МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 3 • 2006

УДК 539.214;539.374

© 2006 г. А.А. БУРЕНИН, Л.В. КОВТАНЮК

К ВОЗМОЖНОСТИ УСТАНОВЛЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА ПО ИТОГОВОМУ РАЗГРУЗОЧНОМУ СОСТОЯНИЮ

На примере упругопластического деформирования толстостенной трубы внешним давлением показана возможность указать характеристики упругопластического процесса нагрузки и разгрузки по известному итоговому распределению остаточных напряжений.

Очевидно, что остаточные напряжения в упругопластическом теле определяются всем процессом его деформирования. Они могут быть экспериментально измерены хотя бы в некоторых характерных для тела точках. Возникает вопрос о том, возможно ли восстановить тот процесс, который привел к известному распределению остаточных напряжений. Отталкиваясь от желаемого уровня и желаемого распределения остаточных напряжений для эксплуатационных качеств готового изделия, таким способом возможно указать обратное влияние на режимы упругопластического деформирования. В общем случае такая задача, по-видимому, неразрешима, но в некоторых практически важных случаях это возможно. Здесь приводится пример такого случая.

Рассмотрим одномерную упругопластическую задачу о деформировании толстостенной трубы внешним давлением. Полагаем, что внутренний радиус трубы равен r_0, а внешний R_0 и в течение некоторого промежутка времени материал трубы находился в условиях

$$\sigma_{rr}\big|_{r = R_0} = -p(t), \quad \sigma_{rr}\big|_{r = r_0} = 0 \tag{1}$$

После снятия внешнего давления в материале трубы зафиксируется некоторое одномерное поле остаточных напряжений. Будем полагать, что оно известно, например, в качестве аппроксимации экспериментальных точек или только своими измеренными значениями в нескольких точках тела. Предположим, что пластическое течение осуществлялось в некоторой области $r_0 \le r \le r_1$, однако, граница этой области r_1 по известному распределению остаточных напряжений непосредственно найдена быть не может. Более того, при разгрузке среды возможно повторное пластическое течение [1, 2] в области $r_0 \le r \le r_2$, вызываемое растягивающими разгрузочными напряжениями. Граница такой области r_2 также опытно неизмерима и может быть только вычислена.

В области $r_1 \le r \le R_0$, где необратимого деформирования не происходило, по известным напряжениям определятся деформации $e_{rr} = \overset{e}{e}_{rr}$, $e_{\theta\theta} = \overset{e}{e}_{\theta\theta}$ и перемещения $u = u_r$. Для этого достаточно записать уравнение равновесия линейной упругой среды в перемещениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0$$

Для постоянных c_1, c_2 в решении данного уравнения

$$u = c_1/(2r) + c_2 r \tag{2}$$

получаем зависимости

$$\sigma_{rr} = -\mu c_1/r^2 + 2(\lambda+\mu)c_2$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \mu c_1/r^2 + 2(\lambda+\mu)c_2 \tag{3}$$

Здесь λ и μ – параметры Ламе.

Одну из постоянных c_1 или c_2 можно определить из условия $\sigma_{rr} = 0$ при $r = R_0$. Другая остается неизвестной. Воспользоваться условием, что $\sigma_{rr} = 0$ при $r = r_0$ нельзя из-за того, что при $r \le r_1$ осуществлялось необратимое деформирование.

Рассмотрим области, где происходило пластическое течение. Полагаем, что в процессе пластического течения выполнялось условие максимума касательных напряжений (условие Треска):

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k \tag{4}$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения, имеем

$$\varepsilon_{rr}^p = de_{rr}^p/dt = \beta, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^p = de_{\theta\theta}^p/dt = -\beta$$
$$e_{rr}^p = -e_{\theta\theta}^p \tag{5}$$

Последнее соотношение из (5) позволяет вычислить перемещения в области пластического деформирования [3]. Действительно, из очевидных зависимостей

$$e_{rr}^p = \partial u/\partial r - e_{rr}^e, \quad e_{\theta\theta}^p = u/r - e_{\theta\theta}^e$$

следуют два уравнения:

$$\partial u/\partial r + u/r = e_{rr}^e + e_{\theta\theta}^e$$
$$\partial u/\partial r - u/r = e_{rr}^e - e_{\theta\theta}^e + 2e_{rr}^p \tag{6}$$

Обратимые деформации выражаются через известные напряжения согласно закону Гука для изотропной среды

$$e_{rr}^e = \gamma\left(\sigma_{rr} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{\theta\theta}\right), \quad e_{\theta\theta}^e = \gamma\left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{rr}\right)$$
$$\gamma = \frac{\lambda+2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)} \tag{7}$$

Исключая обратимые деформации в (6) согласно (7), найдем

$$u = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}\frac{1}{r}\int r(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})dr$$

$$u = \frac{r}{2\mu}\int\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}dr + 2r\int\frac{e_{rr}^p}{r}dr$$

При помощи уравнения равновесия неопределенные интегралы вычисляются так, что получаем окончательные зависимости

$$u = \frac{1}{2(\lambda+\mu)}r\sigma_{rr} + \frac{c_3}{r}$$

$$u = -\frac{1}{2\mu} r\sigma_{rr} + 2r\int \frac{e_{rr}^{p}}{r} dr$$

Сравнение этих двух зависимостей для $u(r)$ позволяет вычислить необратимые деформации

$$e_{rr}^{p} = -e_{\theta\theta}^{p} = \gamma(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) - c_3/r^2$$

Заметим, что в силу (4):

$$e_{rr}^{p} = B - c_3/r^2 \qquad (8)$$

где B – известная постоянная, связанная только с пределом текучести k. В случае, когда последний не постоянен, например, при деформировании в неизотермических условиях, B также окажется зависимой от температуры. Если процессом теплопроводности, как более быстрым, пренебречь, то B определится значением температуры в момент окончания процесса нагрузки. Такое значение B будет меньше соответствующего его значения в изотермическом случае. Наконец, если пренебречь процессом теплопроводности нельзя, то следует связать напряжения с измерением температуры. Следуя закону Дюгамеля – Неймана, запишем

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^{e} - f(r))\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^{e}$$

$$f(r) = 3K\alpha(T(r) - T_0)$$

Здесь K – модуль всестороннего сжатия, α – коэффициент линейного расширения, $T(r)$ и T_0 – текущее и начальное значения температуры. В этом случае необратимые деформации определяются зависимостью

$$e_{rr}^{p} = \gamma(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}) - \frac{1}{2(\lambda+\mu)} f(r) - \frac{1}{(\lambda+\mu)r^2}\int rf(r)dr \qquad (9)$$

Остановимся на случае, когда за счет более быстрого процесса теплопроводности по сравнению с процессом необратимого деформирования температуру можно считать функцией только времени. После разгрузки для областей с накопленными пластическими деформациями, следуя (6), можно получить

$$u = \frac{1}{2(\lambda+\mu)} r\sigma_{rr} + \frac{A}{r} \qquad (10)$$

откуда следует

$$\sigma_{rr} = 2(\lambda+\mu)\left(\frac{u}{r} - \frac{A}{r^2}\right)$$
$$\sigma_{\theta\theta} = 2(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{A}{r^2}\right) \qquad (11)$$

Постановка найденных перемещений (10), напряжений (11) и не изменяющихся в процессе разгрузки пластических деформаций (8) во второе уравнение (6) позволяет вычислить величину

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{c_4}{r^2} - B\right), \quad c_4 = c_3 - A \qquad (12)$$

Тогда, воспользовавшись уравнением равновесия, для компонент перемещений и напряжений получим окончательные зависимости

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = \frac{C}{2r^2} - D\ln r + A_1, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{C}{2r^2} - D(\ln r + 1) + A_1 \\
&u = \frac{1}{2(\lambda+\mu)} r\left(\frac{C}{2r^2} - D\ln r + A_1\right) + \frac{A}{r} \\
&C = c_4/\gamma, \quad D = -B/\gamma
\end{aligned} \tag{13}$$

Одну из постоянных, например A_1, можно исключить, воспользовавшись вторым граничным условием (1). Приравнивая на упругопластической границе $r = r_1$ перемещения и напряжения (2) и (3) в упругой области к соответствующим компонентам (13) в пластической области, получим систему трех уравнений с неизвестными постоянными c_1 (или c_2), C, D, A, r_1. То есть для аналитического определения всех параметров напряженно-деформированного состояния (напряжений, перемещений, упругих и пластических деформаций, упругопластической границы) необходимо знать остаточные напряжения не только в двух граничных, но и в двух внутренних точках (или в любых четырех точках, одна из которых находится в упругой области).

При учете теплопередачи, аналогично зависимости (12), можно получить

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{c_5}{r^2} + e_{rr}^p\right)$$

где пластическая деформация e_{rr}^p согласно зависимости (9) включает неизвестную функцию температуры $f(r)$, которая после разгрузки неизвестна. То есть в этом случае нельзя указать конкретную зависимость вида (12), следовательно, необходимо задавать напряжения графически (провести аппроксимацию измеренных значений некоторой аналитической зависимостью). Удобнее задавать аналитически величину $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}$, а затем из уравнения равновесия определять σ_{rr}. Если напряжения определить в пластической области достаточно точно, то те же три уравнения содержат неизвестные постоянные c_1 (или c_2), c_5, r_1. То есть в этом случае напряжения в упругой области достаточно указать в одной точке.

При значительном уровне накопленных пластических деформаций возможно повторное пластическое течение [1]. Оно возникает на внутренней цилиндрической поверхности и связано с выходом напряженного состояния на поверхность нагружения при общей разгрузке тела. Но теперь пластическое течение связано уже с растягивающими напряжениями $\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -2k$. Если через r_2 обозначить границу области $r_0 \le r \le r_2$ повторного пластического течения, то всюду в этой области выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = -2k\ln\frac{F}{r}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -2k\left(\ln\frac{F}{r} - 1\right) \\
&u = -\frac{k}{\lambda+\mu} r\ln\frac{F}{r} + \frac{G}{r}
\end{aligned} \tag{14}$$

Постоянную F в (14) можно исключить, используя второе граничное условие (1). Приравнивая на границе $r = r_1$ перемещения (2) и (13) и компоненты напряжений (3) и (13), а на границе $r = r_2$ области повторного пластического течения перемещения и напряжения (13) и (14), получим шесть уравнений с неизвестными c_1 (или c_2), $C, D, A, A_1, G, r_1, r_2$. Для определения этих постоянных следует иметь опытные (измеренные) данные о значениях остаточных напряжений. При этом достаточно их знать в четырех точках тела. В качестве двух из них естественно выбрать граничные $r = R_0$ и $r = r_0$. Две другие могут быть выбраны произвольно. Необходимо, чтобы хотя бы одна из них оказалась в области $r_2 \le r \le r_1$. Если зависимость $T(r)$ существенна, то есть процессы теплопередачи и деформирования происходят в сравнимые времена, то к оговоренным условиям определения процесса по остаточным напряжениям наличие повторного пластического течения требует указания еще одного опытного значения для σ_{rr} или $\sigma_{\theta\theta}$ в области повторного пластического течения $r_0 \le r \le r_2$ или в области обратимого деформирования $r_1 \le r \le R_0$. Иначе, повторное пластическое течение не вносит здесь дополнительных сложностей в определение характерных параметров процесса по остаточным напряжениям.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-01134, 02-01-01128) и гранта Президента РФ НШ 890.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В.* Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Докл. РАН. 2000. Т. 375. № 6. С. 767–769.
2. *Буренин А.А., Ковтанюк Л.В.* Остаточные напряжения у цилиндрической полости в идеальной упругопластической среде // Проблемы механики неупругих деформаций. М.: Физматлит, 2001. С. 74–94.
3. *Ивлев Д.Д.* Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности // Успехи механики деформируемых сред (к 100-летию со дня рождения академика Б.Г. Галеркина). М.: Наука, 1975. С. 236–240.

Владивосток

Поступила в редакцию
10.06.2004