

УДК 624.07:534.1

© 2006 г. В.А. СВЕТЛИЦКИЙ

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ
ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Рассмотрены нестационарные колебания стержневых элементов (в общем случае пространственно-криволинейных) приборов и машин, возникающих при импульсном нагружении. Изложен алгоритм определения скоростей (линейных и угловых), вызванных импульсными нагрузками и алгоритм приближенного численного решения системы линейных уравнений колебаний стержня, возникающих после окончания действия импульсной нагрузки.

1. Внезапно приложенная к упругим элементам кратковременная динамическая нагрузка может быть причиной отказов приборов и машин, где эти элементы используются, из-за недопустимо больших отклонений осевой линии и больших эквивалентных напряжений, превышающих предел текучести материала стержня. Поэтому эти задачи имеют не только теоретический интерес, но и имеют большое значение в практике проектирования упругих элементов, когда необходимо оценить работоспособность упругих элементов после действия импульсных нагрузок.

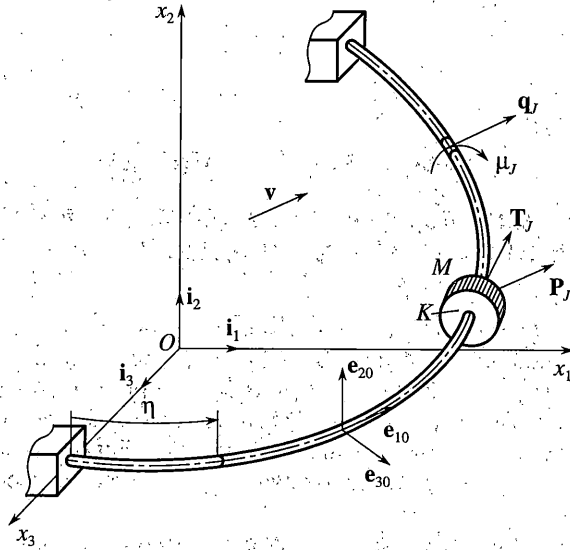
На фигуре показан пространственно-криволинейный стержневой элемент прибора, имеющий сосредоточенную массу, находящийся на движущемся со скоростью v объекте, который внезапно тормозится (ударяется о преграду). В результате упругий элемент нагружается мгновенной импульсной распределенной нагрузкой q , и сосредоточенной импульсной силой P , действующей на сосредоточенную массу M . В общем случае объект, на котором находится упругий элемент в момент торможения, может иметь не только линейную скорость v , но и угловую Ω . Если при торможении они становятся равными нулю, то кроме q и P возникнут распределенные импульсные моменты μ , и сосредоточенный импульсный момент T , (фигура 1). В дальнейшем ограничимся случаем когда $\Omega = 0$.

Систему уравнений малых вынужденных колебаний пространственно-криволинейного стержня, без учета инерции вращения элемента стержня, имеющего сосредоточенную массу (фиг. 1), можно записать в виде векторного уравнения в связанных осях (в безразмерной записи) [1]:

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} + A^{(3)} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} - \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \mathbf{Z} = \mathbf{b} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{Q}, \mathbf{M}, \theta, \mathbf{u})^T$$

$$A^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & n_1 E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_0 E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$



$$A^{(2)} = \begin{vmatrix} A_{\kappa} & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_{\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1} & A_{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & A_1 & A_{\kappa} \end{vmatrix}, \quad A_{\kappa} = \begin{vmatrix} 0 & \kappa_{30} & -\kappa_{20} \\ -\kappa_{30} & 0 & \kappa_{10} \\ \kappa_{20} & -\kappa_{10} & 0 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{vmatrix}, \quad n_1 = \frac{m(s)}{m(0)}$$

где \mathbf{Q} , \mathbf{M} – соответственно вектор внутренних сил и вектор внутренних моментов, $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{u} – вектор углов поворота связанных осей и вектор перемещений точек осевой линии стержня; n_1 – безразмерная распределенная масса стержня; α_0 – безразмерный коэффициент сил вязкого сопротивления; κ_{j0} – компоненты вектора "кривизн"; A_{ii} – безразмерные жесткости стержня на кручение (A_{11}) и изгиб (A_{22} , A_{33}). Вектор \mathbf{b} для стержня, показанного на фигуре, равен

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \delta_k + \mathbf{b}_3 \delta_k, \quad \delta_k = \delta(\eta - \eta_k)$$

$$\mathbf{b}_1 = (\mathbf{q}, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (\mathbf{P}, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_3 = \left(-n_2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \tau^2}, -I \frac{\partial^2 \boldsymbol{\theta}}{\partial \tau^2}, 0, 0 \right)^T \quad (1.2)$$

$$n_2 = \frac{M}{m_0 l}, \quad I = \begin{vmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{vmatrix}$$

где I_{ii} – безразмерные моменты инерции массы M относительно главных осей. Вектор \mathbf{b}_3 можно представить в виде

$$\mathbf{b}_3 = -B \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & n_2 E \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

При внезапном торможении объекта, на котором находится стержень, в течение малого интервала времени $\Delta\tau$, скорость объекта изменяется от $|v|$ до нуля. Поэтому, в соответствии с теоремой об изменении количества движения системы, возникают распределенные \mathbf{q}_J и сосредоточенные \mathbf{P}_J (фиг. 1) импульсные силы

$$\mathbf{q}_J = m_0 \mathbf{v}, \quad \mathbf{P}_J = M \mathbf{v} \quad (1.4)$$

Проинтегрируем уравнение (1.1) с учетом выражений (1.2) и (1.3) от нуля до $\Delta\tau$. Так как $\mathbf{Z}(\eta, 0) = 0$ при $\tau = 0$, а время $\Delta\tau$ мало, то после интегрирования из уравнения (1.1) получаем

$$(A^{(1)} + B\delta_k) \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} \right)_{(0)} = \mathbf{b}_{1J} + \mathbf{b}_{2J} \delta_k \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} \right)_0 = \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} \right)_{\tau = \Delta\tau}, \quad \mathbf{b}_{1J} = (\mathbf{q}_J, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_{2J} = (\mathbf{P}_J, 0, 0, 0)^T, \quad q_{Ji} = n_1 (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_{i0})$$

$$P_{Ji} = n_2 (\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_{i0}), \quad \mathbf{v}^{(0)} = v / (lp_0), \quad p_0 = \sqrt{\frac{A_{33}}{m_0 l^4}}$$

где $\mathbf{v}^{(0)}$ – безразмерная скорость; l – длина стержня.

Вектор $(\partial \mathbf{Z} / \partial \tau)_0$ представляет собой "скорость" компонент вектора состояния системы \mathbf{Z} после действия импульсной нагрузки, которые являются начальными условиями наряду с $\mathbf{Z}(\eta, 0) = 0$ свободных колебаний стержня. Из уравнения (1.5) следует, что "скорости", которые получают компоненты вектора \mathbf{Z} после окончания действия импульсной нагрузки, от сил вязкого сопротивления не зависят.

2. Для исследования колебаний стержня после действия импульсных сил необходимо определить "скорости" компонент вектора \mathbf{Z} . Поэтому рассмотрим уравнения свободных колебаний стержня (уравнение (1.1) при $A^{(3)} \partial \mathbf{Z} / \partial \tau = \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = 0$):

$$A^{(1)} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \mathbf{Z} = -B \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} \delta_k \quad (2.1)$$

Полагая

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0(\eta) e^{i\beta\tau} \quad (2.2)$$

из уравнения (2.1) получаем

$$d\mathbf{Z}_0/d\eta + (\beta^2 A^{(1)} - A^{(2)}) \mathbf{Z}_0 = -\beta^2 B \mathbf{Z}_0 \delta_k \quad (2.3)$$

Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\mathbf{Z}_0 = K(\eta, \beta) \mathbf{C} + \int_0^\eta G(\eta, \eta^{(1)}, \beta) (-\beta^2 B \delta_k) \mathbf{Z}_0(\eta^{(1)}) d\eta^{(1)} \quad (2.4)$$

или

$$\mathbf{Z}_0 = K(\eta, \beta)\mathbf{C} - \beta^2 G^{(1)}\mathbf{Z}_0(\eta_k)H(\eta - \eta_k)$$

$$G^{(1)} = G(\eta, \eta_k, \beta)B = K(\eta, \beta)K^{-1}(\eta_k, \beta)B \quad (2.5)$$

$$G^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{1.4}I_{11} & g_{1.5}I_{22} & g_{1.6}I_{33} & g_{1.1}n_2 & g_{1.2}n_2 & g_{1.3}n_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & g_{2.4}I_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{2.3}n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{12.4}I_{11} & g_{12.5}I_{22} & g_{12.6}I_{33} & g_{12.1}n_2 & g_{12.2}n_2 & g_{12.3}n_2 \end{bmatrix}$$

где $H(\eta - \eta_k)$ – функция Хевисайда. Полученное выражение (2.5) для вектора \mathbf{Z}_0 содержит 18 неизвестных: 12 компонент вектора \mathbf{C} и шесть компонент вектора $\mathbf{Z}_0(\eta_k)$ ($\theta_{0j}(\eta_k)$, $u_{0j}(\eta_k)$, $j = 1, 2, 3$). Для пространственно-криволинейного стержня имеется двенадцать краевых условий (по шесть условий при $\eta = 0$ и при $\eta = 1$). Компоненты вектора $\mathbf{Z}_0(\eta, \beta)$ (2.5) θ_{0j} и u_{0j} при $\eta = \eta_k$ должны быть равны соответствующим компонентам вектора $\mathbf{Z}_0(\eta_k, \beta)$, что дает еще шесть условий. Например, при жестком закреплении стержня при $\eta = 0$ должно выполняться шесть условий: $\theta_{0j}(0) = 0$, $u_{0j}(0)$ ($j = 1, 2, 3$). Поэтому шесть компонент вектора \mathbf{C} (c_7, c_8, \dots, c_{12}) равны нулю. При $\eta = 1$ из (2.5) получаем шесть однородных уравнений. Например, при свободном конце при $\eta = 1$ должны выполняться условия

$$Q_{0v}(1) = 0, \quad M_{0v}(1) = 0 \quad (v = 1, 2, 3)$$

и из (2.5) получаем

$$\sum_{j=1}^6 k_{vj}(1, \beta)c_j - \beta^2 \sum_{i=1}^3 (g_{v,3+i}(1, \eta_k)J_{ii}\theta_{0i} + g_{v,i}(1, \eta_k)n_2 u_{0i}) = 0 \quad (2.6)$$

$(v = 1, 2, \dots, 6)$

При $\eta = \eta_k$ из (2.5) (полагая $H(0) = 0$) получаем шесть соотношений, содержащих c_v , $\theta_{0i}(\eta_k)$ и $u_{0i}(\eta_k)$ ($v = 1 \dots 6, i = 1 \dots 3$):

$$z_{0(6+i)} = \theta_{0i} = \sum_{v=1}^6 k_{(6+i)v}(\eta_k, \beta)c_v \quad (2.7)$$

$$z_{0(9+i)} = u_{0i} = \sum_{v=1}^6 k_{(9+i)v}(\eta_k, \beta)c_v \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

Исключая из (2.6) $\theta_{0i}(\eta_k)$, $u_{0i}(\eta_k)$ получаем систему шести однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^6 e_{ij}c_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (2.9)$$

Собственные значения β_j находятся из условия

$$d = |e_{ij}| = 0 \quad (2.10)$$

где d – определитель системы уравнений (2.9). Определив β_j из (2.10) для каждого β_j находим, например, $c_1^{(j)}, \dots, c_5^{(j)}$ в зависимости от $c_6^{(j)}$, которое полагаем равным единице, и

из (2.7) и (2.8) $\vartheta_{0i}^{(j)}(\eta_j, \beta_j)$ и $u_{0i}^{(j)}(\eta_j, \beta_j)$. В результате получаем собственные вектора $\mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta)$, учитывающие сосредоточенную массу

$$\mathbf{Z}_0^{(j)} = K(\eta, \beta_j) \mathbf{C}^{(j)} - \beta_j^2 G^{(1)}(\eta, \eta_k) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta_k) H(\eta - \eta_k) \quad (2.11)$$

Частные решения уравнения (2.1) имеют вид

$$\mathbf{Z}^{(j)(1)}(\eta, \tau) = \cos(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{Z}^{(j)(2)}(\eta, \tau) = \sin(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta)$$

Общее решение уравнения (2.1) будет

$$\mathbf{Z}(\eta, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} [B_j \sin(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) + D_j \cos(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta)] \quad (2.13)$$

При $\tau = 0$ (начало отсчета времени берется после окончания действия импульса) $\mathbf{Z}(\eta, 0) = 0$, поэтому $D_j = 0$. Окончательно получаем

$$\mathbf{Z}(\eta, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) \quad (2.14)$$

Вектор $(\partial \mathbf{Z} / \partial \tau)_0$ равен

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} \right)_0 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \beta_j \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) \quad (2.15)$$

3. Для определения произвольных постоянных B_j воспользуемся уравнением (1.5):

$$(A^{(1)} + B \delta_k) \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} \right)_0 - \mathbf{b}_{1J} - \mathbf{b}_{2J} \delta_k = 0 \quad (3.1)$$

Из уравнения (3.1) после преобразований получаем

$$D \left(\frac{\partial \mathbf{Z}^{(1)}}{\partial \tau} \right)_0 - \mathbf{b}_{1J}^{(1)} - \mathbf{b}_{2J}^{(1)} \delta_k = 0$$

$$\mathbf{Z}^{(1)} = (\mathbf{Z}_\vartheta, \mathbf{Z}_u)^T = (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u})^T$$

$$D = \left\| \begin{array}{cc} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{array} \right\|, \quad D_{11} = D_{22} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad (3.2)$$

$$D_{12} = \left\| \begin{array}{ccc} n_1 + n_2 \delta_k & 0 & 0 \\ 0 & n_1 + n_2 \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & n_1 + n_2 \delta_k \end{array} \right\|, \quad D_{22} = \left\| \begin{array}{ccc} I_1 \delta_k & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \delta_k \end{array} \right\|$$

$$\mathbf{b}_{1J}^{(1)} = (q_{J1}, q_{J2}, q_{J3}, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_{2J}^{(1)} = (P_{J1}, P_{J2}, P_{J3}, 0, 0, 0)^T$$

Из (2.14) следует выражение для вектора $\mathbf{Z}^{(1)}(\eta, \tau)$:

$$\mathbf{Z}^{(1)}(\eta; \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(1)(j)}(\eta) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{Z}_0^{(1)(j)} = (\mathbf{b}_0^{(j)}, \mathbf{u}_0^{(j)})^T$$

В результате получаем

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}^{(1)}}{\partial \tau} \right)_0 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \beta_j \mathbf{Z}_0^{(1)(j)}(\eta) \quad (3.4)$$

И уравнение (3.2) принимает вид

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \beta_j D \mathbf{Z}_0^{(1)(j)} - \mathbf{b}_{1J}^{(1)} - \mathbf{b}_{2J}^{(1)} \delta_k = 0 \quad (3.5)$$

Уравнение (3.2) (и (3.5)) можно рассматривать как уравнение равновесия стержня, нагруженного импульсными силами (аналогичные задачи для систем с конечным числом степеней свободы рассмотрены в [2–4]). Поэтому для определения B_j воспользуемся принципом возможных перемещений, сформулированного для импульсных сил, приложенных к системе с распределенными параметрами.

Если система находится в равновесии под действием импульсных сил, то сумма работ внешних и внутренних импульсных сил на возможных перемещениях, учитывающих наложенные на систему связи, равна нулю (принцип возможных перемещений при решении системы линейных уравнений колебаний стержня приведен в [1]).

В качестве обобщенных перемещений можно взять вектор $\delta \mathbf{Y}_0$, равный [1]:

$$\delta \mathbf{Y}_0(\eta) = \sum_{v=1}^{\infty} \delta A_v E_0 \mathbf{Z}_0^{(1)(v)}(\eta) \quad (3.6)$$

$$\mathbf{Z}_0^{(1)(v)} = (\mathbf{b}_0^{(v)}, \mathbf{u}_0^{(v)})^T, \quad E_0 = \begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix}$$

где δA_v – произвольные множители.

Компоненты вектора $\delta \mathbf{Y}_0$ линейно зависят от компонент вектора $\mathbf{Z}_0^{(1)(v)}$, которые удовлетворяют всем краевым условиям задачи. Матрица E_0 вводится для того, чтобы скалярные произведения, получающиеся при умножении векторного уравнения (3.5) на вектор $\delta \mathbf{Y}_0$ имели размерность работы (имея в виду исходные размерные уравнения).

При приближенном решении берется конечное число слагаемых в (2.14) и (3.4), поэтому

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^n B_j \beta_j D \mathbf{Z}_0^{(1)(j)} - \mathbf{b}_{1J}^{(1)} - \mathbf{b}_{2J}^{(1)} \delta_k = \gamma \quad (\gamma \neq 0) \quad (3.7)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений получаем систему уравнений

$$\int_0^1 (\gamma E_0 \mathbf{Z}_0^{(1)(v)}) d\eta = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n) \quad (3.8)$$

В более подробной записи

$$\sum_{j=1}^n B_j \beta_j \int_0^1 [D_{12} \mathbf{u}_0^{(j)} \mathbf{u}_0^{(v)} + D_{21} \boldsymbol{\theta}_0^{(j)} \boldsymbol{\theta}_0^{(v)}] d\eta - \int_0^1 (\mathbf{q}_j \mathbf{u}_0^{(v)}) d\eta - \int_0^1 (\mathbf{P}_j \mathbf{u}_0^{(v)}) \delta_k d\eta = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^n B_j \beta_j \left[\sum_{m=1}^3 n_1 \int_0^1 u_{0m}^{(j)} u_{0m}^{(v)} d\eta + \sum_{m=1}^3 n_2 u_{0m}^{(j)}(\eta_k) u_{0m}^{(v)}(\eta_k) - \sum_{m=1}^3 I_{mm} \boldsymbol{\theta}_{0m}^{(j)}(\eta_k) \boldsymbol{\theta}_{0m}^{(v)}(\eta_k) \right] = \int_0^1 \left(\sum_{m=1}^3 q_{Jm} u_{0m}^{(v)}(\eta_k) \right) d\eta - \sum_{m=1}^3 P_{Jm} u_{0m}^{(v)}(\eta_k) = 0 \quad (3.9)$$

После интегрирования и преобразований получаем систему неоднородных уравнений для определения B_j :

$$\sum_{j=1}^n a_{vj} B_j = d_v \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

$$a_{vj} = \sum_{m=1}^3 \left[n_1 \int_0^1 u_{0m}^{(j)} u_{0m}^{(v)} d\eta + n_2 u_{0m}^{(j)}(\eta_k) u_{0m}^{(v)}(\eta_k) - I_{mm} \boldsymbol{\theta}_{0m}^{(j)}(\eta_k) \boldsymbol{\theta}_{0m}^{(v)}(\eta_k) \right] \quad (3.10)$$

$$d_v = \sum_{m=1}^3 \left[\int_0^1 q_{Jm} u_{0m}^{(v)}(\eta_k) d\eta + P_{Jm} u_{0m}^{(v)}(\eta_k) \right]$$

Определив B_j , получаем решение уравнения (1.1) малых колебаний стержня, вызванных импульсными силами, возникающими при внезапном торможении

$$\mathbf{Z}(\eta, \tau) = \sum_{j=1}^n B_j \sin(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^n B_j \beta_j \cos(\beta_j \tau) \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) \quad (3.12)$$

После окончания действия импульса компоненты вектора \mathbf{Z} получают скорости

$$\left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} \right)_0 = \sum_{j=1}^n B_j \beta_j \mathbf{Z}_0^{(j)}(\eta) \quad (3.13)$$

Например, векторы угловой и линейной скоростей стержня равны

$$\boldsymbol{\theta}(\eta, 0) = \sum_{j=1}^n B_j \beta_j \boldsymbol{\theta}_0^{(j)}(\eta) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{u}(\eta, 0) = \sum_{j=1}^n B_j \beta_j \mathbf{u}_0^{(j)}(\eta) \quad (3.15)$$

При внезапном торможении объекта с линейной скоростью v (при нулевой угловой скорости ($\Omega = 0$)) в стержне возникают линейные (3.15) и угловые (3.14) скорости, которые являются непрерывными функциями координаты η , несмотря на то, что стержень имеет сосредоточенную массу, на которую действует сосредоточенная сила P_j .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N05-01-00103).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлицкий В.А. Механика стержней (часть вторая – динамика). М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
2. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.
3. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937. 500 с.
4. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1980. 640 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.10.2005