \cdot r^2]$$

где p_0 – уровень отсчета давления, P – редуцированное безразмерное давление жидкости, W_1 – абсолютное ускорение центра масс корпуса поплавка.

Подставим в уравнения динамики жидкости и граничные условия решение в виде однокленного разложения по малому параметру ψ , характеризующему относительную ширину цилиндрического зазора, и двучленному разложению по малому параметру λ называемому относительным эксцентриситетом, т.е.

$$P = P_0 + \lambda P_1 + \dots, \quad U_\xi = U_{\xi 0} + \lambda U_{\xi 1} + \dots$$

$$U_\theta = U_{\theta 0} + \lambda U_{\theta 1} + \dots, \quad U_\zeta = U_{\zeta 0} + \lambda U_{\zeta 1} + \dots$$

получим две задачи: в нулевом приближении по ψ и нулевом приближении по λ , и в нулевом приближении по ψ и первом приближении по λ . Решая задачу в нулевом приближении по ψ и по λ , получим выражения для давления и скоростей жидкости

$$P_0 = \operatorname{Re} \left\{ T_1 \frac{\operatorname{ch} \sigma (\zeta - 1)}{\operatorname{ch} \sigma} + \frac{6v}{\varepsilon^2} \left[\frac{\dot{z}_1}{e\omega} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\dot{x}_1}{e\omega} \sin(\theta + \varphi) \right] + \right. \\ \left. + w \left[\frac{\ddot{z}_1}{e\omega} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\ddot{x}_1}{e\omega} \sin(\theta + \varphi) \right] - \left(\sigma \zeta - 2 \frac{\operatorname{sh} \sigma \zeta}{\operatorname{ch} \sigma} \right) \left[\frac{\dot{p}_1}{\lambda \omega^2} \cos(\theta + \varphi) - \frac{\dot{r}_1}{\lambda \omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] \right\}$$

$$U_{\theta 0} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{\partial P_0}{\partial \theta} L_2(\xi) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right) L_1(\xi) \right] - \left(L_2(\xi) + L_1(\xi) \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(2\sigma \zeta \left[\frac{\dot{p}_1}{\lambda \omega^2} \sin(\theta + \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\dot{r}_1}{\lambda \omega^2} \cos(\theta + \varphi) \right] - \frac{2\dot{q}_1}{\lambda \omega^2} \right) - \frac{2\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega} L_3(\xi) + \frac{2\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega^2} L_4(\xi)$$

$$U_{\zeta 0} = \frac{2}{\operatorname{Re} \sigma^2} \left[\frac{\partial P_0}{\partial \zeta} L_2(\xi) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \right) L_1(\xi) \right] - \left(L_2(\xi) + L_1(\xi) \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{2}{\sigma} \left[\frac{p_1}{\lambda \omega^2} \sin(\theta + \varphi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r_1}{\lambda \omega^2} \cos(\theta + \varphi) \right] \right) - \frac{2\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega^2} L_3(\xi) + \frac{2\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega^2} L_4(\xi)$$

$$v = -\varepsilon^2 f / [6(d^2 + f^2)], \quad w = d / (d^2 + f^2)$$

$$d = 1 - \frac{\operatorname{sh} \varepsilon + \sin \varepsilon}{\varepsilon (\operatorname{ch} \varepsilon + \cos \varepsilon)}, \quad f = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon (\operatorname{ch} \varepsilon + \cos \varepsilon)}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\operatorname{Re}}{2}}$$

$$U_{\xi 0} = \int_{\xi}^1 \left[\frac{\partial U_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial U_{\zeta 0}}{\partial \zeta} \right] d\xi, \quad U_{\xi 0} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1$$

Здесь $T_1 = T_1(\tau, \theta)$ – произвольная функция интегрирования; F_i – функции А.Н. Крылова.

$$L_1(\xi) = \frac{1}{2A} \{ [1 - F_1(\varepsilon \xi)] + F_2(\varepsilon \xi) B - 4F_4(\varepsilon \xi) C \}$$

$$L_2(\xi) = \frac{1}{A} \{ F_3(\varepsilon \xi) A - F_4(\varepsilon \xi) B - 4F_2(\varepsilon \xi) C \}$$

$$L_3(\xi) = \frac{1}{2A} \{-F_1(\varepsilon\xi)A + F_2(\varepsilon\xi)[B + F_2(\varepsilon)] - 4F_4(\varepsilon\xi)[C - F_4(\varepsilon)]\}$$

$$L_4(\xi) = \frac{1}{A} \{F_3(\varepsilon\xi)A - F_4(\varepsilon\xi)[B + F_2(\xi)] - F_2(\varepsilon\xi)[C - F_4(\varepsilon)]\}$$

$$A = F_2^2(\varepsilon) + 4F_4^2(\varepsilon), B = 4F_3(\varepsilon)F_4(\varepsilon) + F_1(\varepsilon)F_2(\varepsilon) - F_2(\varepsilon)$$

$$C = F_2(\varepsilon)F_3(\varepsilon) - F_1(\varepsilon)F_4(\varepsilon) + F_4(\varepsilon)$$

$$F_1(\varepsilon\xi) = \operatorname{ch}\varepsilon\xi \operatorname{cose}\xi, \quad F_2(\varepsilon\xi) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\varepsilon\xi \sin\varepsilon\xi + \operatorname{sh}\varepsilon\xi \operatorname{cos}\varepsilon\xi)$$

$$F_3(\varepsilon\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\varepsilon\xi \sin\varepsilon\xi, \quad F_4(\varepsilon\xi) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\varepsilon\xi \sin\varepsilon\xi - \operatorname{sh}\varepsilon\xi \operatorname{cos}\varepsilon\xi)$$

$$\varepsilon = \delta\sqrt{\omega/(2\nu)}, \quad F_1(\varepsilon\xi), F_2(\varepsilon\xi), F_3(\varepsilon\xi), F_4(\varepsilon\xi)$$

Кроме того, запишем условия согласования давления и расхода жидкости в безразмерных переменных:

$$\int_0^1 U_{\zeta 0}|_{\zeta=1} d\zeta = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=1} = \operatorname{Re} \sigma \left[\frac{\dot{p}_1}{\lambda\omega^2} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\dot{r}_1}{\lambda\omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] \quad \text{при} \quad \zeta = 1$$

$$P = \operatorname{Re} \sigma \left[\frac{\dot{p}_1}{\lambda\omega^2} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\dot{r}_1}{\lambda\omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] \quad \text{при} \quad \zeta = -1$$

Необходимо решить аналогичные задачи в торцевых щелях. Так как торцевые щели различны, то для каждой из них ставится отдельная задача.

Решим задачу для левой торцевой щели, для этого перейдем к следующим безразмерным $\eta = r/R_2$, $\tau = \omega t$, $y = l_2/2 + a_1\gamma$, $\theta = \theta$.

Записывая и решая уравнения динамики жидкости с граничными условиями в данных безразмерных переменных, получим соответственно в нулевом и в первом приближении по ψ :

$$P^0 = 0, \quad U_{\gamma}^0 = 0, \quad U_{\theta}^0 = \eta(1-\gamma)\frac{\dot{\beta}_2}{\lambda\omega}, \quad U_{\eta}^0 = \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma)\frac{\partial P^0}{\partial \eta}$$

$$U_{\eta}^1 = \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma)\frac{\partial P^1}{\partial \eta} + \operatorname{Re} \frac{1}{\psi\delta^2} \left\{ \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma)\sigma \left[\frac{\dot{p}_1}{\lambda\omega^2} \cos(\theta + \varphi) - \frac{\dot{r}_1}{\lambda\omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] - \right.$$

$$\left. -\lambda \left[\eta \left(\frac{2}{3}\gamma - \gamma^2 + \frac{\gamma^3}{3} \right) \frac{\dot{\beta}_2^2}{\lambda^2\omega^2} + \frac{2q_1}{\lambda\omega} \eta \frac{1}{2}(\gamma - \gamma^2) \frac{\dot{\beta}_2}{\lambda\omega} \right] \right\} + (1-\gamma) \left(\frac{\dot{z}_1}{e\omega} \sin(\theta + \varphi) + \frac{\dot{x}_1}{e\omega} \cos(\theta + \varphi) \right)$$

$$U_{\theta}^1 = \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma)\frac{1}{\eta}\frac{\partial P^1}{\partial \theta} + \operatorname{Re} \frac{1}{\psi\delta^2} \left\{ \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma)\eta \frac{\dot{q}_1}{\lambda\omega^2} - \frac{1}{2}(\gamma^2 - \gamma)\sigma \left[\frac{\dot{p}_1}{\lambda\omega^2} \sin(\theta + \varphi) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{r}_1}{\lambda\omega^2} \cos(\theta + \varphi) \right] - \eta \left(\frac{2}{3}\gamma - \gamma^2 + \frac{\gamma^3}{3} \right) \frac{\dot{\beta}_2}{\lambda\omega^2} \right\} + (1-\gamma) \left(-\frac{\dot{z}_1}{e\omega} \sin(\theta + \varphi) + \frac{\dot{x}_1}{e\omega} \cos(\theta + \varphi) \right)$$

$$U_{\gamma}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{3} \right) \Delta P^1 + \frac{\operatorname{Re} a^2}{\Psi \delta^2} \left\{ 2\lambda \left(\frac{\gamma^2}{3} - \frac{\gamma^3}{3} + \frac{\gamma^4}{12} \right) \frac{\dot{\beta}_2^2}{\lambda^2 \omega^2} + \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{3} \right) \frac{q_1 \beta_2}{\lambda^2 \omega^2} \right\}$$

$$P^1 = - \frac{\operatorname{Re} a^2 \lambda \eta^2}{\Psi \delta^2} \left[\frac{\dot{\beta}_2^2}{\lambda^2 \omega^2} + \frac{2q_1 \dot{\beta}_2}{\lambda^2 \omega^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\eta^n} [\tilde{C}_n \cos n(\theta + \varphi) + \tilde{C}_n \sin n(\theta + \varphi)] + \right.$$

$$\left. + \eta^n [\tilde{D}_n \cos n(\theta + \varphi) + \tilde{D}_n \sin n(\theta + \varphi)] \right\}$$

где произвольные функции интегрирования \tilde{C}_n , \tilde{C}_n , \tilde{D}_n , \tilde{D}_n определяются из условий согласования давления и расхода жидкости при переходе из цилиндрической щели в торцевые

$$\Psi \frac{\delta^2}{a_l^2} P^1 \Big|_{\eta=1} = P_0 \Big|_{\zeta=1}$$

Тогда выражение для P^1 в окончательной форме примет вид

$$P^1 = - \frac{\operatorname{Re} a_l^2 \lambda \eta^2}{\Psi \delta^2} \left[\frac{\dot{\beta}_2^2}{\lambda^2 \omega^2} + \frac{2q_1 \dot{\beta}_2}{\lambda^2 \omega^2} \right] + \left\{ 2E \operatorname{Re} \theta \operatorname{th} 2\sigma (f\tilde{d} - f\tilde{d}) \times \right.$$

$$\times \left[\frac{P_1}{\lambda \omega} \cos(\theta + \varphi) - \frac{r_1}{\lambda \omega} \sin(\theta + \varphi) \right] + \operatorname{Re} \left[2E \left[(f^2 + d^2) \operatorname{th} \left(2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - (f\tilde{f} + d\tilde{d}) \right) \right] \operatorname{th} \sigma \operatorname{th} 2\sigma + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\operatorname{th} \sigma}{\operatorname{ch} 2\sigma} + 2 \operatorname{th} \sigma - \sigma \right] \left[\frac{\dot{P}_1}{\lambda \omega^2} \cos(\theta + \varphi) - \frac{\dot{r}_1}{\lambda \omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] - \operatorname{Re} \left[E \operatorname{th} 2\sigma (d \operatorname{th} 2\sigma - \tilde{d}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\operatorname{ch} 2\sigma} - 1 \right) \frac{\sigma v}{\varepsilon^2} \right] \left[\frac{\dot{z}_1}{e \omega} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\dot{x}_1}{e \omega} \sin(\theta + \varphi) \right] + \operatorname{Re} \left[E \operatorname{th} 2\sigma \left(d \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - \tilde{d} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} 2\sigma} \right) \omega \right] \left[\frac{\ddot{z}_1}{e \omega^2} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\ddot{x}_1}{e \omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] \left\} \frac{a_l^2}{\delta^2} \frac{1}{\Psi}$$

$$E = \frac{(\delta/a)/\operatorname{ch} 2\sigma}{(d^2 + f^2) \operatorname{th}^2 2\sigma \delta^6/a^6 + (d_1^2 + f_1^2) \delta^4/a^4 - 2(ff_1 + dd_1) \operatorname{th} 2\sigma \delta/a}$$

Далее находим силы, действующие на поплавок. Получаем, что силы в левой торцевой щели малы по сравнению с реакциями, действующими в цилиндрической щели. Однако моментом в левой торцевой щели, влияющим на динамику поплавка, пренебрегать нельзя, так как он превосходит момент, действующий в цилиндрической щели

$$L_{yl} = - \frac{\pi}{2} \rho R_2^4 \frac{v}{a_l} \left[\dot{\beta}_2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \Psi \left(\dot{q}_1 + \frac{2\dot{\beta}_2}{3\omega} \right) \right]$$

Далее решаем задачу в правой торцевой щели ($a_r \delta = O(1)$). По аналогии с задачей в левой торцевой щели, получаем в нулевом приближении по ψ :

$$U_{\eta 0} = \frac{L_{11}(\gamma)}{\tilde{\varepsilon}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \tilde{P}_{T0}}{\partial \eta} \right) + \frac{L_{21}(\gamma)}{\tilde{\varepsilon}^2} \frac{\partial \tilde{P}_{T0}}{\partial \eta}$$

$$U_{\theta 0} = \frac{L_{21}(\gamma)}{\tilde{\varepsilon}^2 \eta} \frac{\partial \tilde{P}_{T0}}{\partial \theta} + \frac{L_{21}(\gamma)}{\tilde{\varepsilon}^2 \eta} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tilde{P}_{T0}}{\partial \theta} \right) - \frac{2\eta q_1}{\lambda \omega} L_{11}(\gamma) + \frac{2\eta \dot{q}_1}{\lambda \omega^2} L_{21}(\gamma) -$$

$$- \frac{2\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega} L_{31}(\gamma) + \frac{2\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega^2} L_{41}(\gamma)$$

$$U_{\gamma 0} = 0, \quad \tilde{\varepsilon}^2 = \frac{\operatorname{Re} a_r^2}{2 \delta^2}, \quad \frac{a_r}{\delta} = O(1)$$

$$P_{T0} = -\sigma \operatorname{Re} \frac{a^2}{\delta^2} \eta \left[\frac{\dot{P}_1}{\lambda \omega^2} \cos(\theta + \varphi) - \frac{\dot{r}_1}{\lambda \omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] + \tilde{P}_{T0}$$

Решение для \tilde{P}_{T0} получим в виде

$$\tilde{P}_{T0} = [a_1 \cos(\theta + \varphi) + b_1 \sin(\theta + \varphi)] \eta$$

где a_1, b_1 – произвольные функции интегрирования от τ .

Удовлетворяя условиям согласования:

$$P|_{\zeta=-1} = \frac{\delta^2}{a^2} P_T|_{\eta=1+\lambda\psi\cos\theta} \quad \text{и} \quad \sigma \frac{\delta}{a_l} \int_{\lambda\cos\theta}^1 U_\zeta|_{\zeta=1} d\xi = - \int_1^0 U_\eta^{(0)}|_{\eta=1+\lambda\cos\theta} d\gamma$$

получаем выражений для давлений в цилиндрических щелях:

$$P_{T0} = 4E \operatorname{sh}^2 \sigma (\tilde{f}d - f\tilde{d}) \frac{a^2}{\delta^2} \operatorname{Re} \eta \left[\frac{P_1}{\lambda \omega} \cos(\theta + \varphi) - \frac{r_1}{\lambda \omega} \sin(\theta + \varphi) \right] +$$

$$+ \frac{a^2}{\delta^2} \operatorname{Re} \eta \left(4E \operatorname{sh}^2 \sigma \left[(f^2 + d^2) \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - (f\tilde{f} + d\tilde{d}) \right] + \sigma \right) \left[\frac{P_1}{\lambda \omega^2} \cos(\theta + \psi) - \right.$$

$$\left. - \frac{\dot{r}_1}{\lambda \omega^2} \sin(\theta + \psi) \right] - E \operatorname{sh} 2\sigma \left(f \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^3}{a^3} \right) \operatorname{Re} \eta \left[\frac{\dot{z}_1}{e\omega} \cos(\theta + \psi) + \frac{\dot{x}_1}{e\omega} \sin(\theta + \psi) \right] +$$

$$+ E \operatorname{sh} 2\sigma \left(d \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^3}{a^3} - \tilde{d} \frac{a^2}{\delta^2} \right) \operatorname{Re} \eta \left[\frac{\ddot{z}_1}{e\omega^2} \cos(\theta + \psi) + \frac{\ddot{x}_1}{e\omega^2} \sin(\theta + \psi) \right]$$

$$P_0 = \operatorname{Re} \left(2E(\tilde{f}d - f\tilde{d}) \operatorname{th} \sigma \operatorname{th} 2\sigma \operatorname{ch} \sigma (\zeta - 1) \left[\frac{P_1}{\lambda \omega} \cos(\theta + \varphi) - \frac{r_1}{\lambda \omega} \sin(\theta + \varphi) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[2E \left[(f^2 + d^2) \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - (f\tilde{f} - d\tilde{d}) \right] \operatorname{sh} 2\sigma + 2 \right) \frac{\operatorname{th} \sigma}{\operatorname{ch} 2\sigma} \operatorname{ch} \sigma (\zeta - 1) - \sigma \zeta + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\operatorname{sh} \sigma \zeta}{\operatorname{ch} \sigma} \right] \left[\frac{\dot{P}_1}{\lambda \omega^2} \cos(\theta + \varphi) - \frac{\dot{r}_1}{\lambda \omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right] - \left[E \operatorname{th} 2\sigma \left(f \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - \tilde{f} \right) \times \right.$$

$$\times \operatorname{ch} \sigma(\zeta - 1) + \frac{6\nu}{\varepsilon^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \sigma(\zeta - 1)}{\operatorname{ch} 2\sigma} - 1 \right) \left[\frac{\dot{z}_1}{e\omega} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\dot{x}_1}{e\omega} \sin(\theta + \varphi) \right] +$$

$$+ \left[E \operatorname{th} 2\sigma \left(d \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - \tilde{d} \right) \operatorname{ch} \sigma(\zeta - 1) + w \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sigma(\zeta - 1)}{\operatorname{ch} 2\sigma} \right) \right] \left(\frac{\ddot{z}_1}{e\omega^2} \cos(\theta + \varphi) + \frac{\ddot{x}_1}{e\omega^2} \sin(\theta + \varphi) \right)$$

При этом силы в правой торцевой щели, также как и в левой, малы по сравнению с реакциями, действующими в цилиндрической щели. Момент, влияющий со стороны правой торцевой щели того же порядка, что и в цилиндрической и имеет вид:

$$L_y = -\frac{\rho R_2^4 \nu e \omega}{\psi a} \left[-\frac{q_1}{\lambda \omega} L_{11}^1(\gamma) + \frac{\dot{q}_1}{\lambda \omega^2} L_{21}^1(\gamma) - \frac{\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega} L_{31}^1(\gamma) + \frac{\ddot{\beta}_2}{\lambda \omega^2} L_{41}^1(\gamma) \right].$$

Вычислим U_{θ_0} , U_{ξ_0} , U_{ζ_0} для цилиндрической щели и гидродинамические силы, действующие на поплавок

$$N_{2x1}^1 = m W_{1xm} \frac{d^2 f_{x0}(\tau)}{d\tau^2} - \frac{\rho R_2 e \omega}{\psi \operatorname{Re}} \int_0^1 \int_{-1}^1 P \sin(\theta + \varphi) \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta =$$

$$= m \ddot{x}_0 - m \omega R_2 E' r_1 - m R_2 E'' \dot{r}_1 - K' \dot{x}_1 - M' \ddot{x}_1$$

$$N_{2z1}^1 = m W_{1zm} \frac{d^2 f_{z0}(\tau)}{d\tau^2} - \frac{\rho R_2 e \omega}{\psi \operatorname{Re}} \int_0^1 \int_{-1}^1 P \cos(\theta + \varphi) \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta =$$

$$= m \ddot{z}_0 - m \omega R_2 E' p_1 - m R_2 E'' \dot{p}_1 - K' \dot{z}_1 - M' \ddot{z}_1$$

$$W_{1x1} = \ddot{x}_0 = W_{1xm} \frac{d^2 f_{x0}(\tau)}{d\tau^2}, \quad W_{1z1} = \ddot{z}_0 = W_{1zm} \frac{d^2 f_{z0}(\tau)}{d\tau^2}$$

$$E' = E(f d_1 - f_1 d) \operatorname{th} 2\sigma \frac{\operatorname{sh} 2\sigma}{\sigma}$$

$$E'' = \left(E \left[(f f_1 - d d_1) - (f^2 + d^2) \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} \right] \operatorname{sh} 2\sigma - 1 \right) \frac{\operatorname{th} \sigma \operatorname{th} 2\sigma}{\sigma}$$

$$K' = -\frac{m \omega}{2\psi} E \operatorname{th} 2\sigma \left(f \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - f_1 \right) \frac{\operatorname{sh} 2\sigma}{\sigma} + \frac{m \omega}{\psi \operatorname{Re}} 12\nu \left(1 - \frac{\operatorname{th} 2\sigma}{2\sigma} \right)$$

$$M' = \frac{m}{2\psi} E \operatorname{th} 2\sigma \left(d \operatorname{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - d_1 \right) \frac{\operatorname{sh} 2\sigma}{\sigma} + \frac{m}{\psi} w \left(1 - \frac{\operatorname{th} 2\sigma}{\sigma} \right)$$

Тогда уравнения поступательного движения поплавка в нулевом приближении по λ запишутся в следующем виде:

$$(m_2 + M') \ddot{x}_1 + K' \dot{x}_1 + n_{x1} x_1 = \Delta m \ddot{x}_0 - m \omega R_2 E' r_1 - m R_2 E'' \dot{r}_1$$

$$(m_2 + M')\ddot{z}_1 + K'z_1 + n_{z1}z_1 = \Delta m\ddot{z}_0 - m\omega R_2 E' p_1 - mR_2 E' \dot{p}_1$$

$$\Delta m = m - m_2$$

Принимаем $x_1, z_1, x_0, z_0, p_1, r_1$ в виде гармонических функций, т.е.

$$x_1 = x_{1m} \sin(\tau + \varphi_{x1}), \quad z_1 = z_{1m} \sin(\tau + \varphi_{z1}), \quad x_0 = E_x \sin(\tau + \varphi_{x0})$$

$$z_0 = E_z \sin(\tau + \varphi_{z0}), \quad p_1 = p_{1m} \sin(\tau + \varphi_{p1}), \quad r_1 = r_{1m} \sin(\tau + \varphi_{r1})$$

Решая аналогичными методами задачу в первом приближении по λ , получим выражение для момента и его постоянной составляющей

$$L_{2y2} = L_{2y2}^{(0)} + \lambda L_{2y2}^{(1)} = \frac{\rho R_2 e^2 \omega^2}{\psi \operatorname{Re} \lambda} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\partial U_{\theta 0}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta + \right. \\ \left. + \lambda \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial U_{\theta 1}}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial^2 U_{\theta 0}}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi=0} \frac{l_2}{2} d\zeta R_2 d\theta \right\}$$

$$\langle L_{2y2} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{2y2} d\tau$$

Подставляя решения, полученные ранее в выражение для постоянной составляющей, будем иметь

$$\langle L_{2y2} \rangle = \frac{m\omega^6 \Delta m^2}{\psi \operatorname{Re}} E_x E_z (D_2 \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{x0}) + \operatorname{KK} \omega \operatorname{NN}_1 \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{x0})) \times \\ \times \operatorname{Kos}_1 + \frac{1}{16} \frac{m\omega^3 \Delta m}{\psi} E_x p_{1m} (\operatorname{Kos}_4 \cos(\varphi_{x0} - \varphi_{p1}) - \operatorname{Kos}_2 \sin(\varphi_{x0} - \varphi_{p1})) + \\ + \frac{1}{16} \frac{m\omega^3 \Delta m}{\psi} E_z r_{1m} (\operatorname{Kos}_6 \cos(\varphi_{z0} - \varphi_{r1}) - \operatorname{Kos}_5 \sin(\varphi_{z0} - \varphi_{r1})) + \\ + p_{m1} r_{m1} \left[\left(\frac{m\delta^2 v_{12}}{\psi \operatorname{Re}} \operatorname{Sg}_7 + \frac{m^2 R_2}{\psi} \operatorname{AS}_1 \right) \sin(\varphi_{p1} - \varphi_{r1}) + \frac{1}{16} \frac{m^2 \omega R_2}{\psi} \operatorname{Kos}_8 \cos(\varphi_{p1} - \varphi_{r1}) \right]$$

$$D_{z1} = (n_{z1} - (m_2 + \operatorname{MM})\omega^2)^2 + \operatorname{KK}^2 \omega^2, \quad \operatorname{ITD}_{z1} = n_{z1} - (m_2 + \operatorname{MM})\omega^2$$

$$D_{x1} = (n_{x1} - (m_2 + \operatorname{MM})\omega^2)^2 + \operatorname{KK}^2 \omega^2, \quad \operatorname{ITD}_{x1} = n_{x1} - (m_2 + \operatorname{MM})\omega^2$$

$$\operatorname{Kos}_1 = \frac{w_{23} \operatorname{Re} \sigma + \operatorname{sh}(2\sigma) \operatorname{Ps}_2 \operatorname{Re} + \operatorname{Ep}_1 \sigma}{\sigma}, \quad D_2 = \frac{\operatorname{ITD}_{z1} \operatorname{ITD}_{x1} + (\operatorname{KK} \omega)^2}{D_{z1} D_{x1}}$$

$$\operatorname{Ep}_1 = v_e + \frac{\operatorname{sh}(2\sigma) w_e}{2\sigma}, \quad \operatorname{NN}_1 = \frac{-\operatorname{ITD}_{x1} + \operatorname{ITD}_{z1}}{D_{z1} + D_{x1}}, \quad \operatorname{Jk}_5 = \frac{S_k \operatorname{ITD}_{x1} - \operatorname{Sg}_3 \operatorname{KK} \omega}{D_{x1}}$$

$$C_4 = \frac{\operatorname{KK} \omega R + Q \operatorname{ITD}_{x1}}{D_{x1}}, \quad \operatorname{GF}_1 = \frac{T_1 \operatorname{ITD}_{x1} - \operatorname{KK} \omega T_2}{D_{x1}}, \quad \operatorname{Sg}_3 = -4 \operatorname{sh} \sigma^2 \operatorname{PSg}_1 + \operatorname{Sg}_4 \operatorname{KK}_2$$

$$S_k = Sg_4KK_1 + 4\text{sh}^2\sigma QSg_1, \quad RPV = \frac{Ep_1}{Re} + Rs_1, \quad Rs_1 = \frac{\text{sh}(2\sigma)Ps_2}{\sigma} + W_{23}$$

$$Ep_1 = \frac{\text{sh}(2\sigma)w_e}{2\sigma} + v_e, \quad Kos_2 = \frac{16\omega Kkos_3R_2mRPV\sigma + Kkos_2\delta d\sigma + 8GF_1\delta\text{sh}(2\sigma)}{\sigma}$$

$$KKos_2 = 4C_4\text{th}\sigma Sg_2 + Jk_5, \quad Kkos_3 = EE_1KK\omega^2NN_1 + D_2EE_2$$

$$Kos_4 = -16\omega^2mR_2RPVD_2EE_1 + 16\omega^2mR_2RPVITD_{z1}NN_1KKEE_2 +$$

$$+ 4d\delta C_2\text{th}\sigma Sg_2 - d\delta Ty_2 + 8Ty_1\delta\frac{\text{sh}2\sigma}{\sigma}, \quad Ty_2 = \frac{Sg_3ITD_{x1} - S_kKK\omega}{D_{x1}}$$

$$Ty_1 = \frac{T_2ITD_{x1} + T_1KK\omega}{D_{x1}}, \quad C_2 = \frac{ITD_{x1}P + QKK\omega}{D_{x1}}, \quad KK = K'$$

$$Kos_5 = (16RPVR_2m\omega D_2EE_2\sigma D_{z1} + 8J_5\text{sh}(2\sigma)\delta D_{z1} -$$

$$- 16NN_1KK\omega^3RPVR_2mEE_1\sigma D_{z1} + 4d\delta\sigma J_6\text{th}\sigma Sg_2D_{z1} +$$

$$+ d\delta\sigma Sg_3KK\omega - d\delta\sigma ITD_{z1}Sg_4KK_1 + 4d\delta\sigma ITD_{z1}\text{sh}^2\sigma QSg_1)/(\sigma D_{z1})$$

$$Kos_6 = 8AZ\delta\frac{\text{sh}2\sigma}{\sigma} - 16m\omega^2RPVR_2D_2EE_1 - 16m\omega^2RPVKKR_2EE_2NN_1 +$$

$$+ 4d\delta C_1Sq_2\text{th}\sigma - \delta dSg_3\frac{ITD_{x1}}{D_{x1}} + 4\delta dSg_1\text{sh}^2\sigma Q\frac{KK\omega}{D_{x1}} - \delta dSg_4KK_1\frac{KK\omega}{D_{x1}}$$

$$J_5 = \frac{T_1ITD_{z1} - KK\omega T_2}{D_{z1}}, \quad J_6 = \frac{-KK\omega P + ITD_{z1}Q}{D_{z1}}, \quad EE_1 = E', \quad EE_2 = E''$$

$$AZ = \frac{T_1KK\omega + T_2ITD_{z1}}{D_{z1}}, \quad RW = \frac{w_e}{2Re}, \quad RV = W_{23} + \frac{v_e}{Re}$$

$$Q_1 = \frac{-KK_1KK\omega + KK_2ITD_{x1}}{D_{x1}}, \quad H_2 = \frac{-KK_1KK\omega + KK_2ITD_{z1}}{D_{z1}}$$

$$J_1 = \frac{-KK_2KK\omega + KK_1ITD_{z1}}{D_{z1}}, \quad J_2 = \frac{-KK_2KK\omega + KK_1ITD_{x1}}{D_{x1}}$$

$$H_1 = \frac{KK_1 + KK_2ITD_{x1}}{D_{x1}}, \quad H_3 = \frac{KK_2KK\omega + KK_1ITD_{z1}}{D_{z1}}$$

$$H_4 = \frac{KK_2KK\omega + KK_1ITD_{x1}}{D_{x1}}, \quad J_3 = \frac{-KK\omega P + QITD_{z1}}{D_{z1}}, \quad C_1 = \frac{ITD_{z1}P + QKK\omega}{D_{z1}}$$

$$J_4 = \frac{-KK\omega P + QITD_{x1}}{D_{x1}}, \quad C_2 = \frac{ITD_{x1}P + QKK\omega}{D_{x1}}$$

$$AS_1 = SDf_3 m R_2 D_2 WV + SDf_1 \delta + SDf_2 \delta K_{O2}$$

$$Sg_7 = 2H \frac{\text{sh}^2 \sigma}{\sigma} + 4 \left(1 - \frac{\text{th} \sigma}{\sigma} \right), \quad Sdf_3 = EE_2^2 \omega^2 + EE_1^2 \omega^4$$

$$SDf_2 = d\omega FF_1 EE_2 - FF_1 d\omega^2 EE_1, \quad K_{P_{x1z1}} = \frac{KK\omega}{D_{z1}} + \frac{KK\omega}{D_{x1}}$$

$$Sdf_1 = \frac{FF_3 \omega^2 d Sg_4 EE_1}{16} - \frac{8Jk_3 \text{sh}(2\sigma) \omega^2 EE_1}{16\sigma} - \frac{8JK_1 \text{sh}(2\sigma) \omega EE_2}{16\sigma} - \frac{Jk_2 Sg_4 \omega EE_2 d}{16}$$

$$K_{O2} = -\frac{Sg_1}{4} + \frac{\text{ch} \sigma^2 Sg_1}{4} + \frac{Sg_2 \text{sh} \sigma}{4 \text{ch} \sigma}, \quad WV = \frac{RW \text{sh}(2\sigma)}{\sigma} + RV$$

$$Jk_3 = ITD_{P_{x1z1}} T_2 + K_{P_{x1z1}} T_1, \quad Jk_2 = H_4 + J_1, \quad JK_1 = -ITD_{P_{x1z1}} T_1 + K_{P_{x1z1}} T_2$$

$$FF_3 = Q_2 + Q_1, \quad FF_1 = C_2 + C_1, \quad FF_2 = C_3 + C_4, \quad ITD_{P_{x1z1}} = \frac{ITD_{z1}}{D_{z1}} + \frac{ITD_{x1}}{D_{x1}}$$

$$Kos_8 = (-16Kkos_8 N N_1 R_2 K K S_{EE} m \omega^2 \sigma D_{z1} + 8FDF_1 \text{sh}(2\sigma) \delta D_{z1} - \\ - \delta d Sg_4 K K_1 EE_2 K K \omega \sigma + 4K_{f2} \delta d EE_2 D_{z1} \sigma + 4K_{f1} \omega \delta EE_1 d D_{z1} \sigma) / (\sigma D_{z1})$$

$$Kkos_8 = Rs_1 + \frac{Ep_1}{Re}, \quad YYY_4 = Q_1 - \frac{KK_2 ITD_{z1}}{D_{z1}}, \quad FDF_1 = K_{x1z1} N N N_2 + ITD_{x1z1} N N N_3$$

$$K_{f2} = \text{sh} \sigma^2 Y Y_1 Sg_1 + Y Y Y_4 Sg_4 / 4 + \text{th} \sigma Sg_2 Y Y_1, \quad N N N_2 = -\omega T_2 EE_1 + EE_2 T_1$$

$$K_{f1} = \text{sh} \sigma^2 Y Y_2 Sg_1 + \text{th} \sigma Y Y_2 Sg_2 - Y Y Y_3 Sg_4 / 4, \quad Y Y Y_3 = J_1 + H_4$$

$$ITD_{x1z1} = \frac{ITD_{z1}}{D_{z1}} - \frac{ITD_{x1}}{D_{x1}}, \quad K_{x1z1} = \frac{KK\omega}{D_{z1}} - \frac{KK\omega}{D_{x1}}, \quad Y Y_2 = -C_4 + C_3, \quad Y Y_1 = C_1 - C_2$$

$$N N N_3 = T_1 EE_1 \omega + EE_2 T_2, \quad S_E = EE_2^2 + \omega^2 EE_1^2, \quad G = 2E(f_1 d - f d_1) \text{th} \sigma \text{th} 2\sigma$$

$$Q = E \text{th} 2\sigma \left[f \text{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - f_1 \right] + \frac{6\nu}{\varepsilon^2} \frac{1}{\text{ch} 2\sigma}$$

$$H = \left(2E \left[(f^2 + d^2) \text{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - (ff_1 + dd_1) \right] \text{sh} 2\sigma + 2 \right) \frac{\text{th} \sigma}{\text{ch} 2\sigma}$$

$$P = E \text{th} 2\sigma \left[d \text{th} 2\sigma \frac{\delta^5}{a^5} - d_1 \right] + w \frac{1}{\text{ch} 2\sigma}, \quad T_1 = C_1 S_1 - S_2 H, \quad T_2 = H S_1 - S_2 C_1$$

$f, \text{Гц}$	$\eta_1, \text{Нм}$	$\eta_2, \text{Нм}$	$\eta_3, \text{Нм}$
100	$-9.99 \cdot 10^{-9}$	$-1.95 \cdot 10^{-13}$	$-1.22 \cdot 10^{-10}$
500	$-1.89 \cdot 10^{-9}$	$-9.53 \cdot 10^{-13}$	$-6.09 \cdot 10^{-10}$
1000	$-7.92 \cdot 10^{-10}$	$-1.78 \cdot 10^{-12}$	$-1.20 \cdot 10^{-9}$
5000	$-7.73 \cdot 10^{-11}$	$-2.13 \cdot 10^{-12}$	$-3.81 \cdot 10^{-9}$
10000	$-2.79 \cdot 10^{-11}$	$-6.76 \cdot 10^{-13}$	$-3.32 \cdot 10^{-9}$

$$S_1 = -1/4(2F_1(\varepsilon)\varepsilon^3 - 4C + 3\varepsilon F_3(\varepsilon) + 10\varepsilon A - 5\varepsilon F_1^2(\varepsilon) - 5\varepsilon^2 B - 10\varepsilon^2 F_2(\varepsilon) + \\ + 2\varepsilon^3 A - 20\varepsilon F_2(\varepsilon)F_4(\varepsilon))/\varepsilon(8F_2(\varepsilon)F_4(\varepsilon) - 4A + 2F_1^2(\varepsilon) - \varepsilon^2 A - F_1(\varepsilon)\varepsilon^2 + 4\varepsilon F_2(\varepsilon) + 2\varepsilon B)$$

$$S_2 = \frac{3\varepsilon A - 4\varepsilon^2 C + 8\varepsilon^2 F_4(\varepsilon) - 2B - 3\varepsilon}{4\varepsilon(8F_2(\varepsilon)F_4(\varepsilon) - 4A + 2F_1^2(\varepsilon) - \varepsilon^2 A - F_1(\varepsilon)\varepsilon^2 + 4\varepsilon F_2(\varepsilon) + 2\varepsilon B)}$$

$$S_3 = -1/8(-4F_3(\varepsilon)\varepsilon - 3\varepsilon^3 F_1(\varepsilon) + 56\varepsilon F_2(\varepsilon)F_4(\varepsilon) + 14\varepsilon F_1^2(\varepsilon) + 24\varepsilon^2 F_2(\varepsilon) - \varepsilon^3 + 8C - \\ - 28\varepsilon A + 11\varepsilon^2 B - 4\varepsilon^3 A)/[\varepsilon(8F_2(\varepsilon)F_4(\varepsilon) - 4A + 2F_1^2(\varepsilon) - \\ - \varepsilon^2 A - F_1(\varepsilon)\varepsilon^2 + 4\varepsilon F_2(\varepsilon) + 2\varepsilon B)]$$

$$w_e = (\varepsilon^4 w_2 w_{12} + v_2 v_{12})P + (v_2 w_{12} - 2 - v_{12} w_2)\varepsilon^2 Q$$

$$v_e = (\varepsilon^4 w_2 w_{12} + v_2 v_{12})w + 6v(2 - v_2 w_{12} - w_2 v_{12}), \quad w = \frac{d}{d^2 + f^2}, \quad v = -\frac{1}{6}\varepsilon^2 \frac{f}{d^2 + f^2}$$

$$v_1 = \varepsilon \frac{\sin \varepsilon \operatorname{ch} \varepsilon + \operatorname{cose} \operatorname{sh} \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + \operatorname{sh}^2 \varepsilon}, \quad w_1 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{cose} \operatorname{sh} \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + \operatorname{sh}^2 \varepsilon}, \quad v_2 = \varepsilon \frac{\sin \varepsilon \operatorname{cose} + \operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{sh} \varepsilon}{\sin^2 \varepsilon + \operatorname{sh}^2 \varepsilon}$$

$$w_2 = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\operatorname{ch} \varepsilon \operatorname{sh} \varepsilon - \sin \varepsilon \operatorname{cose}}{\sin^2 \varepsilon + \operatorname{sh}^2 \varepsilon}, \quad v_{12} = v_1 - v_2, \quad w_{12} = w_1 + w_2$$

В формуле (11) для постоянной составляющей гидродинамического возмущающего момента кроме произведений амплитуд поступательных перемещений и угловых скоростей присутствуют их смешанные произведения, возникающие из-за несимметричности истечения жидкости в торцы. Они оказывают существенное влияние на величину постоянной составляющей момента, и при различных значениях амплитуд могут влиять как в сторону уменьшения (таблице, частоты меньше 1000 Гц), так и в сторону увеличения постоянной составляющей (таблице, частоты больше 1000 Гц). Кроме того, величина постоянной составляющей значительно изменяется при изменении фазы колебаний.

В таблице приведены значения постоянной составляющей момента при равенстве всех фаз колебаний. Причем η_1 – значение постоянной составляющей момента только

для поступательной вибрации, η_2 – только для угловой вибрации, η_3 – значение постоянной составляющей момента для поступательной и угловой вибрации.

Расчеты производились для модели прибора с параметра $R_2 = 1.5 \cdot 10^{-2}$ м, $l_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $m = 3 \cdot 10^{-2}$ кг, $\delta = 1.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 1.05 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\Delta m = 1.5 \cdot 10^{-4}$ кг, $n_{x1} = n_{z1} = 0$ кг/с², $p_{1m} = r_{1m} = 1$ рад/с, $E_x = E_z = 25$ г/ω² рад/с.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-08-333-29а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Городецкий О.М., Климов Д.М.* О применении квазистационарного метода для изучения динамики гироскопа с жидкостным подвесом // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 4. С. 10–20.
2. *Городецкий О.М.* Исследование возмущающих моментов сил вязкого трения в подвесе поплавкового гироскопа // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 1. С. 10–16.
3. *Андрейченко К.П., Могилевич Л.И.* Динамика гироскопов с цилиндрическим поплавковым подвесом. Саратов: Изд-во СГУ, 1987. 160 с.
4. *Коновалов С.Ф.* Теория виброустойчивости акселерометров. М.: Машиностроение, 1991. 272 с.

Саратов

Поступила в редакцию
4.08.2203