

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. В.А. ПОСТНОВ, Г.А. ТУМАШИК

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО КРИТЕРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, ПОДВЕРЖЕННОГО ДЕЙСТВИЮ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛЫ

Для консольного стержня, находящегося под действием следящей силы с запаздыванием, рассмотрена задача повышения критической нагрузки путем перераспределения материала по длине. Детально исследовано влияние изменения параметра запаздывания. Показано, что при неконсервативной нагрузке оптимизация стержня может приводить к значительному (в разы) увеличению критической нагрузки. При этом для оптимальных стержней наблюдается исключительно “флаттерный” тип потери устойчивости. С ростом неконсервативности системы кратность критической нагрузки (число совпадающих локальных оптимумов) для “оптимального” стержня возрастает.

Основные положения теории устойчивости неконсервативных систем достаточно подробно рассмотрены в фундаментальных монографиях В.В. Болотина [1, 2], Я.Г. Пановко и Губановой [3], Г. Циглера [4]. В таких системах может иметь место неустойчивость двух типов: статическая (дивергенция) и динамическая (флаттер). При этом для неконсервативных сил в общем случае не выполняется принцип взаимности работ [5, 6]. В результате проблема устойчивости систем, подверженных действию неконсервативных сил, сводится к обобщенной проблеме собственных значений для несамосопряженных дифференциальных уравнений движения. При переходе от континуальных систем к системам с конечным числом степеней свободы это приводит к формированию матриц жесткости, масс и сопротивления, часть из которых, соответствующая неконсервативным нагрузкам, является несимметричной.

Большое значение для моделирования неконсервативного нагружения получило понятие следящей нагрузки, введенное В.В. Болотиным [2]. Такая нагрузка “оставаясь постоянной по величине и перемещаясь вместе с телом, поворачивается таким образом, что углы, составляемые нагрузкой с координатными векторами лагранжевого базиса, остаются неизменными”. Физическая природа и возможность существования следящих нагрузок и, особенно, их связь с вопросами устойчивости реальных конструкций по сей день остается предметом оживленных дискуссий [1, 7–9]. Вместе с тем, следящие нагрузки и соответствующие им модельные задачи наиболее часто рассматриваются в работах, посвященных исследованию принципиальных эффектов устойчивости неконсервативных систем. Типичным примером является устойчивость консольного стержня, находящегося под действием сжимающей силы, приложенной на его конце и направленной при изгибе вдоль деформированной оси стержня [10–13] или же с некоторым запаздыванием от поворота конца [14–16].

Значительное место среди исследований, относящихся к теории устойчивости, занимают работы, связанные с вопросами повышения устойчивости конструкций, в частности, посвященные оптимизации, т.е. перераспределению материала конструкций с целью повышения их устойчивости. Применительно к стержням к настоящему времени в случае действия консервативных сжимающих нагрузок при различных граничных условиях

получены как аналитические, так и численные решения задачи оптимизации с целью повышения критической силы дивергенции.

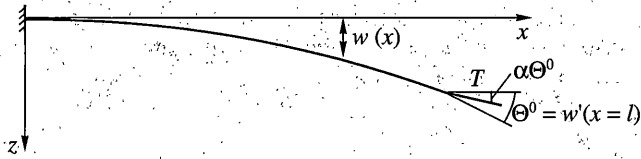
Оптимизация стержня под действием неконсервативной силы при возможной флаттерной потере устойчивости оказывается значительно более сложной задачей. Прежде всего, это связано с большей сложностью самого расчета динамической потери устойчивости по сравнению с дивергенцией, а также с необходимостью учета возможных взаимодействий между собой частот системы, которые могут привести к появлению большого числа локальных оптимумов.

Большая часть работ по оптимизации стержня под действием неконсервативной нагрузки посвящена оптимальному проектированию стержня Бека-Феодосьева под действием чисто следящей силы. Первыми в этом направлении можно считать работы К. Вепи [17] и Ф. Одея и И. Таджбакша [18]. Оптимальный стержень, полученный в первой из упомянутых выше работ, основанной на минимизации обобщенного Гамильтониана, соответствовал локальному оптимуму функционала для первой формы потери устойчивости. Авторы второй работы в своем решении основывались на удовлетворении необходимых условий оптимальности и предположении о том, что флаттерная потеря устойчивости имеет место в результате совпадения первой и второй частот, т.е. также для первой формы потери устойчивости. Однако, как показал Ж.Л. Клодон [19], полученный в этих работах "оптимальный" стержень может потерять устойчивость при совпадении второй и третьей частот при критической силе много меньшей критической силы, соответствующей совпадению первой и второй частот. Позже, М. Ханаока и К. Васидзу [20] показали, что полученный в [19] стержень также не является оптимальным. Его дальнейшая оптимизация привела к появлению кратной критической силы, соответствующей двум нижшим парам частот, значение которой оказалось на 40% выше по сравнению с результатом работы [19].

Среди работ последнего десятилетия можно выделить работы У.Т. Рингертца [22] и М. Лангтьема и И. Сугийямы [23]. Их результаты для стержня Бека-Феодосьева качественно и количественно отличаются от результатов работы [19–21]. В частности, оптимальный стержень У.Т. Рингертца характеризуется кратной критической силой для первой и четвертой пар частот, а оптимальный стержень М. Лангтьема – кратной критической силой для второй и четвертой пар. Заметим, что во всех приведенных выше работах для оптимальных вариантов отмечается большая чувствительность таких стержней к малым несовершенствам, что может приводить к возможному резкому падению критической силы. Такая чувствительность объясняется близостью соседних частот при значениях нагрузок, меньших критической.

1. Постановка задачи. В настоящей работе в качестве основного объекта выбран консольный стержень, описываемый балочной моделью Эйлера, находящийся под действием следящей силы с запаздыванием (фиг. 1). Введение запаздывания следящей силы от поворота конца стержня позволяет рассмотреть случай одновременного приложения консервативной и неконсервативной нагрузки, а параметр запаздывания выступает в качестве параметра неконсервативности. При изменении параметра запаздывания от нуля до единицы характер сжимающей силы меняется от консервативного до чисто следящего неконсервативного, а дивергентная потеря устойчивости при малой неконсервативности системы сменяется флаттером для больших степеней неконсервативности.

Рассмотрим консольный стержень переменной жесткости на изгиб $EI(x)$. К правому концу стержня приложена следящая сила T , линия действия которой образует угол $(1 - \alpha)\Theta^0$ с упругой линией балки, где угол Θ^0 равен углу поворота крайнего правого сечения балки $w'(x = l)$. Исходное статическое состояние равновесия рассматриваемой системы характеризуется следующими параметрами: прогиб $w(x) = 0$, осевая сжимающая сила во всех сечениях $T = \text{const}$.



Фиг. 1

Уравнение малых колебаний стержня без учета сил сопротивления запишется в форме

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + T \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

Граничные условия при этом имеют следующий вид:

$$w(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad EI(x) \left[\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] \Big|_{x=l} = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] \Big|_{x=l} = -T(1 - \alpha) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l}$$

Зависимость функции прогиба от времени принята в виде $w(x, t) = w(x)e^{\lambda t}$, где λ – частота колебаний.

Дискретизация системы, описываемой уравнениями (1.1)–(1.2), производится с применением метода конечных элементов. При этом использован стандартный балочный 4-узловой конечный элемент. Прогиб такого конечного элемента определяется через узловые неизвестные

$$w(x) = \sum_{i=1}^4 q_i \varphi_i(x)$$

где $\varphi_i(x)$ – функции Эрмита.

Матрица жесткости и матрица масс конечного элемента имеют вид

$$K_{ij} = EI \int_0^a \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx \quad (1.3)$$

$$B_{ij} = m \int_0^a \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (1.4)$$

где EI и m – постоянные по длине жесткость на изгиб и погонная масса конечного элемента.

Действие сжимающей силы T в каждом из элементов описывается симметричной силовой матрицей

$$H_{ij}^{(1)} = \int_0^a \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx \quad (1.5)$$

Матрица $[\mathbf{H}^{(1)}]$ не учитывает неконсервативность нагружения и, как видно из (1.5), является симметричной. Учет неконсервативности сжимающей силы обеспечивается дополнительной несимметричной матрицей

$$H_{ij}^{(2)} = \varphi_i(x)\varphi_j'(x)|_{x=a} \quad (1.6)$$

записываемой для конечного элемента, примыкающего к загруженному концу стержня.

Переход к глобальным неизвестным приводит к основному матричному уравнению, содержащему симметричные матрицы жесткости $[\mathbf{K}]$ и масс $[\mathbf{B}]$ и несимметричную, в случае неконсервативной нагрузки, силовую или геометрическую матрицу $[\mathbf{H}] = [\mathbf{H}^{(1)}] + [\mathbf{H}^{(2)}]$:

$$[[\mathbf{K}] + \lambda^2[\mathbf{B}] - T[\mathbf{H}]]\{\mathbf{Q}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (1.7)$$

Условием существования ненулевых решений является равенство нулю определителя системы. Оно используется для определения частот системы, как функций нагрузки T и последующего определения потери устойчивости, как момента появления положительной вещественной части хотя бы у одной из частот.

С позиции устойчивости конструкции возможны два подхода к постановке задачи оптимизации: первый – предполагает уменьшение массы конструкции при сохранении заданной критической нагрузки; второй – увеличение критической нагрузки при сохранении начальной массы. В настоящей работе используется второй подход: в качестве функции цели принята критическая сила, а условие сохранения массы выступает в качестве ограничения на параметры состояния.

Сечение стержня принято прямоугольным, постоянной ширины и меняющейся в ходе оптимизации высоты. В качестве параметров проектирования выбраны высоты отдельных конечных элементов h_j .

2. Метод решения задачи оптимизации. Поставленная задача оптимизации является нелинейной, для ее решения используется метод локальной линеаризации, в соответствии с которым итерационный процесс реализуется следующим образом:

(а) Определение критической силы T_{cr} при заданных или полученных на предыдущем шаге высотах конечных балочных элементов.

(б) Вычисление коэффициентов чувствительности – функций влияния переменных проектирования на критическую силу:

$$\frac{\partial T_{cr}}{\partial h_j} = \frac{\langle \{\mathbf{Q}^*\}^T [\frac{\partial[\mathbf{K}]}{\partial h_j} + \lambda^2 \frac{\partial[\mathbf{B}]}{\partial h_j}] \{\mathbf{Q}\} \rangle / \langle \{\mathbf{Q}^*\}^T [2\lambda[\mathbf{B}]] \{\mathbf{Q}\} \rangle}{\langle \{\mathbf{Q}^*\}^T [\mathbf{H}] \{\mathbf{Q}\} \rangle / \langle \{\mathbf{Q}^*\}^T [2\lambda[\mathbf{B}]] \{\mathbf{Q}\} \rangle} \quad (2.1)$$

где $\{\mathbf{Q}\}$ и $\{\mathbf{Q}^*\}$ – векторы, определяющие формы потери устойчивости исходной и сопряженной задач:

$$\left. \begin{aligned} [[\mathbf{K}] + \lambda^2[\mathbf{B}] - T_{cr}[\mathbf{H}]]\{\mathbf{Q}\} &= \{\mathbf{0}\} \\ [[\mathbf{K}] + \lambda^2[\mathbf{B}] - T_{cr}[\mathbf{H}]]^T \{\mathbf{Q}^*\} &= \{\mathbf{0}\} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

(с) Определение приращений параметров проектирования dh_j , при которых оказывается максимальным приращение линейной функции

$$dT_{cr} = \sum_j \frac{\partial T_{cr}}{\partial h_j} dh_j$$

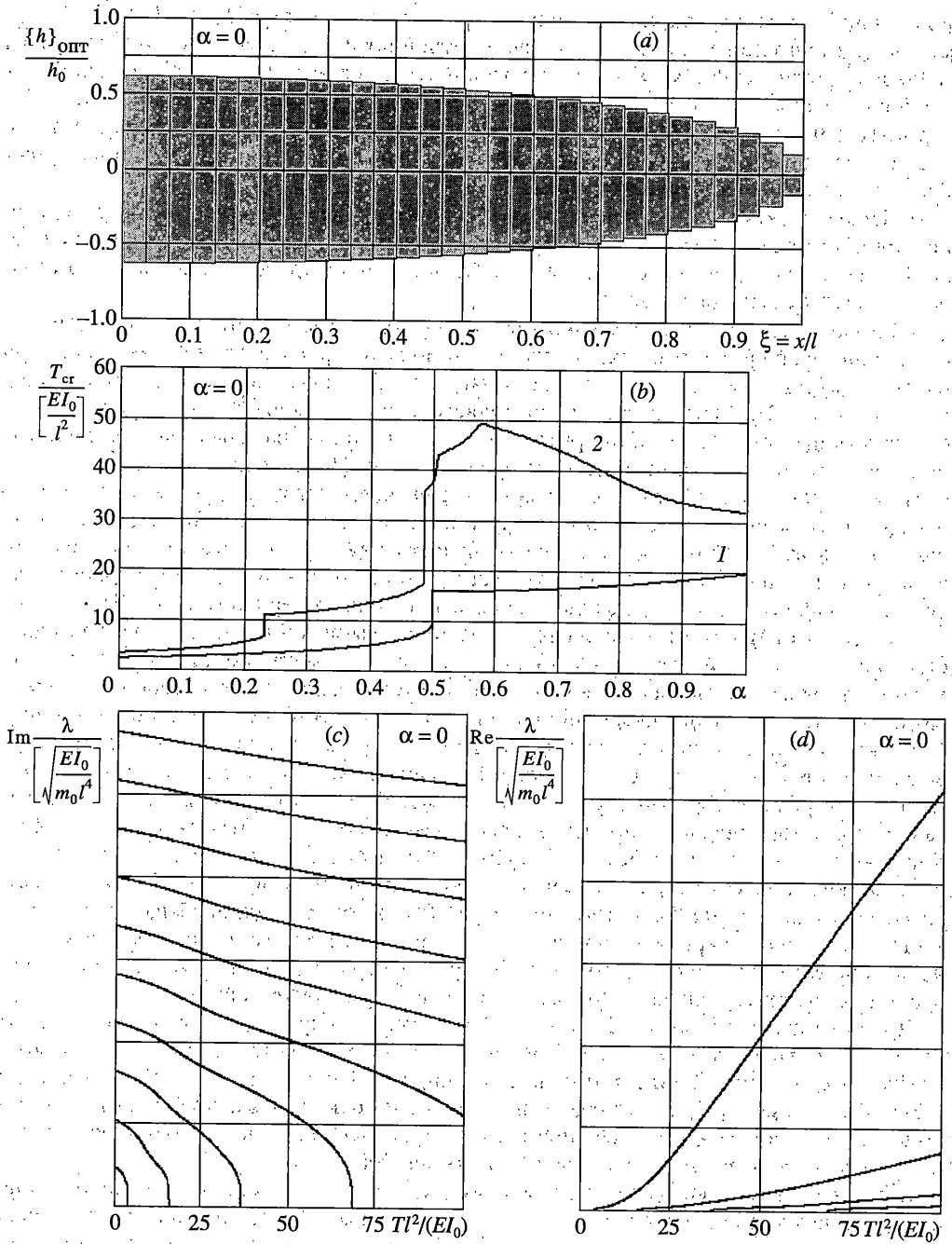
при ограничениях на приращения параметров проектирования $h_{\min} \leq h_j + dh_j \leq h_{\max}$, $|dh_j| \leq h_{\text{step}}$; при условии исключения дивергентной потери устойчивости при нагрузках меньших критической и условии несовпадения соседних частот для исключения флаттерного падения критической силы ($\lambda_{r+1} - \lambda_r > 0$, $T_k \leq T_{\text{cr}}$). Здесь r – номер частоты, T_k – ряд контрольных значений сжимающей силы, выбираемых на каждой итерации после анализа частотного спектра и выявления частотных взаимодействий, которые могут привести к падению критической силы.

(d) Проверка критерия окончания итерационного процесса. В качестве такого критерия принята малая разность между двумя последовательными значениями функции цели. В случае его удовлетворения процесс оптимизации прекращается; в противном случае происходит переход к шагу 1.

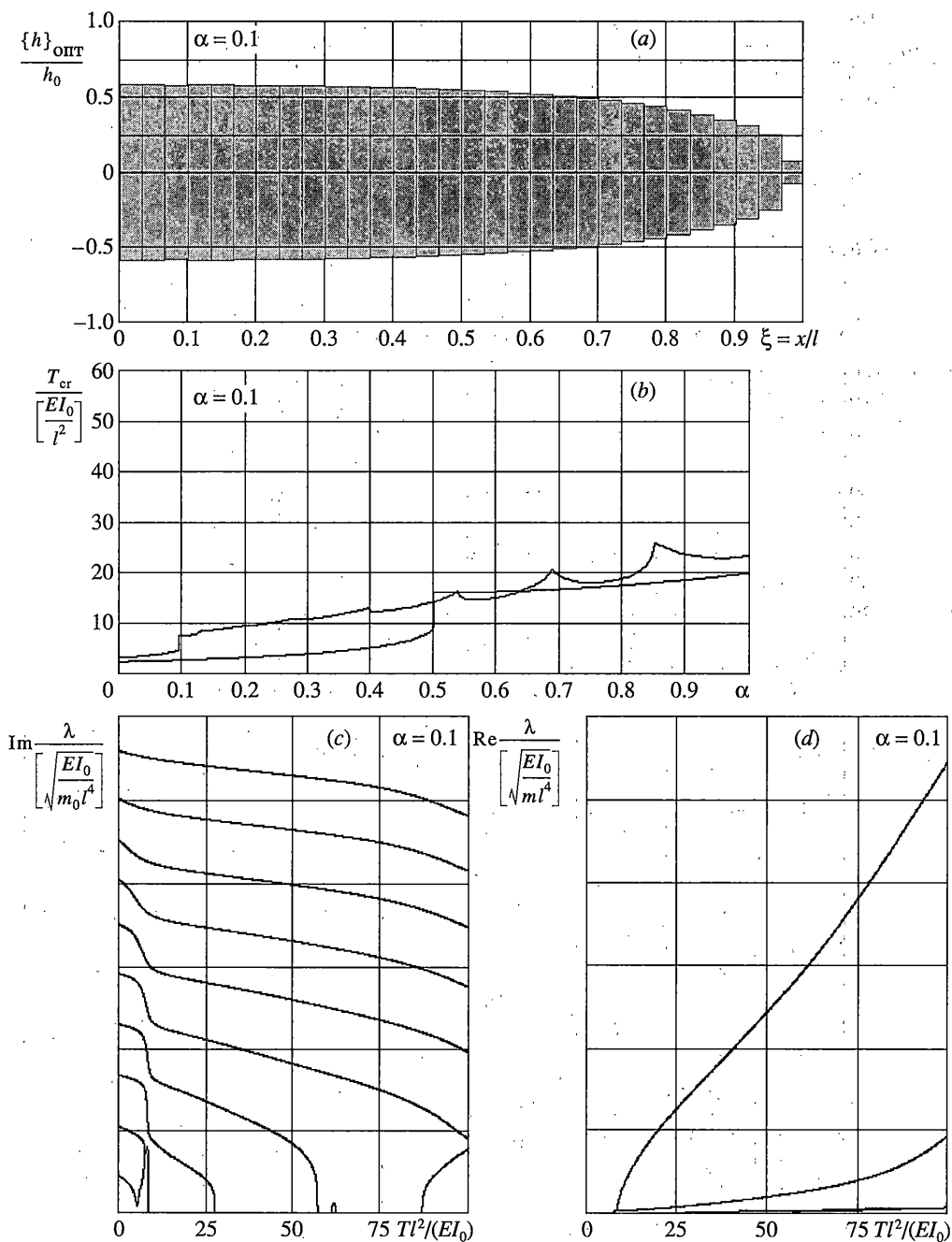
4. Результаты численных расчетов и их анализ. Для стержня прямоугольного сечения с меняющейся в процессе оптимизации высотой рассмотрены задачи оптимизации при различных степенях неконсервативности нагрузки. Ряд полученных результатов представлен на фиг. 2–5. В частности, на них приведены оптимальные формы стержней и соответствующие им зависимости критических сил от параметра запаздывания и частотные спектры при заданном параметре запаздывания. Первым представлен стержень, оптимизированный для случая действия консервативной нагрузки (фиг. 2, *b*, кривая 1 – исходный стержень, кривая 2 – оптимальный). Полученный оптимальный вариант совпал с результатом работы [24]. Как видно, оптимизация в предположении действия консервативной силы позволила повысить устойчивость и в неконсервативной области. При этом наблюдается уменьшение дивергентной зоны потери устойчивости. Следует также отметить, что оптимизация для случая консервативной нагрузки оказалась единственной, для которой оптимальный вариант имеет дивергентную потерю устойчивости. Для стержня оптимизированного в предположении действия даже малой неконсервативности ($\alpha = 0.1$) зона дивергенции полностью исчезает (фиг. 3). При оптимизации с большим значением параметра запаздывания флаттер смещается от первой и второй к высшим частотам. Так при оптимизации для параметра запаздывания $\alpha = 0.2$ в оптимальном стержне флаттер происходит при взаимодействии второй и третьей частоты. С дальнейшим увеличением параметра неконсервативности в оптимальных вариантах имеет место кратная критическая сила. При $\alpha = 0.4$ в оптимальном варианте совпадают критические силы флаттера для первой-второй и пятой-шестой частот. А для параметра запаздывания $\alpha = 0.8$ (фиг. 4) оптимальный проект определяется совпадением флаттерных сил для пар первой-второй и четвертой-пятой частот. При этом последовательно проходятся точка одномодального флаттера для первой-второй частот, и точка одновременных флаттера для пары второй-третьей частот и дивергенции.

При оптимизации стержня Бека ($\alpha = 1.0$) был получен проект, у которого совпадают три флаттерные критические силы для пар первой-второй, четвертой-пятой и девятой-десятой частот (фиг. 5). Оптимальные стержни, полученные в работах У.Т. Рингертца [22] и М. Лангтьема [23] имеют совпадение лишь двух флаттерных критических сил. Дополнительное появление третьей флаттерной критической силы позволило увеличить критическую силу оптимального варианта еще на 15%.

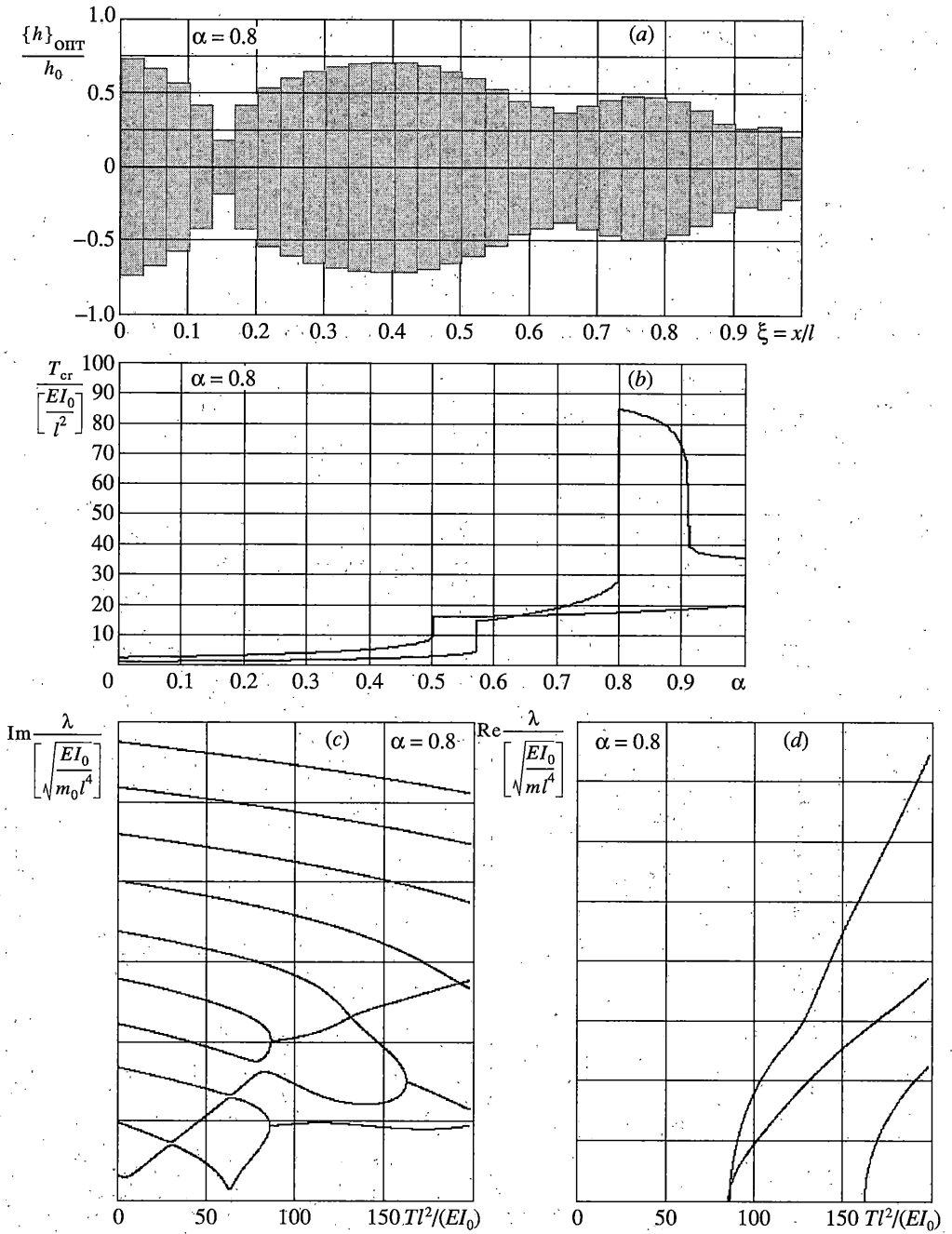
Отношения критических сил, полученных в ходе оптимизации при различных значениях параметра запаздывания α , к критическим силам исходного стержня представлены в таблице. Оптимизация представленных в этой таблице стержней проводилась при значениях параметра запаздывания $\alpha^* = 0, 0.2, 0.4, \dots, 1.0$. Далее, для каждого из этих “оптимизированных” стержней определялись критические силы при различных значениях угла запаздывания $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$. Анализ представленных в таблице числовых результатов показывает достаточно сложный характер влияния как угла запаздывания, для которого проводилась оптимизация, так и угла запаздывания действующей на такой стержень сжимающей силы. Естественно, что наибольший рост критической силы



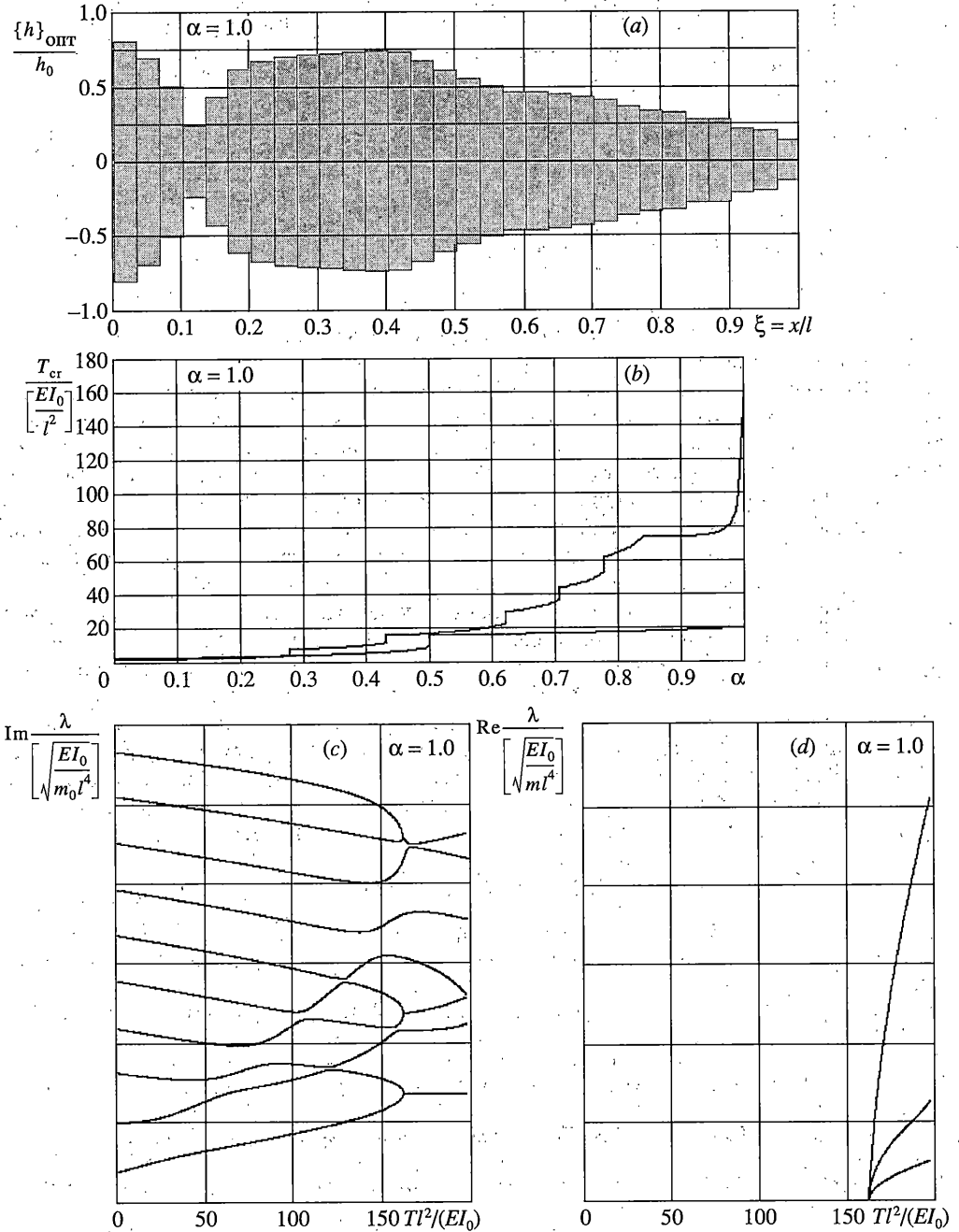
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

α	$\alpha^* = 0.0$	$\alpha^* = 0.2$	$\alpha^* = 0.4$	$\alpha^* = 0.5$	$\alpha^* = 0.6$	$\alpha^* = 0.8$	$\alpha^* = 1.0$
0.0	140	132.2	96.5	72.1	51.7	44.8	74.7
0.2	173	487.9	100.5	72.2	50.5	43.8	84.2
0.4	258.5	453.7	103.7	72.5	46.9	41.1	187.7
0.5	387	284.3	529.5	702.1	33.8	30.1	171.4
0.6	298.7	191.1	300.1	400	467.2	94.5	127.9
0.8	217.2	211.4	244.7	296.7	343.4	481.3	367.5
1.0	160.1	159.7	202.9	225.3	234.1	178.2	805.5

обеспечивается стержнем, оптимизация которого проводилась при угле запаздывания действующей нагрузки.

5. Заключение. Оптимизация системы с неконсервативным нагружением связана с необходимостью контроля частотного спектра в диапазоне нагрузок до критической. Введение соответствующих ограничений в алгоритм оптимизации позволяет добиться многократного увеличения критической нагрузки. Необходимо также отметить, что дивергентный тип потери устойчивости оптимального стержня возможен лишь при консервативном нагружении. Даже при малой неконсервативности нагрузки, характерная для исходного стержня дивергенция в процессе оптимизации сменяется флаттером. Увеличение критической силы флаттера в общем случае приводит к смещению флаттера с первой к высшим парам частот, а при большой неконсервативности – к возникновению мультимодальной потери устойчивости. Последняя характеризуется совпадением двух и более критических нагрузок и существованием нескольких форм потери устойчивости.

Однако следует отметить, что подобные оптимальные проекты обычно оказываются чрезвычайно чувствительны к малым изменениям в распределении материала, и малые вариации профиля стержня могут приводить к значительному падению критической силы. В связи с этим практический интерес могут представлять менее выигрышные с позиции увеличения критической силы, но более устойчивые к вариациям профиля результаты оптимизации без учета ограничений на частотный спектр [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1967. 420 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
5. Bolotin V.V. Dynamic instabilities in mechanics of structures // Applied Mechanics Review. 1999. V. 52. № 1. P. 1–9.
6. Шклярчук Ф.Н., Гришанина Т.В. Колебания неконсервативных систем. М.: Изд-во МАИ, 1989. 46 с.
7. Elishakoff I. Elastic Stability: From Euler to Koiter: there was none like Koiter // Meccanica. 2000. V. 35. P. 375–380.
8. Koiter W.T. Unrealistic follower forces // J. Sound and Vibration. 1996. V. 196. № 4. P. 636–638.
9. Sugiyama Y., Langthjem M.A. and Ryu B.-J. Realistic follower forces // J. Sound and Vibration. 1999. V. 199. № 4. P. 779–782.
10. Pflüger A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Berlin: Göttingen. 1950. 217 p.
11. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Гостехиздат, 1953.
12. Beck M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangentialen gedrückten Stabes // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 1952. V. 3. P. 225–228, 476–477.

13. Дейнеко К.С., Леонов М.Я. Динамический метод исследования устойчивости сжатого стержня // ПИММ. 1955. Т. 19. Вып. 6. С. 738–744.
14. Джанелидзе Г.Ю. Об устойчивости стержня при действии следящей силы // Тр. ЛПИ. 1958. № 192. С. 21–27.
15. Celep Z. On the vibration and stability of Beck's column subjected to vertical and follower forces // Zeitschrift fur Angewandte Mathem. und Mech. 1977. V. 57. P. 555–557.
16. Zuo Q.H., Schreyer H.L. Flutter and divergence instability of nonconservative beams and plates // Intern. J. of Solids and Structures. 1966. V. 33. № 9. P. 1355–1367.
17. Vepa K. Generalization of an energetic optimality condition for non-conservative systems // J. Struct. Mech. 1973. № 2. P. 229–257.
18. Odeh F., Tadjbakhsh I. The shape of the strongest column with a follower load // J. Opt. Theory Appl. 1975. V. 15. P. 103–118.
19. Claudon J.L. Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads // J. de Mécanique. 1975. V. 14. № 3. P. 531–543.
20. Hanaoka M., Washizu K. Optimum design of Beck's column // Comput. Struct. 1980. V. 11. P. 473–480.
21. Gutkowski W., Mahrenholz O., Pyrz M. Minimum weight design of structures under nonconservative forces // Optimization of large structural systems. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 1087–1100.
22. Ringertz U.T. On the design of Beck's column // Struct. Optimization. 1994. № 8. P. 120–124.
23. Langthjem M., Sugiyama Y. Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads // Comput. Struct. 2000. V. 74. P. 385–408.
24. Tadjbakhsh I., Keller J.B. Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1962. V. 29. № 1. P. 159–164.
25. Постнов В.А., Тумайшук Г.А. Оптимизация консольного призматического стержня по критической силе флаттера // Проблемы прочности и пластичности. Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2001. Вып. 63. С. 104–111.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
7.10.2005