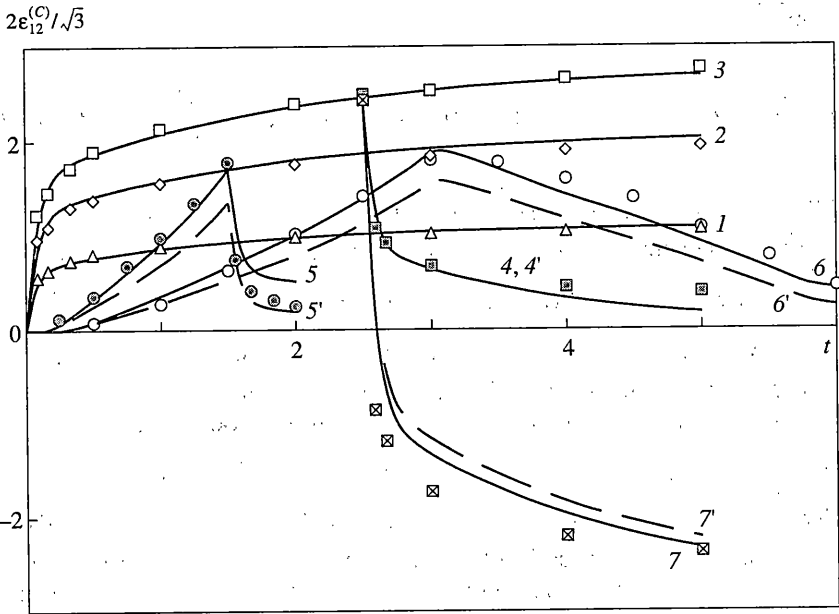


К ПОСТРОЕНИЮ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И СЛОЖНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

Для расчета конструкций, находящихся под воздействием переменных одно- и многопараметрических нагрузок, должны применяться модели, описывающие поведение материала при нестационарных простых и сложных нагружениях. В этих условиях теории вязкоупругости и ползучести, использующие в качестве базовых опыты при постоянном напряженном состоянии, приводят к систематическим погрешностям. Для учета эффектов, вызванных изменениями интенсивности и направления нагружения, введены два дополнительных слагаемых девиатора деформаций: первое зависит от скорости изменения усредненной интенсивности напряжений, второе – от угла между текущим девиатором напряжений и скоростью изменения усредненного девиатора напряжений (усреднение производится на предшествующем отрезке времени с определенной функцией памяти). Оба слагаемых имеют вид наследственных интегралов с убывающим ядром в случае вязкоупругого материала (полимера) и ядром-константой в случае материала с преимущественно необратимой ползучестью (металла). Кроме того, девиатор деформации неустановившейся ползучести разделен на три слагаемых специального вида для описания свойств замедленной частичной обратимости, вязкого упрочнения (вследствие деформирования и старения) и вязкопластичности. Указаны способы определения материальных функций модели и дано сравнение с имеющимися в литературе результатами более чем 50 экспериментов на ползучесть при нестационарных простых и сложных нагружениях (материалы – полиэтилен, целлулоид, дюралюминий, нержавеющая сталь).

1. Исходные предположения. Ограничимся рассмотрением изотермических квазистатических процессов нагружения $\sigma_{ij}(t)$ относительно невысокого уровня воздействия, в ходе которых интенсивность напряжений не превышает предела текучести материала при данной температуре, а накопленная поврежденность не достигает значений, заметно влияющих на коэффициенты упругости и ползучести. Будем считать, что объемной ползучестью (по сравнению со сдвиговой) можно пренебречь. Пусть в исходном состоянии материал квазиизотропен в том смысле, что для всех стационарных нагружений $\sigma(t) = \sigma^{(0)}N(t)$ (σ – вектор напряжений в изображающем пространстве Σ_5 [1], N – функция Хевисайда) с одинаковым значением $|\sigma^{(0)}|$ ответные деформации ползучести $\varepsilon^{(C)}(t)$ по направлению близки к $\sigma^{(0)}$ и по модулю $|\varepsilon^{(C)}(t)|$ близки между собой, либо являются таковыми после модификации пространства напряжений $\Sigma_5 \rightarrow \Sigma_5^*$ (например, введением поправочных множителей q_1, \dots, q_5 : $\sigma_\alpha^* = q_\alpha \sigma_\alpha$, суммирования по $\alpha = 1, \dots, 5$ нет). Гидростатическое давление может изменяться в пределах, в которых сохраняется квазиизотропность материала.

Введем пределы ползучести и линейности $\sigma^{(\min)}, \sigma^{(\text{lin})}$: при $\sigma^* \equiv |\sigma^*| \leq \sigma^{(\min)}$ ползучести нет, при $\sigma^{(\min)} < \sigma^* \leq \sigma^{(\text{lin})}$ ползучесть линейна, а при $\sigma^* > \sigma^{(\text{lin})}$ – нелинейна относительно



Фиг. 1

разности $\sigma^* - \sigma^{(\min)}$. Это позволяет точнее аппроксимировать исходные кривые ползучести, которые с помощью единой (например, степенной или экспоненциальной) зависимости от напряжения описываются с существенными погрешностями. В определяющих соотношениях ползучести в качестве девиатора и вектора напряжений вместо S_{ij} и σ будем использовать $S_{ij}^{*\vee} \equiv M(\sigma_u^* - \sigma_u^{(\min)})S_{ij}^*/\sigma_u^*$ и $\sigma^{*\vee} \equiv M(\sigma^* - \sigma^{(\min)})\sigma^*/\sigma^*$, где $\sigma_u^* = (1.5S_{kl}^*S_{kl}^*)^{1/2} = \sqrt{1.5}\sigma^*$ – интенсивность модифицированных напряжений (девиатор S_{ij}^* соответствует вектору σ^*), $\sigma_u^{(\min)} = \sqrt{1.5}\sigma^{(\min)}$, $M(x) = xH(x)$ – функция Маколи.

2. Простое нагружение вязкоупругих материалов. В соответствии с [1], под простым понимается нагружение $\sigma_{ij}(t)$, в ходе которого направление вектора $\sigma(t)$ не изменяется (компоненты $S_{ij}(t)$ пропорциональны одной положительной функции времени).

На фиг. 1 маркерами изображены результаты опытов [2, 3] на ползучесть трубчатых образцов из полиэтилена (ПЭВП) при $T = 30^\circ\text{C}$ в следующих программах кручения: $\sigma_{12}(t) = \sigma_{12}^{(0)}H(t)$, $\sigma_{12}^{(0)} = u, 1.5u, 1.75u$ (нагружения 1, 2, 3 – светлые треугольники, ромбы, квадраты соответственно), $\sigma_{12}(t) = 1.75uH(t)H(t^{(1)} - t)$ (нагружение 4 – темные квадраты), $\sigma_{12}(t) = vtH(t^{(2)} - t)$ (нагружение 5 – темные круги), $\sigma_{12}(t) = v[t/2 - M(t - 2t^{(2)})]$ (нагружение 6 – светлые круги), где $u = 2.17$ МПа, $t^{(2)} = 0.6t^{(1)} = 1.5$ ч, $v = u/\text{ч}$. Ступенчатые изменения нагрузки осуществлялись за время $\approx 1/60$ ч. На всех графиках публикуемой статьи деформации даны в процентах, время – в часах, номер линии совпадает с номером нагружения.

Сплошные линии 1–3 и штриховые линии 4'–6' (фиг. 1) соответствуют вычислениям согласно модели нелинейной вязкоупругости вида

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(E)} + \varepsilon_{ij}^{(C)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(E)} = S_{ij}/(2G_0) + \sigma_{mm}\delta_{ij}/(9K_0) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(C)} = \mathfrak{E}_{ij}^{(VE)} \quad (2.2)$$

$$\mathfrak{E}_{ij}^{(VE)} = \int_0^t K(t_1(t) - t_1(\tau)) [1 + g_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau))] S_{ij}^{*\vee}(\tau) dt_1(\tau), \quad \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} = 1 + f_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau)) \quad (2.3)$$

где ε_{ij} , $\varepsilon_{ij}^{(E)}$, $\varepsilon_{ij}^{(C)}$ – тензоры деформаций (полной, упругой и ползучести); $\mathfrak{E}_{ij}^{(VE)}$ – девиатор вязкоупругой деформации; G_0 , K_0 – модули сдвиговой и объемной упругости; K – ядро сдвиговой ползучести. Две функции нелинейности g_1, f_1 (с аргументом $\sigma_u^{*\wedge} = M(\sigma_u^* - \sigma_u^{(\text{lin})})$), причем $g_1(0) = f_1(0) = 0$, $\sigma_u^{(\text{lin})} = \sqrt{1.5} \sigma_u^{(\text{lin})}$ позволяют точнее описать исходные кривые ползучести. Соотношение (2.3) обобщает широко используемые для полимеров [4, 5] уравнение Лидермана – Розовского ($f_1 \equiv 0$, случай подобия исходных кривых ползучести $\varepsilon_{12}^{(C)} \sim t$) и напряженно-временную аналогию ($g_1 \equiv 0$, случай подобия кривых $t \sim \varepsilon_{12}^{(C)}$). Деформация $\mathfrak{E}_{ij}^{(VE)}$ (2.3) совпадает с временной частью сдвиговой деформации в теории нелинейной вязкоупругости [6], когда функции старения и приведенного времени определяются интенсивностью напряжений. Материальные функции соотношения (2.3) приняты в виде

$$K(t) = \eta_{11} \exp(-t/\xi_1) + \eta_{12} \exp(-t/\xi_2)$$

$$f_1(\sigma_u^{*\wedge}) = a_1 [\exp(b_1 \sigma_u^{*\wedge} / \sigma_u^{(\text{lin})}) - 1], \quad g_1(\sigma_u^{*\wedge}) = c_1 [\exp(d_1 \sigma_u^{*\wedge} / \sigma_u^{(\text{lin})}) - 1]$$

Значения констант, входящих в функции K, f_1, g_1 , определены из стандартных опытов на ползучесть 1–3 и приведены во втором столбце таблицы. Все аппроксимации предназначены для рассматриваемых интервалов напряжений и времени, которые указаны в третьей и четвертой строках таблицы, N_L обозначает номер источника экспериментальных данных в списке литературы, N_F – номер соответствующей фигуры в публикуемой статье.

Модель (2.2), (2.3) вполне адекватна при стационарных нагружениях (опыты 1–3) и при уменьшении интенсивности напряжений (вторые участки опытов 4–6), но существенно занижает скорость ползучести при возрастающем нагружении (первые участки опытов 5, 6). К небольшому улучшению приводит применение [3] кубичного варианта квазилинейной (кратно-интегральной) теории вязкоупругости [7]. Отметим, что в опыте 5 деформация в конце этапа возрастания напряжения (при $t = 1.5$ ч) больше, чем в опыте 2, в котором такое максимальное напряжение действовало с самого начала процесса. Это указывает на необходимость введения скорости нагружения в определяющие соотношения.

Для уточнения моделей вязкоупругости (в частности, (2.2), (2.3)) при переменной интенсивности напряжений предлагается ввести дополнительное слагаемое $\mathfrak{E}_{ij}^{(I)}$ [8] в выражение для $\varepsilon_{ij}^{(C)}$:

$$\varepsilon_{ij}^{(C)} = \mathfrak{E}_{ij}^{(VE)} + \mathfrak{E}_{ij}^{(I)} \quad (2.4)$$

Рассмотрим величину $\varepsilon_u^{(I)} \equiv (\mathfrak{E}_{ij}^{(I)} \mathfrak{E}_{ij}^{(I)} / 1.5)^{1/2}$ – интенсивность деформации $\mathfrak{E}_{ij}^{(I)}$. Сравнение результатов модели (2.2), (2.3) и опытов 5, 6 приводит к предположению, что вели-

Таблица

	ПЭВП	ПЭВП	Д16Т	S304	S304	S304
T [°C]	30	30	200	650	600	600
σ_u [МПа]	3.7–9.5	3.6–9.2	39–157	117–157	60–135	100–140
t [ч]	0.05–5	0.05–5	1–100	1–80	3–240	10–800
N_L	2,3	9	21–23	29	30	34
N_F	1	2	3	4	5	7
q_1	1	1	1	1	1.08	1
q_3	1.03	1.03		1	1	1
$\sigma_u^{(min)}$ [МПа]	0.5	0.5	0	30	30	30
$\sigma_u^{(in)}$ [МПа]	4	4	0.1	110	90	100
q_R	1	1	0.5	0.2	0.2	0.05
q_H	0	0	0.1	0.35	0.35	0.78
ξ_1 [ч]	0.06	0.08	1	0.6	2	30
ξ_2 [ч]	1.5	2	12	10	50	300
η_{11} [(МПа · ч) ⁻¹]	0.046	0.024	$2 \cdot 10^{-6}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$	$4.6 \cdot 10^{-7}$
η_{12} [(МПа · ч) ⁻¹]	0.0014	0.0012	$5.2 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-7}$	$3.6 \cdot 10^{-8}$
η_2 [(МПа · ч) ⁻¹]	0	0	$4.5 \cdot 10^{-8}$	$1.25 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$1.05 \cdot 10^{-8}$
a_1	0.4	0	0	0	0	2.5
b_1	-1	0	0	0	0	2.5
c_1	0.36	1.22	0.01	28	0.52	1.3
d_1	1	0.5	0.0015	0.8	1.9	2.5
c_2	0	0	0.023	3.2	0.95	2.5
d_2	0	0	0.0032	4.3	2.8	2.5
q_+	1	1	1	0	0	0
q_-	0	0	0	0	0	0
α	1.4	1.4		$4.4 \cdot 10^{-6}$	0	0
λ [ч]	0.05	0.05	16	2	-	-
η [МПа ⁻¹]	-0.0014	-0.0014	$5 \cdot 10^{-6}$	1	-	-
ξ [ч]	5	5	∞	∞	-	-
d	-10	-10	0.001	1	-	-

чина $\dot{\epsilon}_u^{(I)} \equiv d\epsilon_u^{(I)}/dt$ при заданном значении $\sigma_u^{*V} \equiv (1.5 S_{kl}^{*V} S_{kl}^{*V})^{1/2}$ пропорциональна величине $q|\dot{\sigma}_u^{*V}|$, где $q = \{1, \text{если } \dot{\sigma}_u^{*V} \geq 0; 0, \text{если } \dot{\sigma}_u^{*V} < 0\}$, $\dot{\sigma}_u^{*V} \equiv d\sigma_u^{*V}/dt$. Однако непосредственное использование мгновенных значений $\dot{\sigma}_u^{*V}$ для связи $\dot{\epsilon}_u^{(I)}$ со скоростью нагружения приведет к существенным дефектам модели. В частности, ступенчатое увеличение интенсивности напряжений будет сопровождаться подобным поведением дополнительной деформации $\epsilon_u^{(I)}$, а в действительности после резкого скачка $\Delta\sigma_u^{*V} > 0$ рост величины $\epsilon_u^{(I)}$ “растянут” во времени (на некотором интервале длительностью λ). Кроме того, модель не будет удовлетворять требованию локальной устойчивости: наложение малых колебаний (например, пилообразного вида с фиксированным углом на-

клона к оси времени и сколь угодно малой амплитудой) на основной процесс нагружения приведет к конечному изменению деформации ползучести. Поэтому в соотношении между $\dot{\epsilon}_u^{(l)}$ и скоростью нагружения будем использовать вместо $\dot{\sigma}_u^{*v}(t)$ величину

$$\dot{\sigma}_u^{*v}(t) \equiv \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\lambda} \int_{t-\lambda}^t \rho(t-\tau) \sigma_u^{*v}(\tau) d\tau \right]$$

которая представляет собой скорость изменения усредненной (на предшествующем отрезке времени длиной λ с нормированной функцией влияния ρ) интенсивности напряжений. Параметр λ будем считать константой материала. Убывающую функцию ρ можно взять линейной: $\rho(t) = 2(1 - t/\lambda)$. Тогда вычисление $\dot{\sigma}_u^{*v}$ упрощается

$$\dot{\sigma}_u^{*v}(t) = \frac{2}{\lambda} \left[\sigma_u^{*v}(t) - \frac{1}{\lambda} \int_{t-\lambda}^t \sigma_u^{*v}(\tau) d\tau \right] \quad (2.5)$$

Рассматривая вязкоупругие материалы (полимеры), целесообразно представить $\mathfrak{E}_{ij}^{(l)}$ в виде наследственного интеграла

$$\mathfrak{E}_{ij}^{(l)} = \int_0^t L(t-\tau) \varphi(\sigma_\lambda(\tau)) \varphi_1(\dot{\sigma}_u^{*v}(\tau)) \frac{S_{ij}^{*v}(\tau)}{\sigma_u^{*v}(\tau)} d\tau \quad (2.6)$$

где L – убывающая функция памяти, φ – функция нелинейности. Аргумент функции φ имеет вид $\sigma_\lambda(\tau) \equiv [\sigma_u^{*v}(\tau) \sigma_u^{*v}(\tau - \lambda)]^{1/2}$ для обращения в нуль дополнительной деформации $\epsilon_u^{(l)}$, вызванной приложением начальной нагрузки (предполагается, что оно происходит за время, меньшее, чем λ). Это позволяет использовать в модели (2.3)–(2.6) функции K, f_1, g_1 , найденные в рамках исходной модели (2.2), (2.3). Для функций, входящих в соотношение (2.6), выберем аппроксимации вида

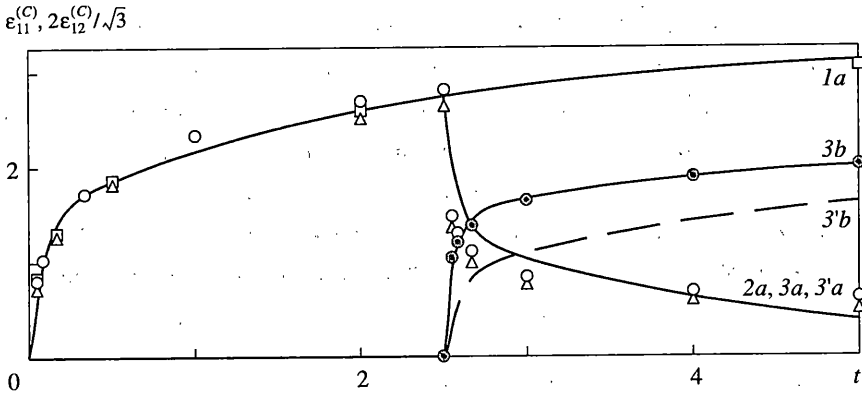
$$L(t) = \eta \exp(-t/\xi), \quad \varphi(\sigma_\lambda) = \exp(d\sigma_\lambda/\sigma_u^{(\text{lin})}) - 1$$

$$\varphi_1(\dot{\sigma}_u^{*v}) = q \left| \dot{\sigma}_u^{*v} \right|, \quad q = \left\{ \begin{array}{l} q_+, \text{ если } \dot{\sigma}_u^{*v} \geq 0; \\ q_-, \text{ если } \dot{\sigma}_u^{*v} < 0 \end{array} \right\}$$

Здесь $q_+ = 1$, если материал обладает свойством дополнительного вязкого разупрочнения при увеличении интенсивности напряжений, и $q_+ = 0$ в противном случае.

Материальные константы $\lambda, \eta, \xi, d, q_+, q_-$ (обычно $q_- = 0$) можно найти из одноосных опытов с двухступенчатым или равномерным изменением нагрузки. Таковыми в [2, 3] являются опыты 5, 6; значения констант приведены во втором столбце таблицы. Результаты расчетов по соотношениям (2.3)–(2.6) показаны на фиг. 1 сплошными линиями 1–6.

В работах [2, 3] проведены также опыты при чистом растяжении и пропорциональном совместном кручении и растяжении по временным программам вида 1–6. Их результаты и погрешности моделей (2.2), (2.3) и (2.3)–(2.6) аналогичны представленным на фиг. 1.



Фиг. 2

Значимость поправки за счет деформации $\mathcal{E}_{ij}^{(I)}$ зависит от материала и нагружения. Для ПЭВП в опытах [3] величина $\epsilon_u^{(I)}$ достигает четверти от $\epsilon_u^{(C)}$. Расчеты по результатам опытов [5] с целлюлоидом при $T = 20^\circ\text{C}$, $\sigma_{11}(t) = [\sigma_{11}^{(0)} + \nu_0 t]H(t)$, $\sigma_{11}^{(0)} = 16$ МПа, $|\nu_0| \leq 0.39$ МПа/ч, $t \leq 25$ ч дают $q_+ = q_- = 0$, $\mathcal{E}_{ij}^{(I)} = 0$.

3. Сложное нагружение вязкоупругих материалов. В процессе сложного нагружения изменяется направление вектора $\sigma(t)$ [1]. Рассмотрим нанесенные на фиг. 2 данные трех опытов [9] с трубчатыми образцами из ПЭВП при $T = 30^\circ\text{C}$: $\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}^{(0)} H(t)$ (программа 1 – квадраты), $\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}^{(0)} H(t)H(t^{(1)} - t)$ (программа 2 – треугольники), $\{\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}^{(0)} H(t)H(t^{(1)} - t); \sigma_{12}(t) = \sigma_{12}^{(0)} H(t - t^{(1)})\}$ (программа 3 – круги), где $\sigma_{11}^{(0)} = 2.3\sigma_{12}^{(0)} = 7.37$ МПа, $t^{(1)} = 2.5$ ч. В опыте 3 реализовано сложное нагружение. Светлые маркеры и линии с индексом *a* соответствуют деформации $\epsilon_{11}^{(C)}(t)$, темные маркеры и линии с индексом *b* – деформации $2\epsilon_{12}^{(C)}(t)/\sqrt{3}$ (это относится ко всем фигурам публикуемой статьи, на которых представлены и осевая, и сдвиговая деформации). Линии 1*a*, 2*a*, 3'*a*, 3'*b* на фиг. 2 рассчитаны по соотношениям (2.2), (2.3) с найденными из стандартных опытов на ползучесть [9] функциями K, f_1, g_1 (они не очень значительно отличаются от соответствующих функций в серии опытов [2, 3] – ср. второй и третий столбцы таблицы). Отметим, что в начале второго этапа опыта 3 скорость ползучести в направлении действующего напряжения существенно превышает предсказываемую моделью (2.2), (2.3). К более правильному результату приводит [9] теория локальности деформаций [10].

Введем в выражение для $\epsilon_{ij}^{(C)}$ дополнительное слагаемое $\mathcal{E}_{ij}^{(CL)}$ [8], отвечающее за описание эффектов сложного нагружения

$$\epsilon_{ij}^{(C)} = \mathcal{E}_{ij}^{(VE)} + \mathcal{E}_{ij}^{(I)} + \mathcal{E}_{ij}^{(CL)} \quad (3.1)$$

В [11] для обобщенной модели Максвелла предложен параметр сложности нагружения r в виде косинуса угла между вектором напряжений и вектором скорости напряжений.

Если в качестве последнего использовать мгновенное значение $\dot{\sigma}(t)$, то при введении параметра r в соотношение для $\mathfrak{E}_{ij}^{(CL)}$ возникнут нежелательные эффекты, аналогичные отмеченным в п. 2: мгновенный поворот вектора σ вызовет разрывное изменение деформации $\mathfrak{E}_{ij}^{(CL)}$, а наложение малых колебаний $s(t)$ (например, ортогональных к $\sigma(t)$ с фиксированным значением $|ds/dt|$ и сколь угодно малой амплитудой $|s|$) на основной процесс нагружения $\sigma(t)$ приведет к конечному изменению деформации $\mathfrak{E}_{ij}^{(CL)}(t)$. Поэтому в качестве параметра, отражающего сложность нагружения в текущий момент t , предлагается угол $\beta(t)$ между векторами $\sigma^{*\vee}(t)$ и $\dot{\sigma}^{*\vee}(t)$:

$$\beta \equiv \arccos \left(\frac{\sigma^{*\vee} \cdot \dot{\sigma}^{*\vee}}{|\sigma^{*\vee}| |\dot{\sigma}^{*\vee}|} \right) = \arccos \left[\frac{S_{ij}^{*\vee} \dot{S}_{ij}^{*\vee}}{(S_{kl}^{*\vee} S_{kl}^{*\vee})^{1/2} (\dot{S}_{mn}^{*\vee} \dot{S}_{mn}^{*\vee})^{1/2}} \right] \quad (3.2)$$

Вектор $\dot{\sigma}^{*\vee}$ представляет собой скорость изменения усредненного вектора напряжений (усреднение производится на предшествующем отрезке времени длиной λ с нормированной функцией влияния ρ):

$$\dot{\sigma}^{*\vee}(t) \equiv \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\lambda} \int_{t-\lambda}^t \rho(t-\tau) \sigma^{*\vee}(\tau) d\tau \right]$$

При использовании линейной функции $\rho(t) = 2(1 - t/\lambda)$ получим

$$\dot{\sigma}^{*\vee}(t) = \frac{2}{\lambda} \left[\sigma^{*\vee}(t) - \frac{1}{\lambda} \int_{t-\lambda}^t \sigma^{*\vee}(\tau) d\tau \right] \quad (3.3)$$

Считая механизмы деформаций $\mathfrak{E}_{ij}^{(I)}$ и $\mathfrak{E}_{ij}^{(CL)}$ сходными, примем

$$\mathfrak{E}_{ij}^{(CL)} = \int_0^t L(t-\tau) \varphi(\sigma_\lambda(\tau)) \varphi_2(\beta(\tau)) \left| \dot{\sigma}^{*\vee}(\tau) \right| \frac{S_{ij}^{*\vee}(\tau)}{\sigma_u^{*\vee}(\tau)} d\tau \quad (3.4)$$

Функцию $\varphi_2(\beta)$ можно найти из опытов при сложном кусочно-стационарном двухэтапном нагружении с различными значениями угла поворота вектора σ . Учитывая условия $\varphi_2(0) = \varphi_2(\pi) = 0$ (чтобы модель (3.1), (2.3), (2.6), (3.4) при одномерном нагружении переходила в (2.4), (2.3), (2.6)), примем φ_2 в виде $\varphi_2(\beta) = \alpha \sin \beta$. В свою очередь, модель (2.4), (2.3), (2.6) при стационарном нагружении переходит в (2.2), (2.3). Таким образом, предлагаемая модель сохраняет иерархичность [12] при расширении области применения.

Сплошные линии на фиг. 2 рассчитаны по соотношениям (3.1), (2.3), (2.6), (3.4). Константа α найдена из опыта 3 на ортогональное нагружение; $\lambda, L, \varphi, \varphi_1$ взяты одинаковыми для серий нагружений [2, 3] и [9]. Кроме того, на фиг. 1 перечеркнутыми квадратами показаны результаты опыта [3] при обратном нагружении 7: $\sigma_{12}(t) = u[H(t) - 2H(t - t^{(1)})]$, где $u = 3.8$ МПа, $t^{(1)} = 2.5$ ч. Поправка к линии 7' (модель (2.2), (2.3)), представленная линией 7 (модель (3.1), (2.3), (2.6), (3.4)), связана с деформацией $\mathfrak{E}_{ij}^{(I)}$ (так как в одномерном нагружении $\sin \beta = 0$).

Отметим, что рассогласование направлений реальной скорости ползучести и найденной согласно (2.2), (2.3) показывает наличие приобретенной деформационной анизотропии. Поэтому данный эффект нельзя учесть изотропным соотношением (2.3) с помощью введения параметра сложного нагружения в приведенное время t_1 . Так, при двухэтапном ортогональном нагружении за счет “ускорения” t_1 после поворота вектора σ можно добиться нужной поправки для деформации вдоль направления действующего напряжения, но появится ошибка по деформации вдоль направления первого этапа нагружения (слишком быстрый возврат), приблизительно равная указанной поправке.

Представленные на фиг. 1, 2 данные показывают, что с помощью дополнительных деформаций (2.6), (3.4) исходная модель (2.1)–(2.3) существенно уточнена.

4. Одноосное нагружение вязкоупругопластических материалов. Ползучесть металлов и многих полимеров при достаточно высокой температуре характеризуется значительной долей необратимой составляющей деформации. При одноосном растяжении $\sigma_{11}(t) \geq 0$ деформацию ползучести $\epsilon_{11}^{(C)}(t)$ целесообразно представить в виде суммы двух частей [13] – необратимой $\epsilon_{11}^{(IR)}(t)$ и замедленно обратимой (наследственного вида) $\epsilon_{11}^{(R)}(t)$. В [14] предложено разложение необратимой деформации $\epsilon_{11}^{(IR)} = \epsilon_{11}^{(V1)} + \epsilon_{11}^{(V2)}$, где $\epsilon_{11}^{(V1)}$ имеет вид наследственного интеграла с ядром, равным нулю в моменты $\tau \in [0; t]$, в которые $f[\sigma_{11}(\tau)] < \epsilon_{11}^{(V1)}(\tau)$ (f – материальная функция нелинейности), $\epsilon_{11}^{(V2)}$ представляет нелинейно-вязкое течение. Другое выражение для $\epsilon_{11}^{(V1)}$ в виде наследственного интеграла с приведенным временем t' , $dt'/dt = H[\sigma_{11}(t) - \sigma_{11}^{(M)}(t)]$, $\sigma_{11}^{(M)}(t) \equiv \max\{\sigma_{11}(\tau), \forall \tau \in [0; t]\}$ использовано в [15]. Уточнение для деформации $\epsilon_{11}^{(R)}$ в случае малых отклонений $\sigma_{11}(t)$ вниз от уровня $\sigma_{11}^{(M)}(t)$ содержится в [16].

При описании деформации $\epsilon_{ij}^{(R)}$ будем исходить из результата, полученного в [17]: при стационарном нагружении с последующей полной разгрузкой деформацию возврата можно считать пропорциональной (с коэффициентом $q_R \in [0; 1]$) достигнутой деформации неустановившейся ползучести. Поэтому в качестве $\epsilon_{ij}^{(R)}$ используем величину

$$\epsilon_{ij}^{(VE)} = q_R \int_0^t K(t_1(t) - t_1(\tau)) [1 + g_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau))] S_{ij}^{*v}(\tau) dt_1(\tau), \quad \frac{dt_1(\tau)}{d\tau} = 1 + f_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau)) \quad (4.1)$$

Затухающее ядро K и функции нелинейности g_1, f_1 определяются по деформации неустановившейся ползучести (разности между деформацией ползучести и деформацией установившейся ползучести) при стационарном нагружении. Материальная константа q_R (коэффициент обратимости деформации неустановившейся ползучести) находится из опыта на возврат. Для металлов $q_R \sim 10^{-1} - 10^{-2}$, для полимеров в условиях стабильности структуры обычно $q_R \approx 1$ (в частности, в опытах [2, 3, 9] с полиэтиленом, которые рассматривались выше, $q_R = 1$; расчеты по результатам опытов [18] с целлюлойдом при температуре 20°C, напряжениях $\sigma_{11}^{(0)} = 16 - 24$ МПа и временах $t \sim 10^0 - 10^1$ ч приводят к значению $q_R = 0.85$).

Перейдем к рассмотрению необратимой части деформации неустановившейся ползучести. Разделим ее на два слагаемых: скорость изменения первого не зависит, а второ-

го – зависит от предыстории изменений направления нагружения. Первое слагаемое, представляющее течение с упрочнением (увеличением вязкости в процессе ползучести), назовем деформацией упрочнения и примем в виде

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(H)} = q_H \int_0^t K(t_2(\tau)) [1 + g_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau))] S_{ij}^{*\vee}(\tau) dt_2(\tau) \quad (4.2)$$

$$\frac{dt_2(\tau)}{d\tau} = \begin{cases} 1 + f_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau)), & \text{если } \sigma_u^{*\vee}(\tau) > 0 \\ 0, & \text{если } \sigma_u^{*\vee}(\tau) = 0 \end{cases}$$

Величину $q_H \in [0; 1 - q_R]$ считаем константой материала. При стационарном нагружении q_H имеет смысл доли $\dot{\epsilon}_{ij}^{(H)}$ в деформации неустановившейся ползучести. Скорости изменения приведенных времен t_1 и t_2 совпадают на интервалах времени с $\sigma_u^{*\vee}(t) > 0$; в противном случае t_2 не изменяется, что означает отсутствие старения (упрочнения или разупрочнения материала в ненапряженном состоянии). Второе слагаемое, учитывая его зависимость от изменений направления нагружения, назовем вязкопластическим. Для него предлагается соотношение

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(VP)} = p(1 - q_R - q_H)q_R^{-1} \dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)} \quad (4.3)$$

$$p = \begin{cases} 1, & \text{если } (S_{kl}^{*\vee} \dot{\epsilon}_{kl}^{(VE)} > 0) \wedge (0 < S_{kl}^{*\vee} \dot{\epsilon}_{kl}^{(VP)} \leq (1 - q_R - q_H)q_H^{-1} S_{kl}^{*\vee} \dot{\epsilon}_{kl}^{(VE)}) \\ (\sigma_u^{*\vee} - \sigma_u^{*\wedge}) / (\sigma_u^{(lin)} - \sigma_u^{(min)}), & \text{если } (S_{kl}^{*\vee} \dot{\epsilon}_{kl}^{(VE)} > 0) \wedge (S_{kl}^{*\vee} \dot{\epsilon}_{kl}^{(VP)} \leq 0) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Множитель $p \in [0; 1]$ служит мерой вязкопластической активности текущего нагружения. Оно считается активным ($p = 1$), частично активным ($0 < p < 1$) или пассивным ($p = 0$) в зависимости от значения $\sigma_u^{*\vee}$ и взаимного расположения векторов $\sigma^{*\vee}$, $\dot{\epsilon}^{(VE)}$, $\dot{\epsilon}^{(VE)}$, $\dot{\epsilon}^{(VP)}$ в данный момент t . В частности, неравенство $(\sigma^{*\vee} \cdot \dot{\epsilon}^{(VE)}) \leq 0$ можно трактовать как условие разгрузки, при выполнении которого $p = 0$, $\dot{\epsilon}^{(VP)} = 0$.

Соотношение (4.3) основано на качественных представлениях о ползучести при следующих основных типах одноосного нагружения: стационарном, с полной разгрузкой, повторном и обратном. При стационарном нагружении $\sigma_{ij}^*(t) = \sigma_{ij}^{(0)} H(t)$ получим $p = 1$, а деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(H)}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VP)}$ в сумме дадут деформацию неустановившейся ползучести. Если в момент $t^{(1)}$ напряжение снято, то при $t > t^{(1)}$ получим $p = 0$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VP)} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(H)} = 0$, а изменение $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)}(t)$ будет описывать возврат. Если в момент $t^{(2)} > t^{(1)}$ напряжение $\sigma_{ij}^{(0)}$ приложено вновь, то $p = 0$ до тех пор, пока $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)}$ не достигнет своего значения перед разгрузкой, и $p = 1$ в дальнейшем (отметим аналогию с изменением упругой и пластической деформаций в теории пластичности при разгрузке и повторной нагрузке). Если в момент $t^{(1)}$ приложена нагрузка обратного знака: $\sigma_{ij}^*(t) = \sigma_{ij}^{(0)} [H(t) - \kappa H(t - t^{(1)})]$, $\kappa > 1$, то

до тех пор, пока направление $\mathcal{E}_{ij}^{(VP)}$ не сменится на противоположное, $p = (\sigma_u^{*\vee} - \sigma_u^{*\wedge}) / (\sigma_u^{(\text{lin})} - \sigma_u^{(\text{min})})$. Такое выражение для p обеспечивает локальную устойчивость модели при малой интенсивности напряжений $\sigma_u^{*\vee} = (\kappa - 1)\sigma_u^{(0)\vee}$ на втором этапе нагружения; если же $\sigma_u^{*\vee} \geq \sigma_u^{(\text{lin})}$, то рассматриваемое выражение для p дает $p = 1$. Вновь можно провести аналогию с поведением пластического материала: в ходе обратного нагружения величина пластической податливости $d\varepsilon_u^{(P)} / d\sigma_u$ постепенно растет от нуля до значений, характерных для пластической области.

В дополнение к $\mathcal{E}_{ij}^{(H)}$ и $\mathcal{E}_{ij}^{(VP)}$, в состав $\varepsilon_{ij}^{(IR)}$ следует включить деформацию нелинейно-вязкого течения $\mathcal{E}_{ij}^{(V)}$:

$$\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{(V)} = \eta_2 [1 + g_2(\sigma_u^{*\wedge})] S_{ij}^{*\vee} \quad (4.4)$$

Коэффициент η_2 вязкой податливости в линейной области и функция нелинейности g_2 (вида g_1 с константами c_2, d_2 вместо c_1, d_1) определяются по деформации установившейся ползучести при стационарном нагружении различной интенсивности.

Таким образом, деформация ползучести примет вид

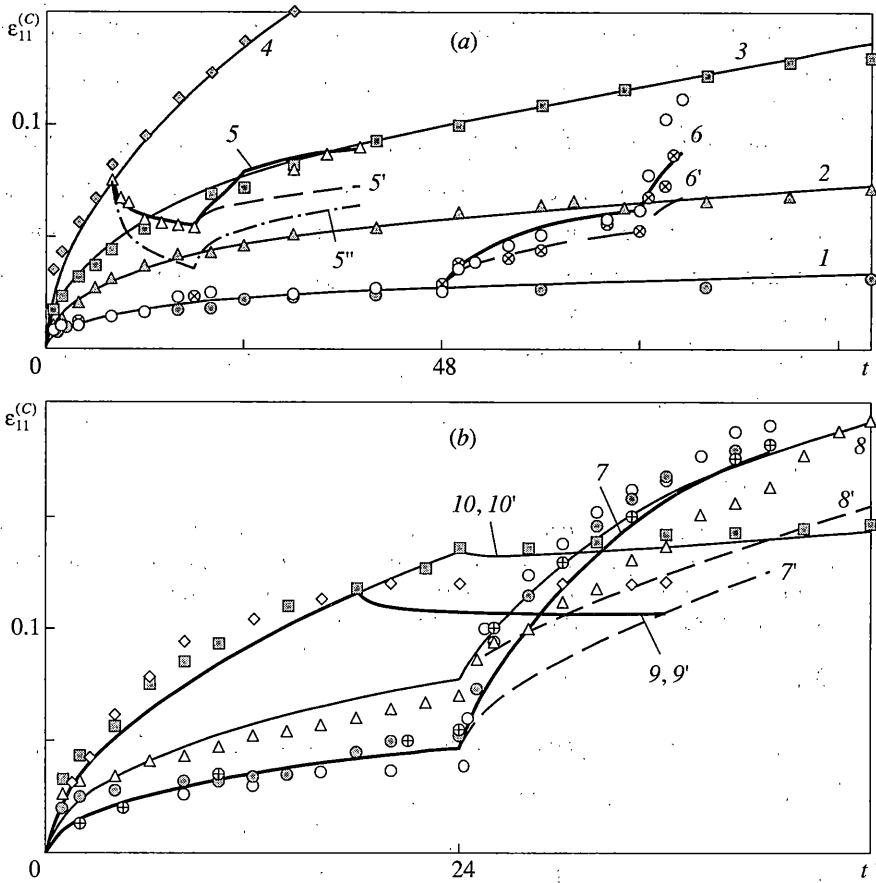
$$\varepsilon_{ij}^{(C)} = \mathcal{E}_{ij}^{(VE)} + \mathcal{E}_{ij}^{(H)} + \mathcal{E}_{ij}^{(VP)} + \mathcal{E}_{ij}^{(V)} \quad (4.5)$$

Рассмотрим процесс с реверсом нагрузки: $\sigma_{ij}^*(t) = \sigma_{ij}^{(0)} [H(t) - 2H(t - t^{(1)})]$, причем $\sigma_u^{(0)} \geq \sigma_u^{(\text{lin})}$. Модель (4.1)–(4.5) приводит к равенству

$$\mathcal{E}_{ij}^{(C)}(2t^{(1)}) = (2q_H - 1) [\mathcal{E}_{ij}^{(C)}(t^{(1)}) - \mathcal{E}_{ij}^{(V)}(t^{(1)})] \left[2 - \int_0^{2t^{(1)}} K(t_1(\tau)) dt_1(\tau) / \int_0^{t^{(1)}} K(t_1(\tau)) dt_1(\tau) \right]$$

Следовательно, указанное нагружение позволяет непосредственно найти q_H . Заметим, что опыт с реверсом нагрузки входит в число базовых в теории локальности деформаций [10] и в различных вариантах теории ползучести с поверхностью упрочнения [19, 20].

Проверим модель (4.1)–(4.5) в опытах по разнообразным программам одноосного растяжения дюралюминия Д16Т при $T = 200^\circ\text{C}$ [21–23]: $\sigma_{11}(t) = \sigma_{11}^{(0)} H(t)$, $\sigma_{11}^{(0)} = j \cdot u$, $u = 39.2$ МПа, $j = 1, \dots, 4$ (нагружения 1–4 соответственно, темные маркеры на фиг. 3, а); трехступенчатое нагружение 5 с последовательными уровнями напряжений $\sigma_{11}^{(0)} = 16\sigma_{11}^{(1)} = 2\sigma_{11}^{(2)} = 4u$ (светлые треугольники на фиг. 3, а); трехступенчатое нагружение 6 с $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{(1)}/2 = \sigma_{11}^{(2)}/3 = u$ (светлые и перечеркнутые круги на фиг. 3, а); двухступенчатые нагружения с $\sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{(1)}/2 = 2u$, $\sigma_{11}^{(0)} = 3\sigma_{11}^{(1)}/4 = 3u$, $\sigma_{11}^{(0)} = 2\sigma_{11}^{(1)} = 4u$, $\sigma_{11}^{(0)} = 4\sigma_{11}^{(1)}/3 = 4u$ (нагружения 7–10 соответственно – круги, треугольники, ромбы, квадраты на фиг. 3, б). Длительности ступеней нагружений видны из фиг. 3. Значение q_R определено из опыта 5, q_H – по результатам [24] для того же материала при $T = 150^\circ\text{C}$, остальные константы для соотношений (4.1)–(4.4) (см. четвертый столбец таблицы) – из стационарных опытов 1–4. Линии 1–4, 5'–10' на фиг. 3 соответствуют расчетам по модели (4.1)–(4.5); для



Фиг. 3

сравнения нанесена также линия 5'', полученная в предположении $q_R = 1 - q_H = 1$ — полной обратимости деформации неустановившейся ползучести. Можно сделать вывод, что модель (4.1)–(4.5) правильно описывает нагружения с постоянной или убывающей интенсивностью напряжений, но занижает скорость ползучести на определенном отрезке времени длиной λ после увеличения σ_u (нагружения 5–8). Аналогичный дефект исходной модели для вязкоупругих материалов (2.2), (2.3) отмечен в п. 2. Разница лишь в том, что у металлов накопленная дополнительная деформация $\mathfrak{E}_{ij}^{(I)}$ не “забывается”, поэтому уточнение модели (4.1)–(4.5) примем в виде

$$\varepsilon_{ij}^{(C)} = \mathfrak{E}_{ij}^{(VE)} + \mathfrak{E}_{ij}^{(H)} + \mathfrak{E}_{ij}^{(VP)} + \mathfrak{E}_{ij}^{(V)} + \mathfrak{E}_{ij}^{(I)} \quad (4.6)$$

$$\mathfrak{E}_{ij}^{(I)} = \eta \varphi(\sigma_\lambda) \varphi_1(\dot{\sigma}_u^{*v}) S_{ij}^{*v} / \sigma_u^{*v} \quad (4.7)$$

Соотношение (4.7) является частным случаем (2.6) при $\xi = \infty$, $L(t) \equiv \eta$. Линии 1–10 на фиг. 3 получены согласно (4.1)–(4.4), (4.6), (4.7); константы λ , η , d , q_+ найдены из опытов 7, 8.

Уравнения ползучести при одноосном растяжении, содержащие скорость изменения напряжения, предлагались в [22] ($\varepsilon_{11}^{(C)}$ зависит от параметра ζ , $\dot{\zeta} = q_\pm \dot{\sigma}_{11} \varepsilon_{11}^{(C)}$) и [25]

($\epsilon_{11}^{(C)}$ зависит от поврежденности ω , а $\dot{\omega}$ зависит от $\dot{\sigma}_{11}$). Обобщения теории упрочнения с более сложным, чем через параметр $\dot{\sigma}_{11}$, способом учета нестационарности растяжения представлены в [26, 27]. Согласно перечисленным подходам, каждое изменение σ_u приводит к дополнительному изменению упрочнения, которое тем или иным образом связано с формой исходных кривых ползучести и накапливается в течение всего процесса. В [28] нестационарность нагружения учитывается с помощью дополнительного слагаемого скорости деформации ползучести в виде наследственного интеграла, содержащего функции ползучести при стационарном напряжении и значения $\dot{\sigma}_u(\tau)$, $\tau \in [0; t]$.

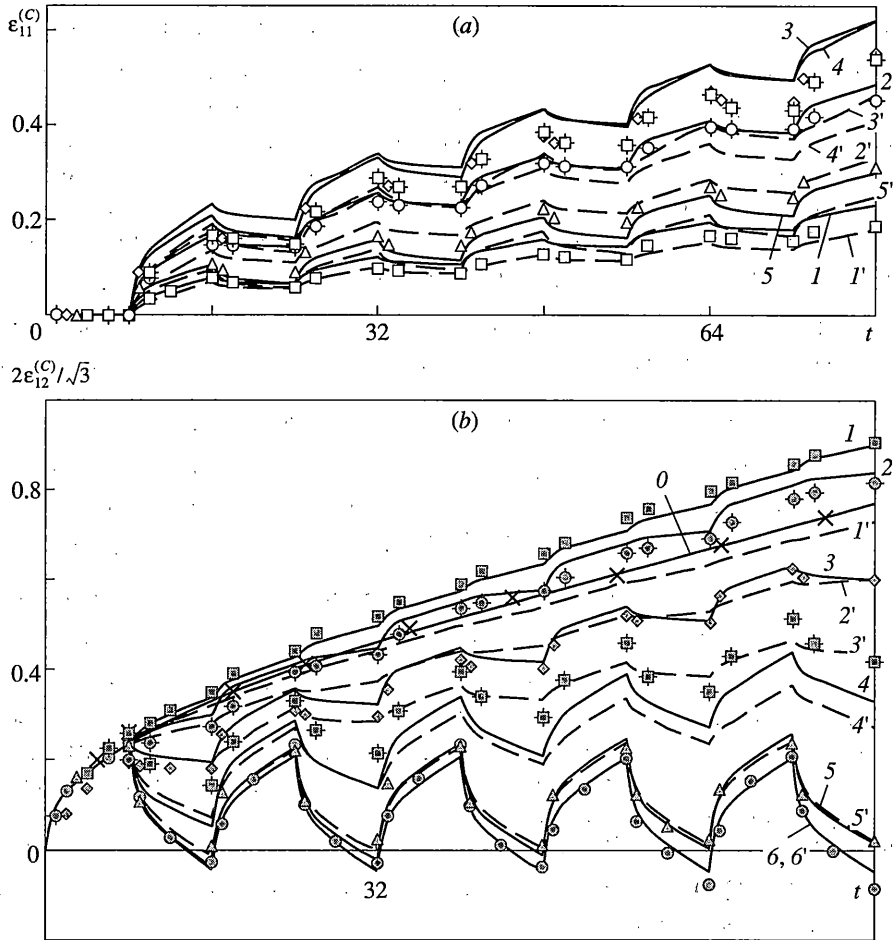
Соотношение для $\dot{\epsilon}_{ij}^{(I)}$ (4.7) не связано с характеристиками ползучести при стационарном напряжении и не зависит от истории нагружения ранее предшествующего отрезка времени длиной λ .

5. Сложное нагружение вязкоупругопластических материалов. Соотношения (4.1), (4.2), (4.4), (4.7) для $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(H)}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(V)}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(I)}$, основанные на весьма общих представлениях, будем использовать при произвольном сложном нагружении. Обобщение требуется лишь для соотношения (4.3), полученного из анализа основных одномерных нагружений.

Систематическое исследование ползучести при поворотах вектора σ на различные углы проведено в работе [29]. Программы 1–6 имели вид: ($\sigma_{11}(t) = 0$; $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = u$) при $t/t_0 \in \{[2i - 2; 2i - 1], i = 1, \dots, 5\}$, ($\sigma_{11}(t) = u \sin \theta_0$; $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = u \cos \theta_0$) при остальных t/t_0 из отрезка $[0; 10]$, где $u = 137.3$ МПа, $t_0 = 8$ ч, $\theta_0 = j \cdot \pi/6$, $j = 1, \dots, 6$ (номер нагружения совпадает со значением j). Материал – нержавеющая сталь 304, температура 650°C . Результаты экспериментов 1–6 представлены на фиг. 4 (квадраты, круги с крестами, ромбы, квадраты с крестами, треугольники, круги соответственно; данные опытов 2, 4 взяты из [20]). На фиг. 4 нанесены также данные статического опыта $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = uH(t)$ (косые кресты, нагружение 0). Во всех нагружениях $\sigma_u(t) = u$ (кроме моментов смены нагрузки).

Опыты с поворотом и изменением длины вектора σ реализованы в работе [30]: $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = \sigma_u^{(0)} H(t)H(t^{(1)} - t)$, $t^{(1)} = 240$ ч, $\sigma_u^{(0)} = u_1, u_2, u_3, u_4$ (нагружения 1–4 соответственно), $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (60, 90, 120, 134.2)$ [МПа]; $\sigma_{11}(t) = \sigma_u^{(0)} H(t)$, $\sigma_u^{(0)} = u_2, u_4$ (нагружения 5, 6); $\sigma_{12}(t) = \sigma_{12}^{(1)}$ при $t/t_0 \in \{[2i - 2; 2i - 1], i = 1, \dots, 5\}$, $\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}$ при остальных t/t_0 из отрезка $[0; 10]$, $t_0 = 24$ ч, $\sqrt{3} \sigma_{12}^{(1)} = u_3$, $\sqrt{3} \sigma_{12}^{(2)} = 0, -u_1, -u_3$ (нагружения 7–9 соответственно); ($\sigma_{11}(t) = u_1 H(t)$; $\sigma_{12}(t)$ – как в нагружениях 7–9) – нагружения 10–12. Материал – сталь 304, температура 600°C . Экспериментальные данные нанесены маркерами на фиг. 5.

Значение q_R определено из опыта 3 серии [30] (оно же принято для нагружений [29] за отсутствием в [29] данных о возврате), значение q_H – из опыта с реверсом нагрузки (6 из [29], 9 из [30]), остальные константы для соотношений (4.1), (4.2), (4.4) (см. пятый и шестой столбцы таблицы) – по результатам стационарных нагружений [29, 30]. Если исходить из разложения (4.5), то с помощью (4.1), (4.2), (4.4) можно вычислить $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(H)}$, $\dot{\epsilon}_{ij}^{(V)}$, а “расчетное” значение деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^{(VP)}$ найти как разность экспериментального значения $\epsilon_{ij}^{(C)}$ и суммы ($\dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(H)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(V)}$). Анализ поведения деформации



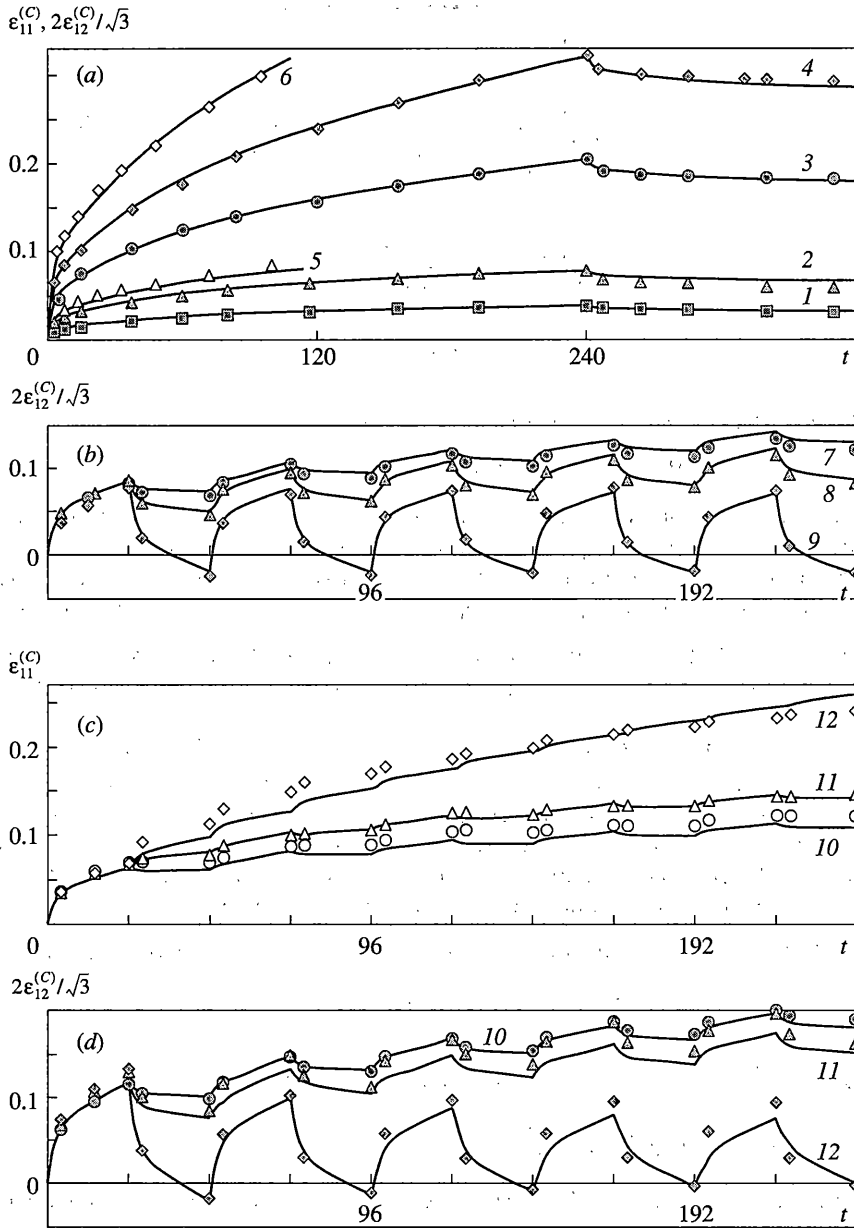
Фиг. 4

$\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{(VP)}$, вычисленной указанным способом в нагружениях [29, 30], привел к следующему обобщению соотношения (4.3):

$$\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{(VP)} = p(1 - q_R - q_H)q_R^{-1} M(\Psi_{kl} \dot{\mathcal{E}}_{kl}^{(VE)}) \Psi_{ij} / \Psi^2$$

$$p = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \Psi_{kl} \dot{\mathcal{E}}_{kl}^{(VP)} \leq (1 - q_R - q_H)q_R^{-1} \Psi_{kl} \dot{\mathcal{E}}_{kl}^{(VE)} \\ (\sigma_u^{*\vee} - \sigma_u^{*\wedge}) / (\sigma_u^{(\text{lin})} - \sigma_u^{(\text{min})}), & \text{если } \Psi_{kl} \dot{\mathcal{E}}_{kl}^{(VE)} \leq 0 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (5.1)$$

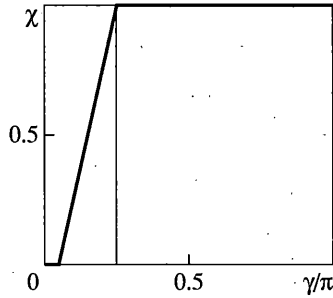
$$\Psi_{ij} \equiv \chi(\gamma) \frac{S_{ij}^{*\vee}}{(S_{kl}^{*\vee} S_{kl}^{*\vee})^{1/2}} + [1 - \chi(\gamma)] \frac{\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{(VE)}}{(\dot{\mathcal{E}}_{kl}^{(VE)} \dot{\mathcal{E}}_{kl}^{(VE)})^{1/2}}, \quad \Psi \equiv (\Psi_{kl} \Psi_{kl})^{1/2}$$



Фиг. 5

Вектор $\dot{\epsilon}^{(VP)}$ (5.1) направлен по $\psi = \chi(\gamma)\sigma^{*v}/\sigma^{*v} + [1 - \chi(\gamma)]\dot{\epsilon}^{(VE)}/\dot{\epsilon}^{(VE)}$ — комбинации направлений нагружения и скорости вязкоупругой деформации. Коэффициент комбинации χ есть функция от угла γ между указанными направлениями

$$\gamma \equiv \arccos \left(\frac{\sigma^{*v} \cdot \dot{\epsilon}^{(VE)}}{\sigma^{*v} \dot{\epsilon}^{(VE)}} \right) = \arccos \left(\frac{S_{kl}^{*v} \dot{\epsilon}_{kl}^{(VE)}}{\sigma_u^{*v} \dot{\epsilon}_u^{(VE)}} \right) \in [0; \pi]$$



Фиг. 6

Предлагаемый вид функции $\chi(\gamma)$ показан на фиг. 6

$$\chi(\gamma) = 5[M(\gamma - \pi/20) - M(\gamma - \pi/4)]/\pi \quad (5.2)$$

Успешное использование функции (5.2) для всех рассматриваемых в настоящей статье вязкоупругопластических материалов и сложных нагружений говорит в пользу универсальности такой $\chi(\gamma)$ (что, конечно, требует дальнейшей экспериментальной проверки). В соответствии с (5.2), при $\gamma < \pi/20$ (что характерно, в частности, для резкого поворота σ на угол, близкий к π) вектор ψ направлен по $\dot{\epsilon}^{(VE)}$, при $\gamma > \pi/4$ (например, при повороте σ на острый угол) – по σ . В случае одномерного нагружения соотношение (5.1) переходит в (4.3).

Результаты вычислений по модели (4.1), (4.2), (4.4), (4.5), (5.1), (5.2) для нагружений [30] представлены линиями на фиг. 5; максимальная ошибка $2 \cdot 10^{-4}$ (в нагружениях 11, 12) приблизительно равна экспериментальному разбросу в [30]. Та же модель в нагружениях [29] приводит к меньшей точности (линии 1'-6' на фиг. 4) из-за неучета отмеченного в [29] кратковременного разупрочнения материала после резкого поворота вектора σ . Подобное явление описано в п. 3 для вязкоупругих материалов и может быть учтено введением в разложение (4.6) дополнительной деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^{(CL)}$ (3.4):

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(C)} = \dot{\epsilon}_{ij}^{(VE)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(H)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(VP)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(V)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(I)} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(CL)} \quad (5.3)$$

У металлов $\dot{\epsilon}_{ij}^{(CL)}$ не “забывается” ($\xi = \infty$), поэтому (3.4) приобретает вид

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{(CL)} = \eta \varphi(\sigma_\lambda) \varphi_2(\beta) \left| \dot{\sigma}^{*v} \right| S_{ij}^{*v} / \sigma_u^{*v} \quad (5.4)$$

В опытах 1–6 серии [29] представлено только одно значение σ_u , поэтому для определенности в $\varphi(\sigma_\lambda)$ положим $d = 1$, $\eta = 1$ МПа⁻¹. Константа α для функции $\varphi_2(\beta) = \alpha \sin \beta$ определена из опыта 1, так как при повороте σ на малый угол значения β близки к $\pi/2$ и эффект сложного нагружения максимален. Модели (4.1), (4.2), (4.4), (4.7), (5.1)–(5.4) соответствуют сплошные линии 1–6 (фиг. 4). С помощью дополнительной деформации $\dot{\epsilon}_{ij}^{(CL)}$ (5.4) максимальная ошибка модели (4.1), (4.2), (4.4), (4.5), (5.1), (5.2) в опытах [29] снижена в 2.5 раза до $9 \cdot 10^{-4}$.

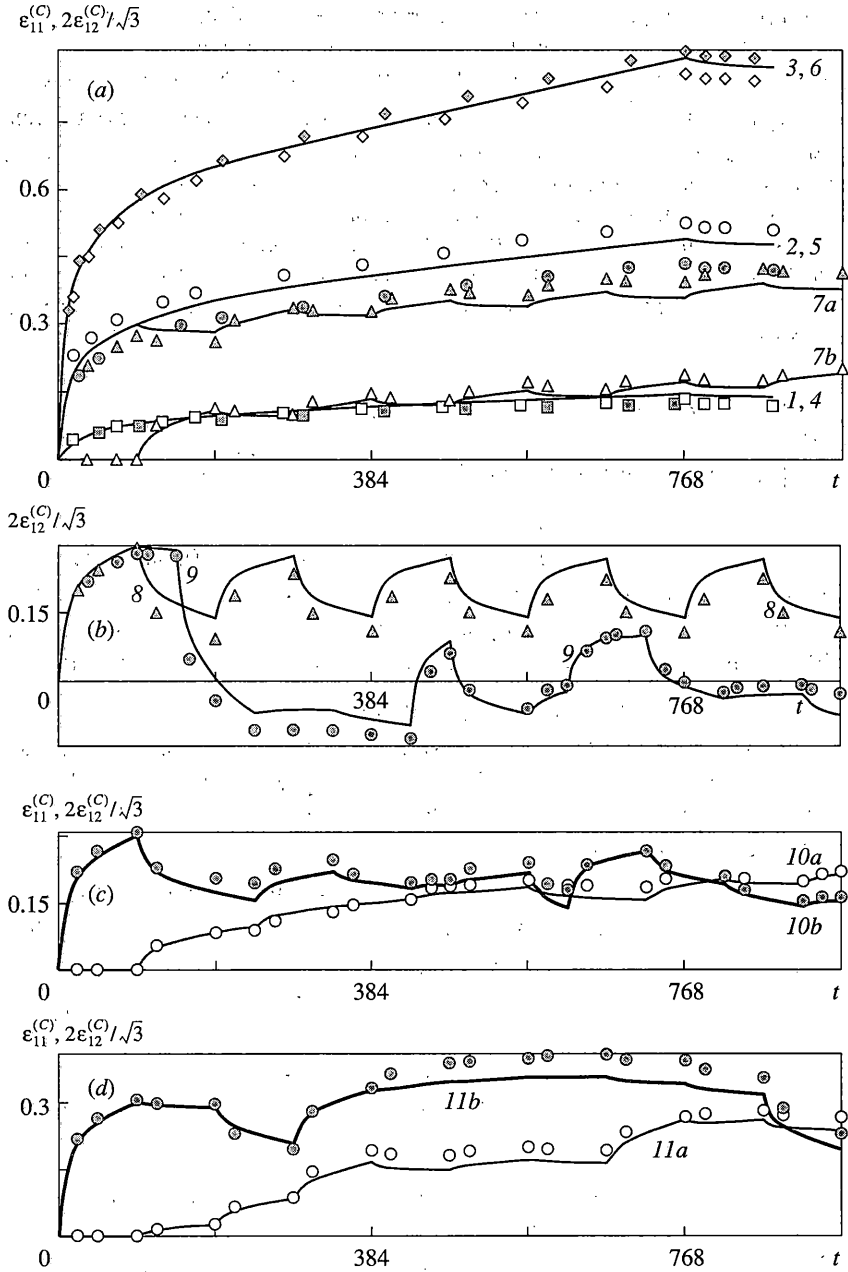
Значительное ускорение ползучести после поворотов вектора σ отмечено также в опытах с титановым сплавом 3В при комнатной температуре [31] и алюминевым сплавом 2618 при 200°C [32, 33].

6. Учет старения и перераспределения составляющих деформации ползучести. Пребывание материала в условиях высокой температуры может сопровождаться изменениями структуры. Если это явление происходит только в нагруженном состоянии (таковы свойства материала или $\sigma_u^* > \sigma_u^{(\min)}$ в течение всех рассматриваемых процессов), то его можно считать включенным в деформационное упрочнение и тем самым учтенным в определяющих соотношениях ползучести. Если же материал и условия нагружения показывают изменение механических свойств в ненапряженном состоянии (старение), то модель требует обобщения. Будем описывать влияние старения с помощью приведенного времени t_3 , входящего в соотношение (4.2) вместо t_2 . В первом приближении учтем также взаимодействие деформационного упрочнения и старения в процессах нагружения с “отдыхами”:

$$\frac{dt_3(\tau)}{d\tau} = \begin{cases} 1 + f_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau)), & \text{если } \sigma_u^{*\vee}(\tau) > 0 \\ r_1 - r_2 \{1 - \exp[-(t_3(\tau) - r_1\tau)/\xi_0]\}, & \text{если } \sigma_u^{*\vee}(\tau) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Согласно (6.1), во время длительного “отдыха” (когда $\sigma_u^{*\vee} = 0$) материал постепенно (асимптотически) “забывает” достигнутое деформационное упрочнение, и $t_3(t)$ приближается к зависимости $r_1 t$, которая соответствует старению (без нагрузки) на интервале времени $[0; t]$. Для структурно-стабильного материала константы старения r_1, r_2 равны нулю, и $t_3 = t_2$. Старение влияет на деформацию упрочнения $\mathcal{E}_{ij}^{(H)}$, остальные составляющие деформации ползучести предполагаются не зависящими от старения. Способ учета старения с помощью деформационно-временного упрочнения предназначается в первую очередь для металлов (изменение структуры полимеров обычно влияет на все составляющие $\varepsilon_{ij}^{(C)}$, что будет рассмотрено ниже).

Согласно [34], сталь 304 после полного отжига проявляет значительное старение при $T = 600^\circ\text{C}$. Обозначим уровни напряжений $(u, v, w, \zeta; \omega) = (100, 125, 140, 125/\sqrt{2}, 140/\sqrt{2})$ [МПа]. Маркеры на фиг. 7 представляют результаты опытов [34]: $\sigma_{11} = \sigma_u^{(0)} H(t)H(t^{(1)} - t)$, $t^{(1)} = 768$ ч, $\sigma_u^{(0)} = u, v, w$ (нагружения 1–3); $\sqrt{3} \sigma_{12} = \sigma_u^{(0)} H(t)H(t^{(1)} - t)$ (нагружения 4–6 с $t^{(1)}$, $\sigma_u^{(0)}$ как в нагружениях 1–3); нагружения 7, 8 вида [29] с $\sigma_u = v$, $t_0 = 96$ ч, $\theta_0 = \pi/2$, π соответственно (треугольники на фиг. 7, а и 7, b); кусочно-стационарное кручение 9 в последовательности $\sqrt{3} \sigma_{12} = v, 0, -w, -u, -v, w, -v, u, w, v, -v, 0, -v$; сложные кусочно-стационарные нагружения в последовательности $(\sigma_{11}; \sqrt{3} \sigma_{12}) = (0; v)$, $(\zeta; -\zeta)$, $(\zeta; \zeta)$, $(\zeta; -\zeta)$, $(v; 0)$, $(\zeta; \zeta)$, $(0; -v)$, $(0; v)$, $(\zeta; \zeta)$, $(0; -v)$, $(v; 0)$ (программа 10) и $(\sigma_{11}; \sqrt{3} \sigma_{12}) = (0; v)$, $(u; 0)$, $(\zeta; -\zeta)$, $(\omega; \omega)$, $(0; v)$, $(\zeta; \zeta)$, $(0; u)$, $(w; 0)$, $(\zeta; -\zeta)$, $(0; w)$ (программа 11). Длительности ступеней в нагружениях 9–11 видны из фиг. 7, b–d. Константы q_R, q_H (см. седьмой столбец таблицы) определены из опытов 5, 8 соответственно, значение $r_1 = 0.1$ – по данным [34] о ползучести после длительной выдержки перед нагружением $\sigma_{11} = v$, значения $r_2 = 7.8$ и $\xi_0 = 100$ ч – по данным на двух ступенях “отдыха” в нагружении 9. Преобладание доли деформации $\mathcal{E}_{ij}^{(H)}$ ($q_H = 0.78$) связано со значительным старением материала, которое учитывается в $\mathcal{E}_{ij}^{(H)}$. Результаты расчетов по модели (4.1),



Фиг. 7

(4.2) (с приведенным временем t_3 (6.1) вместо t_2), (4.4), (4.5), (5.1), (5.2) показаны линиями на фиг. 7; максимальная ошибка $\approx 5 \cdot 10^{-4}$ соответствует разбросу в опытах [34]. Неучет частичного разрушения при "отдыхе" на второй ступени нагружения 9 привел бы к 1.5-кратному занижению приращения деформации ползучести на третьем этапе нагружения 9. Другие способы учета старения предложены в работах [7, 34–37].

В структурно-нестабильных полимерах с ростом деформации ползучести отмечается перераспределение составляющих деформации ползучести за счет уменьшения доли обратимой части [38, 39]. В качестве простейшего параметра изменения структуры материала в процессе нагружения выберем величину

$$\mu(t) = \int_0^t \sigma_u^{*v}(\tau) d\tau \quad (6.2)$$

При необходимости подынтегральное выражение в (6.2) может быть функцией $f_3(\sigma_u^{*v})$.

Старение (при $\sigma_u^{*v} = 0$) можно учесть значением $f_3(0) \neq 0$.

Для полимеров при температуре ниже переходной к вязкотекучему состоянию можно принять

$$\varepsilon_{ij}^{(C)} = \varepsilon_{ij}^{(VE)} + \varepsilon_{ij}^{(H)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(VP)} = \varepsilon_{ij}^{(V)} = 0 \quad (6.3)$$

Замена в модели (6.3), (4.1), (4.2) константы q_R на убывающую функцию $q_R(\mu)$ позволяет правильно описать возврат в опытах с разгрузкой $\sigma_{ij}^*(t) = \sigma_{ij}^{(0)} H(t)H(t^{(1)} - t)$ (доля $\varepsilon_{ij}^{(VE)}$ в разложении (6.3) уменьшается с ростом $\sigma_u^{(0)}$ и $t^{(1)}$ [38, 39]). Применение этой модели к симметричному знакопеременному нагружению приводит к деформации с убывающей амплитудой при приблизительно равных максимумах в циклах, тогда как в опытах [40] наблюдается убывание и амплитуды, и максимумов деформации. Этого можно достичь введением в состав $\varepsilon_{ij}^{(H)}$ слагаемого, содержащего дополнительный подынтегральный множитель Q :

$$\varepsilon_{ij}^{(H)} = [1 - q_R(\mu)] \int_0^t \Phi_{ij}(\tau) d\tau + \int_0^t Q(\tau) \Phi_{ij}(\tau) d\tau \quad (6.4)$$

$$\Phi_{ij}(\tau) \equiv K(t_2(\tau)) [1 + g_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau))] S_{ij}^{*v}(\tau) dt_2(\tau) / d\tau$$

Будем считать, что модуль уменьшения доли $\varepsilon_{ij}^{(VE)}$ в разложении (6.3) за счет роста (для упрощения, линейного по μ) величин $1 - q_R$ и Q , входящих в соотношение (6.4), ограничен материальными константами R_1 и R_2 соответственно. Тогда можно принять

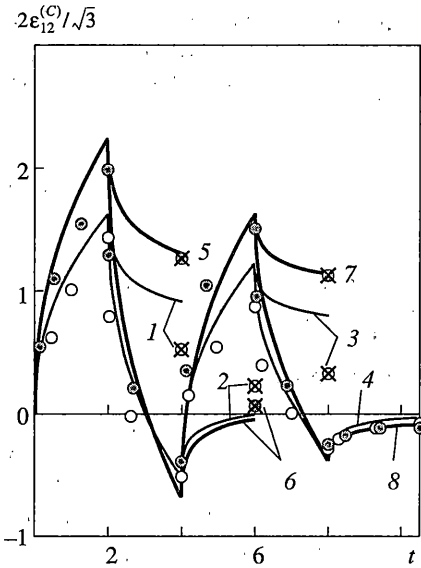
$$\varepsilon_{ij}^{(VE)} = [q_R(\mu) - Q_1(t)] \int_0^t K(t_1(t) - t_1(\tau)) [1 + g_1(\sigma_u^{*\wedge}(\tau))] S_{ij}^{*v}(\tau) dt_1(\tau) \quad (6.5)$$

$$q_R(\mu) = \min\{q_{R0} - \alpha_1 \mu; q_{R0} - R_1\}, \quad Q_1(t) = \min\{Q_2(t); R_2\}$$

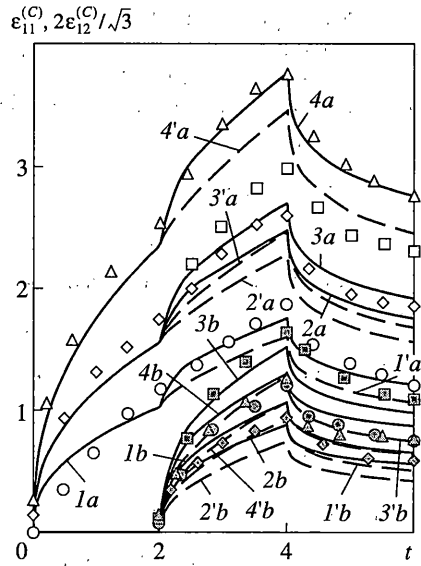
$$Q_2(t) = \int_0^t Q(\tau) K(t_2(\tau)) dt_2(\tau) / \int_0^t K(t_2(\tau)) dt_2(\tau)$$

$$\dot{Q}(t) = \alpha_2 \dot{\mu}(t) H[R_2 - Q_2(t)], \quad Q(0) = 0$$

При стационарном нагружении модель (6.3)–(6.5) переходит в (2.2), (2.3). Константы q_{R0} , R_1 , α_1 и R_2 , α_2 можно найти из опытов на возврат (с различающимися этапами нагрузки) и знакопеременное нагружение.



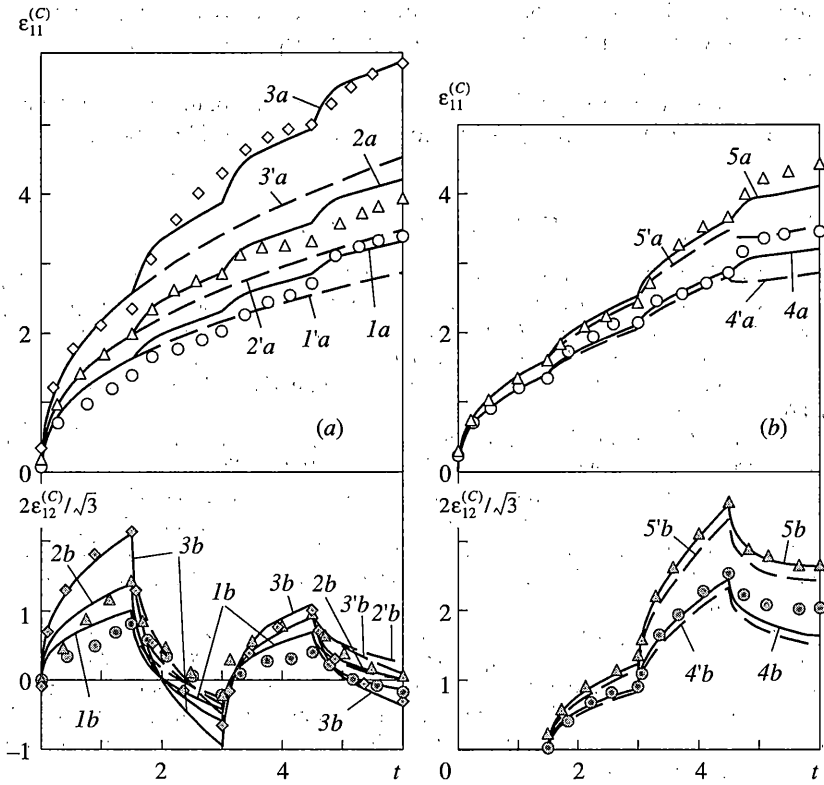
Фиг. 8



Фиг. 9

Такие опыты с целлулоидом при $T = 65^\circ\text{C}$ проведены в работе [40]: $\sigma_{12}(t) = u$ при $t/t_0 \in \{[2i-2; 2i-1], i = 1, \dots, j, 2i < j+2\}$, $\sigma_{12}(t) = -u$ при $t/t_0 \in \{[2i-1; 2i], i = 1, \dots, j, 2i < j+1\}$, $\sigma_{12}(t) = 0$ при $t/t_0 \in [j; j+1]$ (нагрузки 1–4 с $j = 1, \dots, 4$ соответственно, $u = 2.83$ МПа, $t_0 = 2$ ч); то же при $u = 3.4$ МПа (нагрузки 5–8). Светлые и темные круги на фиг. 8 относятся к нагрузкам 4 и 8. Для программ 1–3, 5–7 из приведенных в [40] данных можно найти только изменения деформации ползучести за последний этап $t/t_0 \in [j; j+1]$, $j = 1, 2, 3$ – они отложены от соответствующих точек $t = t_0, 2t_0, 3t_0$ нагрузок 4, 8 и показаны перечеркнутыми кругами. Вторая партия образцов испытана [40] по программам ($\sigma_{11}(t) = k_1 v H(t) H(t^{(2)} - t)$; $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = k_2 v H(t - t^{(1)}) H(t^{(2)} - t)$), $v = 5.88$ МПа, $t^{(2)} = 2t^{(1)} = 4$ ч, $(k_1; k_2) = (1; 1), (7/6; 5/6), (7/6; 7/6), (4/3; 1)$ (нагрузки 1–4 соответственно – круги, ромбы, квадраты, треугольники на фиг. 9). С третьей партией образцов (материал и температура те же) проведены опыты [41]: ($\sigma_{11}(t) = kwH(t)$; $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = kw$ при $t/t_0 \in (0; 1] \cup (2; 3]$, $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = -kw$ при $t/t_0 \in (1; 2] \cup (3; 4]$), $k = 1, 7/6, 7/5$ (нагрузки 1–3, фиг. 10, a) и ($\sigma_{11}(t) = kwH(t)$; $\sqrt{3} \sigma_{12}(t) = kw[H(t - t_0) + (\sqrt{1.5} - 1)H(t - 2t_0)]H(3t_0 - t)$), $k = 1, 7/6$ (нагрузки 4, 5 – фиг. 10, b); $w = 2.94$ МПа, $t_0 = 1.5$ ч. Маркеры на фиг. 8–10 показывают экспериментальные значения разности полных и упругих деформаций.

Исходные кривые ползучести для рассматриваемых времен и напряжений в [40, 41] отсутствуют, поэтому вместо K и $[1 + g_1] S_{ij}^{*v}$ в (6.4), (6.5) использованы аппроксимации из [40, 41]. Приняты условия: $t_1 = t$ (подобие кривых ползучести [40, 41]), $f_3(\sigma_u^{*v}) = \sigma_u^{*v}$ (отсутствие старения на рассматриваемых временах [42]), $q_{R0} = 1$ (полная начальная обратимость). Из опытов 5, 8 для первой партии найдены $R_2 = 3R_1 = 0.6$, $\alpha_2 = 2\alpha_1 = 0.04$ (МПа \cdot ч) $^{-1}$. Безразмерные величины $R_1, R_2, \alpha_2/\alpha_1$, характеризующие влияние структуры материала на его поведение при ползучести, взяты одинаковыми для всех трех партий.



Фиг. 10

Масштабные константы α_1, α_2 , определяемые скоростью изменения структуры в процессе нагружения, по сравнению с указанными для первой партии уменьшены в 1.3 раза для второй партии и увеличены в 2.4 раза для третьей, что коррелирует с соотношением жесткостей материала трех партий. Результаты вычислений по модели (6.2)–(6.5) показаны сплошными линиями на фиг. 8 и штриховыми – на фиг. 9, 10. Для увеличения точности описания второй и третьей групп опытов (в которых нагружение неоднородно) следует учесть отмеченное в [40, 41] кратковременное разупрочнение материала после изменений направления нагружения. Как и в п. 3, 5, введем дополнительное слагаемое $\mathfrak{E}_{ij}^{(CL)}$ в состав деформации ползучести:

$$\epsilon_{ij}^{(C)} = \mathfrak{E}_{ij}^{(VE)} + \mathfrak{E}_{ij}^{(H)} + \mathfrak{E}_{ij}^{(CL)} \quad (6.6)$$

$\mathfrak{E}_{ij}^{(CL)}$ примем в виде (5.4) с S_{ij} в качестве $S_{ij}^{*\nu}$. Из опытов 1, 3 для третьей партии найдены $\lambda = 0.5$ ч, $\eta\alpha = 2.2 \cdot 10^{-4}$ МПа $^{-1}$, $d/\sigma_u^{(lin)} = 0.4$ МПа $^{-1}$. Для менее жесткой второй партии при сохранении значений λ и $\eta\alpha$ величина $d/\sigma_u^{(lin)}$ уменьшена в 1.7 раза в соответствии с данными опыта 4. Сплошные линии на фиг. 8–10 рассчитаны по модели (6.2), (6.4)–(6.6), (5.4).

В заключение отметим, что рассмотренные серии опытов по отдельности использовались для проверки ряда известных теорий вязкоупругости и ползучести в работах [2, 3, 9, 19–23, 29, 30, 34, 40, 41, 43, 44]. Предлагаемая здесь модель по своей точности не уступает перечисленным результатам на всей совокупности рассмотренных опытов.

В публикуемой работе исследовались процессы с невысокими уровнями поврежденности. Модель накопления повреждений (вплоть до разрушения) при сложных нагружениях представлена в [45].

Автор благодарит профессора Быкова Д.Л. за плодотворные обсуждения работы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты 03-01-00667, 05-01-00598).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. *Крегерс А.Ф., Вилкс У.К., Лейтмане М.Я.* Прямая и обратная ползучесть физически нелинейного полимерного материала // *Механика полимеров*. 1973. № 5. С. 786–795.
3. *Крегерс А.Ф., Вилкс У.К., Лейтмане М.Я.* Нелинейная ползучесть полиэтилена высокой плотности при изменяющихся во времени напряжениях // *Механика полимеров*. 1973. № 5. С. 796–803.
4. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе). М.: Наука, 1972. 328 с.
5. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
6. *Быков Д.Л.* Использование структурных составляющих удельной работы внутренних сил для описания сопротивления вязкоупругих материалов // *Изв. РАН. МТТ*. 2003. № 3. С. 99–111.
7. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
8. *Пелешко В.А.* Учет эффектов сложного нагружения в моделях нелинейной вязкоупругости и ползучести // *Упругость и неупругость*. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 320–322.
9. *Крегерс А.Ф., Вилкс У.К.* Ползучесть полиэтилена высокой плотности в активных и пассивных режимах нагружения // *Механика композитных материалов*. 1985. № 4. С. 579–590.
10. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 571 с.
11. *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Некоторое обобщение моделей Фойгта и Максвелла // *Механика полимеров*. 1966. № 2. С. 190–196.
12. *Быков Д.Л., Коновалов Д.Н.* Определение материальных функций нелинейной теории термовязкоупругости с использованием ее иерархической структуры // *Изв. РАН. МТТ*. 1999. № 5. С. 189–205.
13. *Брызгалов Г.И.* О ползучести при переменных напряжениях // *ПМТФ*. 1962. № 3. С. 73–77.
14. *Самарин Ю.П.* Об одном обобщении метода разделения деформации в теории ползучести // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1971. № 3. С. 160–163.
15. *Симолян А.М.* Исследование ползучести стали X18H10T при больших деформациях // *Проблемы прочности*. 1975. № 6. С. 63–66.
16. *Lai J.S., Findley W.N.* Creep of 2618 aluminum under step stress changes predicted by a visco-viscoelastic model // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1980. V. 47. № 1. P. 21–26.
17. *Горелов В.И.* Исследование свойств ползучести и возврата у металлов // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1987. № 6. С. 137–142.
18. *Бугаков И.И.* Фотоползучесть. М.: Наука, 1991. 167 с.
19. *Murakami S., Ohno N.* A constitutive equation of creep based on the concept of a creep-hardening surface // *Intern. J. Solids Structures*. 1982. V. 18. № 7. P. 597–609.
20. *Kawai M.* Creep hardening rule under multiaxial repeated stress changes // *JSME Intern. J. Ser.A*. 1995. V. 38. № 2. P. 201–212.
21. *Наместников В.С., Хвостунков А.А.* Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках // *ПМТФ*. 1960. № 4. С. 90–95.
22. *Наместников В.С., Работнов Ю.Н.* О гипотезе уравнивания состояния при ползучести // *ПМТФ*. 1961. № 3. С. 101–102.
23. *Наместников В.С., Работнов Ю.Н.* О наследственных теориях ползучести // *ПМТФ*. 1961. № 4. С. 148–150.
24. *Наместников В.С.* Прямое и обратное кручение в условиях ползучести // *ПМТФ*. 1960. № 1. С. 121–122.

25. Локощенко А.М., Наместникова И.В., Шестериков С.А. Описание длительной прочности при ступенчатом изменении напряжения // Проблемы прочности. 1981. № 10. С. 47–51.
26. Аршакуни А.Л. Учет неоднородности деформации в кинетических уравнениях неустановившейся ползучести // Проблемы прочности. 1981. № 5. С. 15–17.
27. Наместников В.С. Феноменологическая модель ползучести при переменных нагрузках // ПМТФ. 1993. № 4. С. 123–127.
28. Павлов П.А. Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. Л.: Машиностроение, 1988. 252 с.
29. Ohashi Y., Ohno N., Kawai M. Evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under repeated multiaxial loading // J. Engng. Mater. Technol. 1982. V. 104. № 3. P. 159–164.
30. Ohno N., Murakami S., Ueno T. A constitutive model of creep describing creep recovery and material softening caused by stress reversals // J. Engng. Mater. Technol. 1985. V. 107. № 1. P. 1–6.
31. Никитенко А.Ф., Соснин О.В. О ползучести и длительной прочности при циклических режимах нагружения // Проблемы прочности. 1976. № 12. С. 18–20.
32. Ding J.L., Findley W.N. Nonproportional loading steps in multiaxial creep of 2618 aluminum // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. V. 52. № 3. P. 621–628.
33. Lee S.R., Ding J.L. Viscoplastic constitutive modeling with one scalar state variable // Intern. J. Plast. 1989. V. 5. № 6. P. 617–637.
34. Murakami S., Ohno N., Tagami H. Experimental evaluation of creep constitutive equations for type 304 stainless steel under non-steady multiaxial states of stress // J. Engng. Mater. Technol. 1986. V. 108. № 2. P. 119–126.
35. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
36. Cho U.W., Findley W.N. Creep and plastic strain of 304 stainless steel at 593°C under step stress changes, considering aging // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 2. P. 297–304.
37. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 4. С. 63–76.
38. Tobushi H. Uniaxial creep deformation of softened celluloid. Applicability of viscous-viscoelastic model to large strain // J. Soc. Mater. Sci., Jap. 1985. V. 34. № 380. P. 549–553.
39. Русов Б.П. Эффект перераспределения между составляющими деформации в кристаллических полимерах // Изв. вузов. Строительство. 1996. № 12. С. 126–127.
40. Tobushi H., Ohashi Y., Osawa K. Creep deformation of softened celluloid under nonproportional variable stresses // Bull. JSME. 1986. V. 29. № 257. P. 3665–3671.
41. Tobushi H., Narumi Y., Osawa K. Biaxial creep deformation of softened celluloid under variable stresses // Bull. JSME. 1986. V. 29. № 248. P. 348–354.
42. Tobushi H., Narumi Y. Mechanical property of celluloid under proportional loading (effect of time lapse by heating and isotropic property) // J. Soc. Mater. Sci., Jap. 1979. V. 28. № 307. P. 294–298.
43. Самарин Ю.П., Клебанов Я.М. Обобщенные модели в теории ползучести конструкций. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 1994. 196 с.
44. Pan W.F., Chiang W.J. Endochronic simulation for multiaxial creep // JSME Intern. J. Ser. A. 1998. V. 41. № 2. P. 204–210.
45. Пелешко В.А. Использование поверхности поврежденности для описания ползучести и длительной прочности при сложном нагружении // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 2. С. 124–138.

Москва

Поступила в редакцию
9.12.2003