

УДК 534.1

© 2006 г. Л.Д. АКУЛЕНКО, С.В. НЕСТЕРОВ

КОЛЕБАНИЯ СТРУН И СТЕРЖНЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассмотрены колебания распределенных систем в неоднородной упругой среде. Исследована зависимость от параметров системы собственных частот соответствующей краевой задачи с сильно изменяющимися коэффициентами для произвольных граничных условий упругого крепления. Доказано, что наличие винклеровского слагаемого в уравнении может приводить к аномальному явлению: увеличению собственных частот низших мод при увеличении длины интервала. Установлены также неизвестные в научной литературе тонкие особенности изменения собственных частот в зависимости от длины интервала и номера моды. Проведено численно-аналитическое исследование примеров, иллюстрирующих характерное поведение решения задачи о свободных колебаниях струн и стержней в упругой среде.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движения распределенных одномерных систем (струн, стержней) в неоднородной упругой среде. Инерционные и жесткостные характеристики могут быть также переменными и значительно (в несколько раз или на порядок) изменяться в зависимости от линейной координаты. Динамические свойства таких систем, находящихся под действием распределенных и сосредоточенных на концах силовых и кинематических нагрузок, существенно зависят от величин низших собственных частот. Высокоточное определение этих величин в зависимости от геометрических, инерционных и жесткостных параметров представляется важным в теоретическом и прикладном аспектах и требует разработки аналитических и численных методов [1–6].

С помощью стандартной процедуры разделения переменных приходим к задаче нахождения собственных частот и форм колебаний. Она описывается самосопряженной краевой задачей на собственные значения и функции стандартного вида [1–4]. Соответствующая задача Штурма–Лиувилля приводится к безразмерной форме для дифференциального уравнения

$$(p(x)u')' + [\lambda r(x) - q(x)]u = 0, \quad \lambda = \omega^2, \quad 0 < x < l \quad (1.1)$$

при стандартных условиях знакоопределенности и гладкости коэффициентов p , r , q [2–4]. Они имеют определенный физический смысл для распределенных упругих систем, в частности, струн и стержней. На левом $x = 0$ и правом $x = l$ концах интервала задаются краевые условия упругого закрепления системы – условия третьего рода

$$\begin{aligned} \alpha_0 p(0)u'(0) - \beta_0 u(0) &= 0, \quad \alpha_l p(l)u'(l) + \beta_l u(l) = 0 \\ \alpha_{0,b}, \beta_{0,l} &\geq 0, \quad \alpha_{0,l} + \beta_{0,l} > 0 \quad (=1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Коэффициенты $\alpha_{0,b}$, $\beta_{0,l}$ характеризуют относительное влияние распределенной и сосредоточенной упругости. В частности, при $\alpha_0 = \alpha_l = 0$ имеют место граничные условия первого рода: $u(0) = u(l) = 0$; при $\beta_0 = \beta_l = 0$ – второго рода: $u'(0) = u'(l) = 0$. На одном или обоих концах интервала могут выполняться условия указанных родов; длина интервала считается ограниченной $l < \infty$.

Самосопряженная задача на собственные значения и функции вида (1.1), (1.2) и ее обобщения подвергались всестороннему исследованию. Результаты послужили основой новых разделов математики: математической физики, функционального анализа, спектральной теории, теории операторов и ряда других. Был разработан ряд аналитических и численных методов оценивания и приближенного решения задачи. Установлены фундаментальные свойства упругих систем: существование счетного дискретного множества собственных значений λ_n и функций $u_n(x) = u(x, \lambda_n)$ ($n = (0), 1, 2, \dots$), осцилляционные свойства (теоремы типа Штурма), асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ и т.д.

Однако влияние длины интервала, на котором происходит изменение аргумента x , т.е. величины параметра $l > 0$, в известных публикациях не изучено. В теоретических и прикладных постановках задач обычно полагают $l = l_0 = \text{const}$ и посредством нормировки приводят к фиксированному значению $l_0 = 1$. Анализ решения на основе теорем сравнения Штурма [2–4] и численно-аналитического метода ускоренной сходимости [1, 5] свидетельствуют о существенном влиянии параметра l . Этим фундаментальным свойством целесообразно воспользоваться в приближенных процедурах вычисления собственных значений $\lambda_n(l)$ и ортонормированных с весом $r(x)$ функций $u_n^*(x, l) = u_n \|u_n\|_r^{-1}$, где квадрат нормы $\|u_n\|_r^2 = (u_n, u_n)_r$ – взвешенное скалярное произведение, определяемое квадратурой от $u_n^2 r$ на интервале $0 \leq x \leq l$.

В первую очередь теоретический и прикладной интерес представляет локальное исследование зависимости $\lambda_n(l)$ в окрестности фиксированного значения $l = l_0 (= 1)$, т.е. в предположении $l = l_0 + \delta l$, где $|\delta l| \ll l_0$. После нормировки аргумента x на l_0 можно рассматривать интервал $0 \leq x \leq 1 + a$, где $a = \delta l/l_0$, $|a| \ll 1$. Затем с помощью численно-аналитической процедуры продолжения по параметру a и метода ускоренной сходимости могут быть изучены зависимости $\lambda_n(l)$ для вариаций $\delta l \sim l_0$, т.е. $a \sim 1$. Для определенности величина l_0 выбирается как минимальное значение l и исследование проводится при $a > 0$. В общей ситуации такое допущение можно не делать. Выпишем выражения для первой и второй производных $\lambda_n'(l_0)$, $\lambda_n''(l_0)$ по l для $l = l_0$, что соответствует в нормированном варианте: $\lambda_n'(1) = \lambda_n'$, $\lambda_n''(1) = \lambda_n''$ по a при $a = 0$. Аналогично определяют соотношения для последующих производных.

2. Определение локальной зависимости собственных значений и частот от длины интервала. Искомые локальные характеристики строятся с помощью известного решения краевой задачи на собственные значения и функции (1.1), (1.2) при $l = l_0$ ($l = 1$, т.е. $a = 0$ в случае нормированного на l_0 аргумента x). Естественно определить приближенные собственные значения λ_n и частоты ω_n в виде

$$\begin{aligned} \lambda_n(l) &= \lambda_n(l_0) + \lambda_n'(l_0)\delta l + 1/2\lambda_n''(l_0)\delta l^2 + O(\delta l^3), & \lambda_n' &= \omega_n^2 \\ \omega_n(l) &= \omega_n(l_0) + \omega_n'(l_0)\delta l + 1/2\omega_n''(l_0)\delta l^2 + O(\delta l^3), & \omega_n &= \sqrt{\lambda_n} \end{aligned} \quad (2.1)$$

при δl достаточно малом. Аналогичные (2.1) представления могут быть выписаны для собственных функций u_n :

$$\begin{aligned} u_n(x, l) &= u_n(x, l_0) + v_n(x)\delta l + 1/2w_n(x)\delta l^2 + O(\delta l^3) \\ v_n &= \frac{\partial u_n(x, l_0)}{\partial l}, & w_n &= \frac{\partial^2 u_n(x, l_0)}{\partial l^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Итак, считается известным решение задачи Штурма–Лиувилля (1.1), (1.2) при частном значении $l = l_0$. Производные λ_n' , λ_n'' и функции чувствительности v_n , w_n находятся посредством процедуры дифференцирования по l ; величины ω_n , ω_n' , ω_n'' выражаются через λ_n , λ_n' , λ_n'' согласно (2.1). В частности, для определения $\lambda_n'(l_0)$, $v_n(x)$ используются соотношения

$$\begin{aligned} (pv')' + (\lambda r - q)v &= -\lambda'ru, \quad \alpha_0 pv' - \beta_0 v = 0, \quad x = 0 \\ \alpha_l((\lambda r - q)u + pv') + \beta_l(u' + v) &= 0, \quad x = l_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Аргументы и индексы в (2.2) не выписываются (частично) для сокращения записи. Умножим уравнение для u (1.1) на v , а уравнение для v (2.3) на u и вычтем из первого выражения второе. Интегрируя разность по x на интервале $0 \leq x \leq l_0$ с учетом граничных условий (1.2), (2.3) получим искомое выражение для λ_n' ($n = (0), 1, 2, \dots$):

$$\lambda_n'(l_0) = -[pu_n'^2 + (\lambda_n(l_0)r - q)u_n^2] \|u_n\|_r^{-2}, \quad x = l_0 \quad (2.4)$$

Эти представления не зависят от вида функций $v_n(x)$. Из (2.4) можно определить частные выражения в случае краевых условий первого ($\alpha_l = 0$) и второго ($\beta_l = 0$) рода на правом конце $x = l_0$. Согласно (1.2) получим

$$\lambda_n'(l_0) = -p(l_0)u_n'^2(l_0, l_0) \|u_n\|_r^{-2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad u(l_0, l_0) = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda_n'(l_0) &= -[\lambda_n(l_0)r(l_0) - q(l_0)]u_n'^2(l_0, l_0) \|u_n\|_r^{-2} \\ (n = 0, 1, 2, \dots) \quad u'(l_0, l_0) &= 0, \quad \omega_n' = \lambda_n'/(2\sqrt{\lambda_n}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для краевого условия первого рода согласно (2.5) величины λ_n' для всех $n = 1, 2, \dots$, т.е. все собственные значения с удлинением интервала посредством удаления правого конца убывают. Это свойство отвечает интуитивным представлениям и приводится в научной литературе [1–4]. При $q(l_0) = 0$ или достаточно малом $q > 0$ выражения $\lambda_n' < 0$ для условий третьего (2.4) и второго (2.6) родов, что также соответствует эффекту убывания всех значений λ_n ($n = 0, 1, \dots$), при $\delta l > 0$ достаточно малом. Сказанное относится также к ω_n , ω_n' согласно (2.5), (2.6).

Если воздействие винклеровского основания локально в окрестности точки $x = l_0$ “достаточно велико”, а интегрально на отрезке $0 \leq x \leq l_0$ “относительно мало”, то характер знакоопределенности величин $\lambda_n'(l_0)$ и $\omega_n'(l_0)$ (2.6) становится несколько более сложным. Справедливо следующее утверждение относительно локального поведения собственных значений $\lambda_n(l)$ и частот $\omega_n(l)$ в окрестности $l = l_0$.

Теорема. Для низших мод $n = (0), 1, \dots, k$ имеют место обратные неравенства $\lambda_n'(l_0) \geq 0$, точнее, при $l = l_0$:

$$\lambda_0' > 0, \quad \lambda_1' > 0, \dots, \quad \lambda_k' \geq 0; \quad \lambda_n' < 0, \quad n \geq k + 1 \quad (2.7)$$

Неравенства (2.7) отвечают локальному возрастанию с ростом $l \geq l_0$ собственных значений низших мод $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$, и неубыванию (в линейном приближении) значения λ_k ; последующие собственные значения λ_n убывают с ростом l . Аналогичные (2.7) неравенства справедливы для собственных частот ω_n согласно (2.6).

Конструктивные достаточные условия могут быть установлены с помощью принципа Релея и метода Релея–Ритца [1–3], которые позволяют вычислить эффективные оценки $\lambda_n^*(l_0)$ сверху искомым значениям $\lambda_n(l_0)$. В частности

$$\lambda_0^*(l_0) = \frac{\int_0^{l_0} [p(x)\psi_0'^2(x) + q(x)\psi_0^2(x)] dx}{\int_0^{l_0} r(x)\psi_0^2(x) dx} \quad (2.8)$$

где $\psi_0(x)$ – пробная функция, $\psi_0'(l_0) = 0$. Для вычисления аналогично (2.8) следующих λ_n^* требуется построение системы пробных функций $\{\psi_n(x)\}$. Таким образом, если неравенства (2.7) имеют место при подстановке в (2.6) значений λ_n^* , то они заведомо справедливы для точных величин $\lambda_n \leq \lambda_n^*$, $n \leq k$.

Установленное в теореме более тонкое свойство собственных значений $\lambda_n(l)$ в научной литературе не отмечено. Более того, имеются сомнительные утверждения (см. [4], оригинал стр. 512, русский перевод стр. 420), противоречащие утверждениям теоремы и расчетам конкретных примеров (см. разд. 3, 4). В частности, утверждается, что расширение интервала влечет убывание всех собственных значений для задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями второго рода.

Отметим, что грубое свойство (без учета функции $q(x)$) убывания по l собственных значений $\lambda_n(l) \sim l^{-2}$ при достаточно больших $n \gg 1$ с очевидностью следует из асимптотических оценок и подробно изучено в классических [2, 3] и последующих [1, 6] работах.

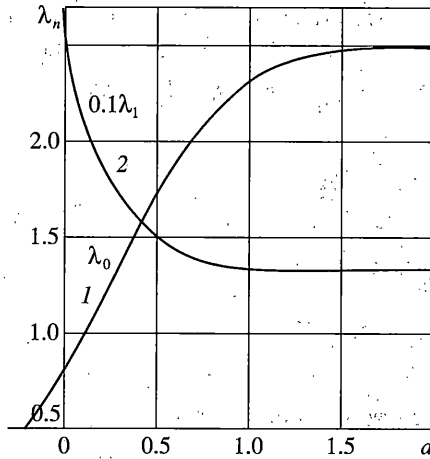
Если имеет место критический случай $\lambda_n'(l_0) \approx 0$ ($\omega_k'(l_0) \approx 0$), то эффект возрастания или убывания значений $\lambda_n(l)$ (частот $\omega_n(l)$) в окрестности $l = l_0$ определяется величиной и знаком второй производной $\lambda_n''(l_0)$ ($\omega_n''(l_0)$) согласно формуле (2.1) (и (2.6)). Выражения для λ_n'' получаются с помощью соотношений (2.3) и аналогичных им для неизвестной w :

$$\begin{aligned} (pw')' + (\lambda r - q)w &= -\lambda''ru - 2\lambda'rv; & \alpha_0 pw' - \beta_0 w &= 0, & x &= 0 \\ \alpha_l((\lambda_r - q)u)' - 2p'v' + 2pv'' + pw' &+ \beta_l(u'' + 2v' + w) &= 0, & & x &= l_0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аргументы и индексы в (2.9) не указаны для сокращения записи. Сходная, как и при вычислении λ_n (см. выше), процедура умножения уравнения (2.1) для u_n на w_n и (2.9) для w_n на u_n , вычитание и интегрирование разности приводит к весьма громоздким формулам (восемь слагаемых)

$$\begin{aligned} \lambda_n''(l_0) &= -2\lambda_n'(l_0)(v_n, u_n)_r \|u_n\|_r^{-2} + [(\lambda_n r' - q' + 2\lambda_n' r)u_n^2 - \\ &- p'u^2 + 2(\lambda_n r - q)u_n v_n + pu_n' v_n]_{x=l_0} \|u_n\|_r^{-2}, & \omega_n'' &= \lambda_n'' / \sqrt{\lambda_n} - 1/4 \lambda_n'^2 / \lambda_n^{3/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Зависимость от w_n согласно (2.10) отсутствует. Формулы (2.10) предполагают дифференцируемость функций p, r, q в точке $x = l_0$. При $\lambda_n' = 0$ и условии второго рода происходит существенное упрощение соответствующего выражения λ_n'' . Действитель-



Фиг. 1

но, исчезают первое и с четвертого по восьмое слагаемые. Кроме того при $r = \text{const}$ равно нулю второе слагаемое, и в итоге остается третье слагаемое, содержащее $q'(l_0)$.

Реальные расчеты искомых величин λ_n , λ_n' , λ_n'' могут быть выполнены численно-аналитическими методами. Согласно (2.10) требуется определить функции $v_n(x)$, $v_n'(x)$ для всех $0 \leq x \leq l_0$ на основе решения неоднородных краевых задач (2.3). В силу однородности выражений (1.1), (1.2), (2.3), (2.9) по u , v можно ограничиться для нахождения v_n , v_n' решением задачи Коши с условиями

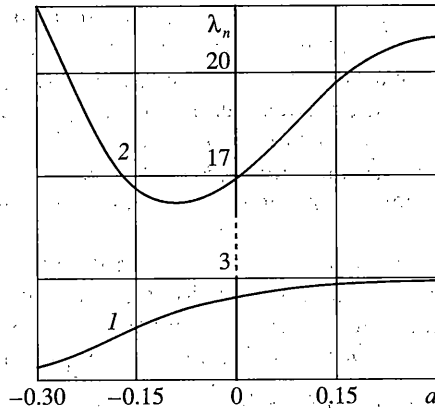
$$v_n(0) = \frac{\alpha_0 p(0)}{\alpha_0 p(0) + \beta_0}, \quad v_n'(0) = \frac{\beta_0}{\alpha_0 p(0) + \beta_0} \quad (n = 0, 1, \dots)$$

В практических расчетах предпочтительнее использование процедуры продолжения по параметру l на основе метода ускоренной сходимости [1, 5]. Изложенные результаты имеют важное теоретическое и прикладное значение, поскольку свидетельствуют о неизвестных качественных особенностях поведения собственных значений.

3. Тестовые примеры. С иллюстративной целью приведем расчеты модельных примеров, иллюстрирующих эффект возрастания низших собственных значений при увеличении длины интервала. Для удобства полагаем $l = 1 + a$; коэффициенты уравнения берутся в виде

$$p(x) \equiv 1, \quad r(x) = (2+x)^{-1}, \quad q = x^2, \quad u'(0) = u'(1+a) = 0. \quad (3.1)$$

Минимальное (нулевое) собственное значение $\lambda_0(l)$ при $l = l_0 = 1$ равно $\lambda_0(1) = 0.79578$; для последующего $\lambda_1(1) = 25.50513$. Они находятся с помощью метода ускоренной сходимости [1, 5]. Вычислим для λ_0 согласно (2.5), (3.1) коэффициент в квадратной скобке: $\lambda_0 r(1) - q(1) = -0.73474 < 0$. Это неравенство свидетельствует о возрастании или убывании значения $\lambda_0(1+a) \geq \lambda_0(1)$, а также низшей частоты $\omega_0 = \sqrt{\lambda_0}$, при увеличении (или уменьшении) $a \geq 0$ (см. кривую 1 на фиг. 1). Собственные частоты ω_n и значения λ_n , $n \geq 1$ убывают при росте a и возрастают при его уменьшении. В частности, для λ_1 имеем $\lambda_1 r(1) - q(1) = 7.50138 > 0$ (см. кривую 2 на фиг. 1). Аналогичная ситуация



Фиг. 2

имеет место при $q = 9x^2$, для которой $\lambda_0(1) = 5.6251$; соответствующая кривая $\lambda_0(l)$ аналогична кривой 1 на фиг. 1. Качественное отличие заключается в знаке величины $\lambda_0''(1)$: для кривой 1 он положителен (выпуклость вниз), для указанной выше аналогичной зависимости – отрицателен (выпуклость вверх).

Рассмотрим пример другого типа, позволяющий установить указанное в теореме свойство возрастания также для последующих собственных значений λ_n ($n \geq 1$). Возьмем класс функций более резко, чем в (3.1), возрастающих при $x \approx 1$. Пусть

$$p(x) = r(x) \equiv 1, \quad q(x) = (q_0 + x)^m, \quad q_0 > 0, \quad m \geq 1 \tag{3.2}$$

Выбором параметров q_0, m можно добиться резкого возрастания функции $q(x)$ вблизи $x = 1$ при умеренном росте $\lambda_n(l)$. При $q_0 = 0.5, m = 8$ получим $\lambda_0(1) = 2.4346, \lambda_1(1) = 16.89696$; значения коэффициента в квадратной скобке отрицательны, так как $q(1) = 25.6 > \lambda_{0,1}(1)$. Соответствующие кривые 1, 2 для λ_0, λ_1 при $-0.3 \leq a \leq 0.3$ представлены на фиг. 2. Они, как и кривая 1 на фиг. 1, иллюстрируют установленное в теореме свойство возрастания собственных значений $\lambda_{0,1}(l)$ для низших мод $n = 0, 1$.

Отметим немонотонность функции $\lambda_1(l)$ при уменьшении l ($a < 0$). В окрестности значения $l \approx 0.9$ ($a \approx -0.1$) наблюдается явно выраженный минимум.

При дальнейшем уменьшении длины $l \rightarrow 0$ ($a \rightarrow -1$) имеет место асимптотика $\lambda_1 \sim (\pi/l)^2 \rightarrow \infty, \omega_1 \sim \pi/l$, что отвечает физическим представлениям. Собственные значения $\lambda_0(l)$ и частота $\omega_0(l)$ монотонно уменьшаются при $l \rightarrow 0$ и стремятся к величинам $\lambda_0(0) = q_0^8 = 1/256, \omega_0(0) = q_0^4 = 1/16$.

С помощью указанного подхода могут быть изучены случаи других значений параметров q_0, m , а также более сложных выражений для коэффициентов p, r, q . Существо эффекта наиболее убедительно можно проиллюстрировать на примерах систем с кусочно-постоянными коэффициентами. Они допускают полное интегрирование и сведение к конечным трансцендентным уравнениям для определения и анализа собственных значений. Такие системы могут представлять определенный интерес при решении и анализе прикладных задач.

4. Системы с кусочно-постоянными характеристиками. Задача Штурма–Лиувилля (1.1), (1.2) с кусочно-гладкими коэффициентами $p(x), r(x), q(x)$ требует разработки специальных алгоритмов расчета. Он может быть реализован на основе вариационного подхода и метода Релея–Ритца. В приложениях часто упругие системы могут быть

описаны уравнением вида (1.1) с кусочно-постоянными характеристиками. Это позволяет проинтегрировать уравнения на участках постоянства коэффициентов и привести решение задачи к алгебраическому трансцендентному уравнению, содержащему степенные, тригонометрические и экспоненциальные функции для определения собственных значений. Вместо разрывной функции u' удобнее использовать непрерывную переменную $\theta = pu'$, которая в точках разрывов коэффициентов p, r, q имеет особенность типа "излом". Переменная u испытывает излом в точках разрыва коэффициента p .

1. Рассмотрим относительно простую ситуацию, когда упругая система (струна, распределенная пружина, упругий вал или брус) имеют постоянные характеристики $p, r = \text{const} > 0$, а внешняя среда (винклеровское основание) содержит два участка постоянства коэффициента жесткости $q(x)$. Посредством нормировки получается задача вида

$$\begin{aligned} u'' + [\lambda - q(x)]u &= 0; \quad q \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad q \equiv q_0, \quad 1 < x \leq l \\ \alpha_{0,l}u' \mp \beta_{0,l}u &= 0, \quad x = 0, \quad l = 1 + a \end{aligned} \quad (4.1)$$

Общее решение уравнения (4.1) представимо в виде ($a_{1,2}, b_{1,2} = \text{const}$):

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sin vx + b_1 \cos vx, \quad v(a) \equiv \sqrt{\lambda(l)}, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u &= a_2 \sin \omega(l-x) + b_2 \cos \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad \lambda \geq q_0, \quad 1 < x \leq l \end{aligned} \quad (4.2)$$

Значения $u(x), u'(x)$ должны совпадать при $x = 1 \pm 0$.

При $q_0 \geq \lambda$ для $0 \leq x \leq 1$ остается справедливым выражение (4.2). Для $1 < x \leq l$ тригонометрические функции следует заменить гиперболическими и представить решение в виде

$$u = a_2 \text{sh } \omega(l-x) + b_2 \text{ch } \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda}, \quad 1 < x \leq l \quad (4.3)$$

Выражения (4.3) эквивалентны заменам $\omega \rightarrow i\omega, ia_2 \rightarrow a_2$. Характеристическое уравнение для определения собственных значений λ получается из условия равенства нулю определителя четвертого порядка. В первом (тригонометрическом) случае имеем

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= -(\beta_0 \beta_l + \alpha_0 \alpha_l v^2) \omega \sin v \cos \omega a + (\beta_0 \alpha_l \omega^2 - \alpha_0 \beta_l v^2) \sin v \sin \omega a + \\ &+ (-\alpha_0 \beta_l + \beta_0 \alpha_l) v \omega \cos v \cos \omega a + (\alpha_0 \alpha_l \omega^2 + \beta_0 \beta_l) v \cos v \sin \omega a = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) есть нечетная функция относительно переменных v и ω . Во втором ("гиперболическом") имеем представление вида (4.4), в котором следует совершить замены $\Delta \rightarrow i\Delta, \omega \rightarrow i\omega, \sin \omega a \rightarrow i \text{sh } \omega a, \cos \omega a \rightarrow \text{ch } \omega a$, с соответствующим выражением для ω ($\omega = \sqrt{q_0 - \lambda}$). При $a = 0$ уравнение (4.4) имеет стандартную тригонометрическую форму (после сокращения на $\omega \neq 0$):

$$(\alpha_l \beta_0 - \alpha_0 \beta_l) v \cos v - (\alpha_0 \alpha_l v^2 + \beta_0 \beta_l) \sin v = 0, \quad v_n(0) = \sqrt{\lambda_n(1)} \quad (4.5)$$

Корни $v_n(0)$ уравнения (4.5) могут быть найдены численно для всех $n = (0), 1, 2, \dots$ и заданных $\alpha_{0,l}, \beta_{0,l}$. Соответствующие величины $v_n(a)$ при $a \neq 0$ вычисляются с помощью процедуры продолжения по параметру, которая является весьма громоздкой. Поэтому представляет интерес на начальном этапе провести исследование предельных ситуаций, когда имеют место крайние условия первого и (или) второго рода.

2. Пусть на обоих концах выполняются условия второго рода, т.е. в (4.1) имеем $\beta_{0,l} = 0, \alpha_{0,l} = 1$. Согласно (4.2), (4.3) получим для $q_0 \geq \lambda$ соответственно

$$\begin{aligned} u &= b_1 \cos vx, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u = b_2 \operatorname{ch} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda} \\ u &= b_2 \cos \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}; \quad 1 < x \leq l \\ v \sin v \operatorname{ch} \omega a - \omega \cos v \operatorname{sh} \omega a &= 0, \quad v_n(0) = \pi n \\ v \sin v \cos \omega a + \omega \cos v \sin \omega a &= 0, \quad v_n(0) = \pi n \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что низшие собственные значения $\lambda_n(l)$, такие что $\lambda_n(1) < q_0$, возрастают при $a \rightarrow \infty$ и стремятся к корням соответствующего уравнения $v \sin v = \omega \cos v$. Аналогично стандартным методом анализа (вычислением неявных производных λ'_n из (4.6)) устанавливаются более высокие собственные значения $\lambda_n(l)$, такие что $\lambda_n(1) > q_0$, убывают. В предельном случае, если для некоторого $n = n^*$ величина $\lambda_{n^*}(1) = q_0 = (\pi n^*)^2$, то $\lambda_{n^*}(l) \equiv (\pi n^*)^2$ независимо от величины $a \geq 0$. При $n < n^*$ значения $\lambda_n(l)$ с увеличением параметра длины a возрастают, для $n > n^*$ значения $\lambda_n(l)$ убывают.

Рассмотрим кратко случай, когда левый конец ($x = 0$) закреплен $u(0) = 0$, а правый ($x = l$) свободен $u'(l) = 0$. Соотношения типа (4.6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sin vx, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u = b_2 \operatorname{ch} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda} \\ u &= b_2 \cos \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad 1 < x \leq l \\ v \cos v \operatorname{ch} \omega a + \omega \sin v \operatorname{sh} \omega a &= 0, \quad v_n(0) = \pi n \\ v \cos v \cos \omega a - \omega \sin v \sin \omega a &= 0, \quad v_n(0) = \pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Как и выше, на основе неявных производных λ'_n устанавливается, что низшие собственные значения $\lambda_n(a)$, такие что $\lambda_n(1) < q_0$, возрастают, а высшие $\lambda_n(1) > q_0$ — убывают; при $q_0 = (\pi n^*)^2$ значение $\lambda_{n^*}(l) \equiv (\pi n^*)^2$.

3. Исследуем ситуацию в случае закрепленного правого конца: $u(l) = 0$ (условие первого рода). Пусть левый конец также закреплен: $u(0) = 0$; тогда

$$\begin{aligned} u &= a_1 \sin vx, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u = a_2 \operatorname{sh} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda} \\ u &= a_2 \sin \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad 1 < x \leq l \\ \omega \sin v \operatorname{ch} \omega a + v \cos v \operatorname{sh} \omega a &= 0, \quad v_n(0) = \pi n \\ \omega \sin v \cos \omega a + v \cos v \sin \omega a &= 0, \quad v_n(0) = \pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Определяемые согласно (4.8) все собственные значения $\lambda_n(l)$ убывают с ростом параметра a независимо от величин $\lambda_n(1) \geq q_0$ (неявные производные $\lambda'_n < 0$). Если же $q_0 = (\pi n^*)^2$, то $\lambda_{n^*}(l) \equiv q_0$ при $a \geq 0$.

Пусть на левом конце выполняется условие второго рода: $u'(0) = 0$; тогда

$$u = b_1 \cos vx, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad u = a_2 \operatorname{sh} \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{q_0 - \lambda}$$

$$u = a_2 \sin \omega(l-x), \quad \omega = \sqrt{\lambda - q_0}, \quad 1 < x \leq l$$

$$\omega \cos v \operatorname{ch} \omega a - v \sin v \operatorname{sh} \omega a = 0, \quad v_n(0) = (n - 1/2)\pi \quad (4.9)$$

$$\omega \cos v \cos \omega a - v \sin v \operatorname{sh} \omega a = 0, \quad v_n(0) = (n - 1/2)\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Согласно (4.9) собственные значения $\lambda_n(l)$ убывают при увеличении параметра $a \geq 0$ как и в случае закрепленных обоих концов (4.8). Справедливы приведенные выше качественные выводы для случая $q_0 = (\pi n^*)^2$.

Таким образом, результаты аналитического исследования задачи (4.1) убедительно иллюстрируют выводы теоремы (см. п. 2). Они свидетельствуют о возрастании частот собственных колебаний упругих систем со свободным правым концом при увеличении их длины во внешней среде со сравнительно большим коэффициентом упругости. Если конец закреплен достаточно жестко, то независимо от свойств среды удлинение системы приводит к уменьшению всех, в том числе низших частот колебаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды 05-01-00043, 05-01-00563) и Программы поддержки ведущих научных школ ИПШ 1627.2003.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akulenko L.D., Nesterov S.V. High-precision methods in eigenvalue problems and their applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 255 p.
2. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. V. 1. N.Y.: Wiley, 1989 = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
4. Korn G.A., Korn T.M. Mathematical handbook for scientists and engineers. N.Y.: Dover, 2000 = Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1970. 720 с.
5. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Определение частот и форм колебаний неоднородных распределенных систем и с граничными условиями третьего рода // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 547–555.
6. Акуленко Л.Д. Высокочастотные собственные колебания механических систем // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 817–832.

Москва

Поступила в редакцию
7.09.2005