

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. **В.В. БОЛОТИН, В.П. РАДИН, В.П. ЧИРКОВ, А.В. ЩУГОРЕВ**

УСТОЙЧИВОСТЬ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ С УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ ПРИ НЕПОТЕНЦИАЛЬНОМ НАГРУЖЕНИИ

Одной из особенностей механических систем, нагруженных неконсервативными позиционными (следящими) силами, является наличие при определенных условиях потери устойчивости различных типов [1, 2]. Если в окрестности границы области неустойчивости в пространстве параметров все решения уравнений движения имеют монотонный характер, то говорят о потере устойчивости по типу дивергенции. Если среди решений имеются колебательные решения, то говорят о потере устойчивости типа флаттера. Для систем с сосредоточенными параметрами классическим примером такой системы служит маятник Циглера [3], для упругих систем с распределенными характеристиками – консольный стержень, нагруженный потенциальной (“мертвой”) и следящей силами [4]. Основная задача при исследовании таких систем состоит в построении критической поверхности, отделяющей в пространстве параметров область устойчивости равновесного положения от области неустойчивости. Эта критическая поверхность (граница области устойчивости) состоит из различных частей, пересечение которых соответствует различным типам потери устойчивости. Типы бифуркации неконсервативных систем зависят как от параметров внешнего нагружения, так и от внутренних параметров. В данной работе проводится систематическое исследование устойчивости стержня, защемленного на одном конце и упруго опертого на другом, нагруженного потенциальной и следящей силами. Анализируется влияние жесткости упругого закрепления на положение критической поверхности и тип потери устойчивости при ее пересечении. Построение границы области устойчивости проводится двумя способами: с использованием континуального подхода, т.е. посредством решения краевой задачи, и с применением метода разложения по формам собственных колебаний (метод нормальных координат). Задача о дивергентных бифуркациях для маятника Циглера с дополнительной упругой связью была рассмотрена в работе [5].

1. Рассмотрим стержень, жестко защемленный на одном конце и упруго опертый на другом (фиг. 1). Стержень находится под действием постоянных по величине потенциальной (мертвой) и следящей сил. Направление последней при любых перемещениях совпадает с направлением касательной к изогнутой оси стержня в точке приложения этой силы. Применяя динамический метод исследования устойчивости для рассматриваемой системы, запишем уравнение малых колебаний в следующем виде

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + b_l EI \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + 2mb_e \frac{\partial w}{\partial t} + (Q + P) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь EI – жесткость стержня на изгиб, l – его длина, m – погонная масса стержня, b_l – коэффициент внутреннего трения (модель Фойхта), b_e – коэффициент внешнего тре-



Фиг. 1

ния, P – следящая сила, Q – “мертвая” потенциальная сила, не меняющая своего направления при любых отклонения стержня от положения равновесия.

Уравнение (1.1) дополним граничными условиями, которые для рассматриваемой системы имеют вид

$$w = 0, \quad \partial w / \partial x = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + Q \frac{\partial w}{\partial x} = cw \quad \text{при } x = l \quad (1.2)$$

где c – жесткость упругого закрепления верхнего конца стержня (фиг. 1).

С помощью параметров

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \bar{w} = \frac{w}{l}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \varepsilon_i = b_i \omega_0, \quad \varepsilon_e = \frac{b_e}{\omega_0} \quad (1.3)$$

$$\alpha = \frac{Ql^2}{EI}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{EI}, \quad \gamma = \frac{cl^3}{EI}$$

перепишем уравнение (1.1) в безразмерном виде (черта над w опущена):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.4)$$

Граничные условия (1.2) соответственно преобразуются следующим образом:

$$w = 0, \quad \partial w / \partial \xi = 0 \quad \text{при } \xi = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} = \gamma w \quad \text{при } \xi = 1 \quad (1.5)$$

Представим решение уравнения (1.4) в виде

$$w(\xi, \tau) = W(\xi) \exp(\lambda \tau) \quad (1.6)$$

где $W(\xi)$ – функция координаты ξ (форма потери устойчивости), λ – характеристический показатель. Для определения $W(\xi)$ и λ получаем обобщенную задачу на собственные значения с уравнением

$$\lambda^2 W + \lambda(\varepsilon_i W^{IV} + 2\varepsilon_e W) + W^{IV} + (\alpha + \beta) W'' = 0 \quad (1.7)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} W = 0, \quad W' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \\ W'' = 0, \quad W'' + \alpha W''' = \gamma W \quad \text{при} \quad \xi = 1 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Решение краевой задачи (1.7), (1.8) ищем в виде $W(\xi) = C \exp(r\xi)$. После подстановки этого выражения в уравнение (1.7) для показателей r получим биквадратное уравнение

$$r^4(1 + \lambda\varepsilon_i) + (\alpha + \beta)r^2 + \lambda^2 + 2\lambda\varepsilon_e = 0 \quad (1.9)$$

Его решение имеет вид

$$r_j = \pm \sqrt{\frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\lambda(1 + \lambda\varepsilon_i)(\lambda + 2\varepsilon_e)}}{2(1 + \lambda\varepsilon_i)}} \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (1.10)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.8), из условия нетривиальности решения для констант C_j имеем трансцендентное уравнение, связывающее параметры системы α, β и γ , а также характеристические показатели λ :

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = 0 \quad (1.11)$$

где через $F_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ обозначен определитель

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ r_1^2 e^{r_1} & r_2^2 e^{r_2} & r_3^2 e^{r_3} & r_4^2 e^{r_4} \\ (r_1^3 + \alpha r_1 - \gamma) e^{r_1} & (r_2^3 + \alpha r_2 - \gamma) e^{r_2} & (r_3^3 + \alpha r_3 - \gamma) e^{r_3} & (r_4^3 + \alpha r_4 - \gamma) e^{r_4} \end{vmatrix}$$

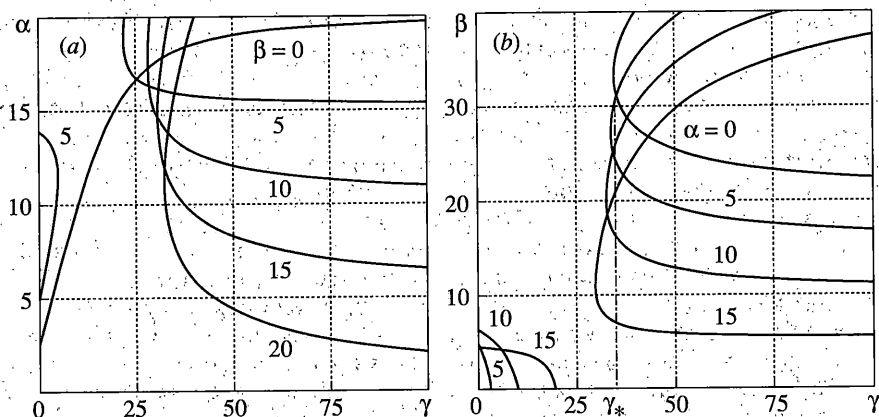
Уравнение (1.11) представляет собой неявную зависимость характеристических показателей от параметров краевой задачи. Критической поверхности соответствует совокупность значений параметров α, β и γ , при которых хотя бы один из характеристических показателей λ пересекает мнимую ось.

2. Дивергентные формы потери устойчивости могут быть определены, если сразу положить в уравнении (1.9) $\lambda = 0$. Тогда вместо (1.9) и (1.10) имеем

$$r^4 + (\alpha + \beta)r^2 = 0, \quad r_{1,2} = 0, \quad r_{3,4} = \pm i\sqrt{\alpha + \beta} \quad (2.1)$$

Формы потери устойчивости $W(\xi)$ при этом будут определяться выражением

$$W(\xi) = C_1 + C_2 \xi + C_3 \cos(\sqrt{\alpha + \beta} \xi) + C_4 \sin(\sqrt{\alpha + \beta} \xi) \quad (2.2)$$



Фиг. 2

Удовлетворение граничным условиям (1.8) и условию нетривиальности решения для констант $C_1 - C_4$ в выражении (2.2) дает уравнение, определяющее границы области дивергенции

$$F_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad (2.3)$$

$$F_2(\alpha, \beta, \gamma) = (\sqrt{\alpha + \beta})^3 - \alpha\sqrt{\alpha + \beta} - (\gamma - \alpha)\sqrt{\alpha + \beta} \cos(\sqrt{\alpha + \beta}) + \gamma \sin(\sqrt{\alpha + \beta})$$

Результаты вычислений по определению границ области дивергенции с использованием соотношения (2.3) приведены на фиг. 2. На фиг. 2, а представлены зависимости критического значения параметра потенциальной силы α от жесткости упругого закрепления γ при различных значениях параметра следящей нагрузки β . Случай $\beta = 0$ соответствует консервативной задаче об устойчивости стержня с применением статического метода. Здесь критическое значение α монотонно возрастает от значения $\pi^2/4$ (консольный стержень со свободным концом) до значения $2.05\pi^2$ при $\gamma \rightarrow \infty$ (стержень, один конец которого жестко заземлен, а другой – шарнирно оперт). Исследование форм потери устойчивости (2.2) для этого случая показало, что при значении $\gamma \approx 17.5$ происходит качественное изменение формы потери устойчивости от форм, описываемых функциями одного знака к формам, описываемых функциями с узловой точкой. При $\beta > 0$ границам областей дивергенции соответствуют части кривых $\alpha(\gamma)$. Для значений β в диапазоне 3.6–6.3 (на фиг. 2,а приведен результат вычислений при $\beta = 5$) область дивергенции в исследуемом диапазоне значений параметров становится двусвязной.

Вычисления зависимости критических значений параметра следящей силы β от жесткости упругой опоры γ при различных значениях α по уравнению (2.3) представлены на фиг. 2,б. Границам областей дивергенции соответствуют нижние ветви кривых, построенных для значений $\alpha = 0, 5, 10, 15$. При $\alpha > 2.65$ область дивергенции становится двусвязной за счет добавления областей в окрестности начала координат. Для различных значений параметра α существует некоторое значение жесткости γ_* , такое, что при $\gamma > \gamma_*$ потеря устойчивости системы возможна только по типу дивергенция. В частности, для случая $\alpha = 0$ такое значение жесткости упругой опоры равно $\gamma_* = 34.4$.

3. Колебательная потеря устойчивости (флаттер) связана с переходом характеристических показателей в правую полуплоскость с отличной от нуля мнимой частью. Для построения границ области флаттера необходимо применение динамического метода исследования устойчивости [1, 2]. При этом возможны различные подходы. Первый из них – это непосредственное исследование обобщенной задачи на собственные значения

(1.7), (1.8) для системы с распределенными параметрами. Решение этой задачи приводит к трансцендентному уравнению (1.11). Функция $F_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$, входящая в это уравнение, является комплекснозначной. Это следует из того, что коэффициенты уравнения (1.9) комплексны и, следовательно, его корни не будут комплексно сопряженными. Определение границы области динамической неустойчивости сводится к отысканию таких значений параметров α, β, γ , при которых хотя бы один из характеристических показателей пересекает мнимую ось, а функция $F_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ обращается в нуль. Эта задача эквивалентна задаче минимизации модуля $F_1(\alpha, \beta, \gamma, \lambda)$ [6].

Отметим, что метод, основанный на решении трансцендентного уравнения типа (1.11), в вычислительном отношении связан со значительными трудностями из-за сложной структуры гиперповерхности, для которой отыскиваются локальные минимумы, выбора начальных приближений и т.д. Эти трудности многократно увеличиваются при увеличении числа варьируемых параметров. В связи с этим более распространенным способом построения критических поверхностей является метод нормальных координат или метод разложения по формам собственных колебаний.

Для применения вышеуказанного метода уберем из граничных условий (1.5) параметр потенциальной силы α и с помощью δ -функции введем его проекцию в дифференциальное уравнение (1.4). Таким образом, приходим к уравнению движения

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \varepsilon_i \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + 2\varepsilon_e \frac{\partial w}{\partial \tau} + (\alpha + \beta) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \delta(\xi - 1) = 0 \quad (3.1)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \partial w / \partial \xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = \gamma w \quad \text{при} \quad \xi = 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Представим решение $w(\xi, \tau)$ уравнения (3.1) в виде ряда

$$w(\xi, \tau) = \mathbf{q}^T(\tau) \boldsymbol{\Phi}(\xi), \quad \mathbf{q}(\tau) = \begin{pmatrix} q_1(\tau) \\ q_2(\tau) \\ \dots \\ q_n(\tau) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}(\xi) = \begin{pmatrix} \Phi(\chi_1 \xi) \\ \Phi(\chi_2 \xi) \\ \dots \\ \Phi(\chi_n \xi) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

где $\mathbf{q}(\tau)$ – вектор обобщенных координат, $\boldsymbol{\Phi}(\xi)$ – вектор форм собственных колебаний консольного стержня с упругой связью, χ_j – параметры, определяемые из частотного уравнения

$$1 + \text{ch} \chi \cos \chi - \frac{\gamma}{\chi^3} (\text{sh} \chi \cos \chi - \text{ch} \chi \sin \chi) = 0 \quad (3.4)$$

Применяя к уравнению (3.1) процедуру метода Бубнова–Галеркина, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат. Матричную форму этой системы можно записать в виде

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + (2\varepsilon_e \mathbf{A} + \varepsilon_i \mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C} + (\alpha + \beta) \mathbf{D} - \alpha \mathbf{B}] \mathbf{q} = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{B} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}'(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) \delta(\xi - 1) d\xi \\ \mathbf{C} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}^{IV}(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) d\xi, \quad \mathbf{D} = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}''(\xi) \boldsymbol{\Phi}^T(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вместо трансцендентного уравнения (1.11) относительно характеристических показателей λ в данном случае имеем алгебраическое уравнение типа

$$A\lambda^2 + (2\varepsilon_e A + \varepsilon_i C)\lambda + C + (\alpha + \beta)D - \alpha B = 0 \quad (3.7)$$

Для исследования устойчивости линейной системы, движение которой описывается уравнением (3.5), могут быть применены различные критерии [7], например, критерий Рауса–Гурвица. Соответствующая матрица для рассматриваемой системы составляется из коэффициентов характеристического полинома матрицы G , которая согласно (3.7) имеет вид

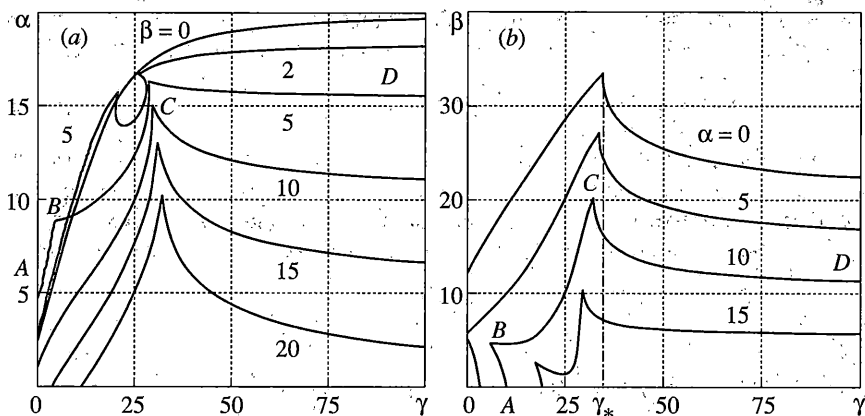
$$G = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}[C + (\alpha + \beta)D - \alpha B] & -A^{-1}(2\varepsilon_e A + \varepsilon_i C) \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Равенство нулю определителя матрицы Гурвица определяет границу области дивергенции. Граница области флаттера в неконсервативных системах, как правило, может быть определена из условия равенства нулю главного минора порядка $n - 1$.

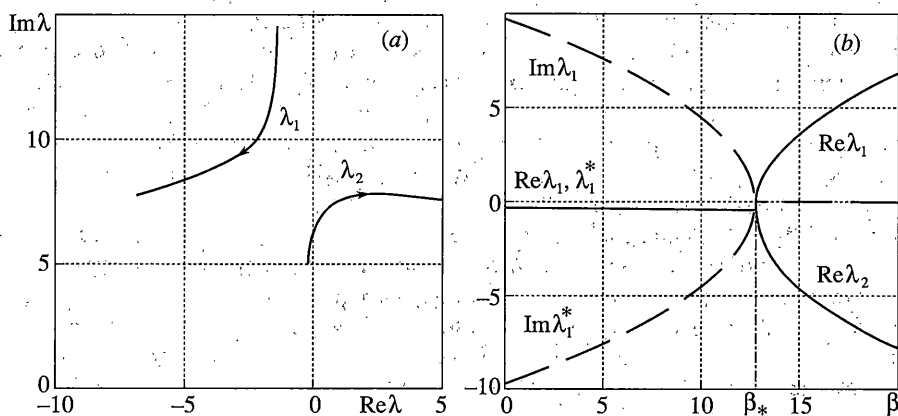
Точность построения границ области устойчивости методом нормальных координат зависит от числа удерживаемых членов в разложении (3.3). Как показали вычисления, уже при $n = 4$ эта точность составляет величину порядка 0.4%. Например, при отсутствии рассеяния энергии и при $\alpha = 0$, $\gamma = 0$ критическое значение параметра следящей нагрузки, полученной “континуальным” методом $\beta_* = 20.0549$, в то время как по методу нормальных координат имеем $\beta_* = 20.0625$.

Критерий Рауса–Гурвица дает возможность определения условий пересечения характеристическими показателями мнимой оси при изменении параметров системы, не решая алгебраическое уравнение (3.7). Несколько большего машинного времени требуется для построения границ областей устойчивости с непосредственным вычислением характеристических показателей. При построении сечений критической поверхности плоскостями $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, представленных на фиг. 3, использовались все три упомянутых выше метода.

На фиг. 3,а представлены сечения критической поверхности плоскостями $\beta = \text{const}$. Здесь и далее принято $\varepsilon_e = 0.05$ и $\varepsilon_i = 0.005$. Для случаев $0 \leq \beta < 2$ имеем границу области дивергенции при любых значениях жесткости упругой опоры. При значениях параметра следящей силы в диапазоне $2 < \beta < 5.1$ граница области дивергенции делится на две части, между которыми появляется кривая, соответствующая флаттеру. Например, для $\beta = 5$ на фиг. 3,а кривые AB и CD суть границы области дивергенции, а пересечение кривой BC приводит к потере устойчивости по типу флаттера. При $\beta > 5.1$ граница неустойчивости состоит из двух кривых: границы флаттера и сменяющей ее границы дивергенции. Аналогичный “тройственный” характер могут иметь и сечения критической поверхности плоскостями $\alpha = \text{const}$, представленные на фиг. 3,б. Такая же очередность дивергенция – флаттер – дивергенция имеет место для значений $\alpha > 5$. Поведение характеристических показателей в окрестности различных частей границы области неустойчивости при варьировании параметра следящей силы β для случая $\alpha = 10$ проиллюстрировано на фиг. 4. На фиг. 4,а показано перемещение первых двух характеристических показателей λ_1 и λ_2 на комплексной плоскости λ . Значение жесткости упругой опоры здесь принято равным $\gamma = 15$. Наступление флаттера соответствует выходу λ в правую полуплоскость. При том же значении параметра потенциальной силы α , но для более высокого значения жесткости $\gamma = 50$ на фиг. 4,б показана зависимость действительных и мнимых частей характеристических показателей от параметра β . Потеря устойчивости по типу дивергенция при некотором значении β_* соответствует обращению в нуль мни-



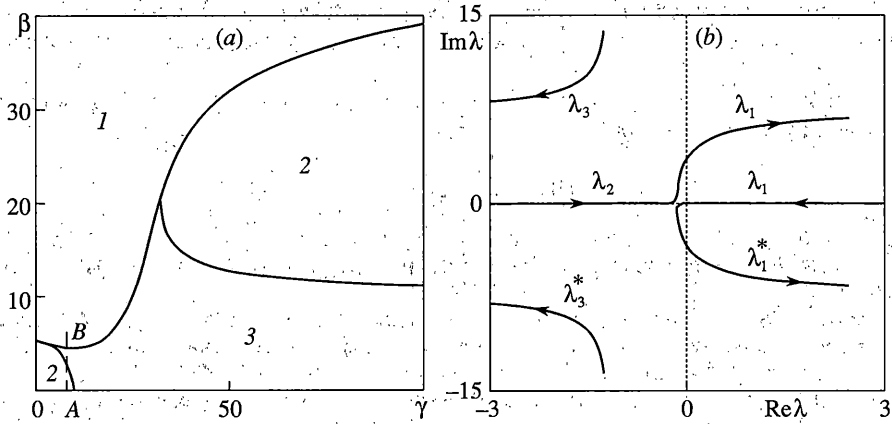
Фиг. 3



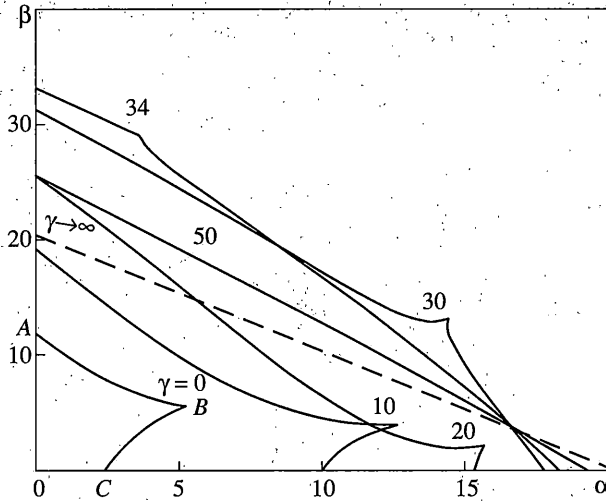
Фиг. 4

мых частей комплексно сопряженных характеристических показателей и выходу одного из них λ_1 в правую полуплоскость через точку $\lambda = 0$.

Сочетание различных методов исследования устойчивости дает возможность выделить в пространстве параметров системы области устойчивости и неустойчивости, соответствующие различным типам. На фиг. 5,а при $\alpha = 10$ представлено разбиение плоскости γ, β на такие области (1 – флаттер, 2 – дивергенция, 3 – область устойчивости). Кроме отмеченной выше особенности неконсервативных систем (возможность наличия различных типов потери устойчивости) здесь проявляется еще одна особенность – невыпуклость области устойчивости. Для окончательного контроля целесообразно исследование поведения характеристических показателей в окрестности границ. Фиг. 5,б иллюстрирует поведение характеристических показателей на комплексной плоскости при $\alpha = 10, \gamma = 8$ и изменении параметра следящей нагрузки в пределах $0 < \beta < 7.5$ (прямая АВ на фиг. 5,а). Здесь из области дивергенции, когда два характеристических показателя являются действительными и один из них положительный, при возрастании β пересекается граница области дивергенции. Это соответствует тому, что положительный корень через начало координат переходит в левую полуплоскость. Далее два действительных показателя сливаются и становятся комплексно сопряженными. При дальнейшем уве-



Фиг. 5



Фиг. 6

личении β мнимая часть λ_1 растет и при значении β , соответствующем наступлению флаттера, вновь переходит в правую полуплоскость, но уже с отличной от нуля мнимой частью.

На фиг. 6 на плоскости параметров α, β построены сечения критической поверхности плоскостями $\gamma = \text{const}$. При $\gamma = 0$ имеем границу области устойчивости для консольного стержня со свободным концом, нагруженного потенциальной и следящей силами. Здесь AB – граница флаттера, BC – граница дивергенции. С ростом жесткости упругого закрепления область устойчивости расширяется при значительном увеличении границы флаттера по сравнению с границей дивергенции. Такая ситуация имеет место до значений γ , приближающихся к γ_* . При значениях γ , несколько меньших γ_* , граница устойчивости спрямляется при одновременном резком уменьшении границы флаттера. При $\gamma \geq \gamma_*$ в системе возможны только дивергентные формы потери устойчивости, а при $\gamma \rightarrow \infty$ область устойчивости ограничивается прямой $\alpha + \beta = 2.05\pi^2$. Таким образом, при малых значениях жесткости упругого закрепления в системе существенно возраста-

ет возможность наступления колебательных форм потери устойчивости. Существует некоторое значение параметра γ_* , при котором область устойчивости системы является наибольшей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00656).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ing. Arch. 1952. Bd. 20. № 1. S. 49–56.
4. Болотин В.В., Жинжер Н.И. Устойчивость линейных систем // Машиностроение. Энциклопедия в 40 тт. Т. 1–3. М.: Машиностроение, 1994. Кн. 1. С. 462–472.
5. Борул И.Г., Лобас Л.Г., Патрицио Л.Д. О состояниях равновесия перевернутого двойного маятника со следящей силой на упругоделанном верхнем конце // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 5. С. 16–22.
6. Гришко А.А., Петровский А.В., Радин В.П. О влиянии внутреннего трения на устойчивость панели в сверхзвуковом потоке газа // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 1. С. 173–181.
7. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.07.2005