

УДК 539.3

© 2006 г. Д.Д. ЗАХАРОВ

ИЗГИБНЫЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Исследованы изгибные волны рэлеевского типа, локализованные вблизи кромки тонкого слоистого анизотропного пакета (пластины). Допускается анизотропия слоев общего вида при симметричном и несимметричном расположении слоев по толщине. В обоих типах укладки слоев обнаружены эффекты затухания волн с осцилляциями. Показано, что для симметричной укладки при некоторых частных видах анизотропии возможно изменение знака потока мощности и появление стоячих волн. Обсуждается причина невыполнения теоремы Леонтовича – Лайтхилла.

1. По-видимому, изгибные волны рэлеевского типа в пластинах впервые были исследованы в [1] для случая изотропных сред, затем они изучались в [2, 3]. Однако, в отличие от плоских волн Рэлея, на использовании которых основан ряд технологий неразрушающего контроля, сейсмического мониторинга и т.д. (подробная библиография представлена, например в [4]), изгибные волны не столь знамениты и оставались математическим курьезом. Это объясняется сравнительно малым коэффициентом затухания изгибной волны (порядка v^2 , где v – коэффициент Пуассона) в изотропной среде и ее дисперсией. Появление и широкое распространение перспективных композиционных материалов делает актуальными следующие естественные вопросы: существуют ли изгибные рэлеевские волны в средах с анизотропией достаточно общего вида; если существуют, то каковы их свойства (энергия, коэффициенты затухания и т.д.); каково влияние на эти свойства асимметрии укладки слоев (связанности изгиба и плоского напряженного состояния).

В настоящей статье даются ответы на приведенные вопросы применительно к слоистым пакетам, дополняющие полученные рядом авторов результаты для однослойных пластин [3, 5–9].

2. Рассмотрим тонкий пакет несимметричного строения, составленный из упругих слоев с анизотропией общего вида. Межслойный контакт предполагается идеальным. Обозначим полную толщину пакета $H = 2h$; продольные декартовы координаты x_α , $\alpha = 1, 2$ ($\mathbf{x} = \mathbf{i}_\alpha x_\alpha$) и поперечную координату $x_3 = z$. В постоянных матрицах жесткостей слоев $\mathbf{G}_j = \|g_{mn}\|_j$ ($m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) с ненулевыми элементами соответствие индексов отвечает следующим подстановкам $1, 2, 3, 4, 5, 6 \leftrightarrow 11, 22, 33, 23, 13, 12$. Будем считать, что внутреннее напряженно-деформированное состояние слоистого пакета является длинноволновым. Асимптотически точные математические модели движения таких пакетов известны [10] и обладают преемственностью по отношению к классическим соотношениям теории пластин Кирхгофа – Лява [11]. Нормальный прогиб w и вектор продольных перемещений $\mathbf{u}$ при этом имеют вид

$$w = w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) - z \operatorname{grad} w \quad (2.1)$$

Продольные напряжения в j -м слое $z_j \leq z \leq z_{j+1}$ выражаются формулой ($\alpha, \beta = 1, 2$):

$$\sigma_{\alpha\beta}^j = \chi_{\alpha\beta}(\Gamma_j)(\mathbf{u}_0 - z \text{grad} w)$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{12} \\ \chi_{22} \end{bmatrix}(\Gamma_j) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{16} & \gamma_{12} \\ \gamma_{16} & \gamma_{66} & \gamma_{26} \\ \gamma_{12} & \gamma_{26} & \gamma_{22} \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 \\ 0 & \partial_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

где $\Gamma_j \equiv \|\gamma_{pq}\|_j$ ($p, q = 1, 6, 2$) матрица эффективных жесткостей в слое. Её элементы равны отношению миноров исходной матрицы $\mathbf{G}$: $\gamma_{pq} \equiv G_q^p / G_0$, $G_0 \equiv G_{345}^{345}$, минор G_q^p получается окаймлением p -й строкой и q -м столбцом минора G_0 снизу и справа, соответственно. Продольные усилия $Q_{\alpha\beta}$ и изгибные моменты $M_{\alpha\beta}$ получаются интегрированием напряжений (2.2) с соответствующим весом

$$Q_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1)\mathbf{u}_0 - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\text{grad} w, \quad M_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\mathbf{u}_0 - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3)\text{grad} w \quad (2.3)$$

$$\mathbf{D}_k \equiv k^{-1} \sum_j (z_{j+1}^k - z_j^k) \Gamma_j$$

а поперечные усилия выражаются привычным образом $Q_{\alpha\alpha} = \partial_\beta M_{\alpha\beta}$. Мембранные жесткости $\mathbf{D}_1$ отвечают задаче о плоском напряженном состоянии, изгибные жесткости $\mathbf{D}_3$ – задаче изгиба пластины, а ненулевые мембранно-изгибные жесткости $\mathbf{D}_2$ приводят к связанности обоих процессов. Более подробная классификация приведена в [12]. В отсутствие нагрузок на лицевых поверхностях пакета уравнения движения принимают вид [10] (ρ обозначает среднюю плотность пакета по толщине):

$$\begin{aligned} \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1)\mathbf{u}_0 - \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\text{grad} w &= 0 \\ -\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\mathbf{u}_0 + [\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3)\text{grad} + \rho H \partial_t^2] w &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

При симметричном расположении слоев относительно нейтральной плоскости $\mathbf{D}_2 = 0$ и квазистатическая задача о плоском напряженном состоянии полностью отделяется, а последнее из уравнений (2.4) совпадает с классическим уравнением изгиба [11]. Краевые условия к системе уравнений (2.4) формулируются в перемещениях, углах поворота сечений $\theta = -\text{grad} w$, продольных усилиях и/или изгибающих моментах (2.3) и перерезывающих усилиях Кирхгофа $N_{\alpha\alpha} = Q_{\alpha\alpha} + \partial_\beta M_{\alpha\beta}$ (суммирование по повторяющимся индексам в формуле не проводится) [12].

3. Пусть теперь пакет слоев, совершает гармонические колебания с циклической частотой ω , занимает в плане область $-\infty < x_1 < \infty$, $x_2 \geq 0$ и его край $x_2 = 0$ свободен от напряжений. Исследуем возможность появления собственных волн, распространяющихся вдоль края и экспоненциально затухающих с удалением от него вглубь пакета, т.е. решений рэлеевского типа:

$$w = w^* e^{i[s(x_1 + \lambda x_2) - \omega t]}, \quad \mathbf{u}_0 = i s \mathbf{u}^* e^{i[s(x_1 + \lambda x_2) - \omega t]} \quad (\text{Im} \lambda \geq 0) \quad (3.1)$$

Амплитуды парциальных волн w^* , $\mathbf{u}_\alpha^*$ будем предполагать постоянными. Искомое решение (3.1) должно удовлетворять системе уравнений (2.4) и условию свободного края $x_2 = 0$:

$$Q_{12} = Q_{22} = 0, \quad M_{22} = 0, \quad N_{2z} = 0 \quad (3.2)$$

Введем характеристические полиномы второго порядка $p_{\alpha\beta}(\lambda)$, третьего порядка $p_{\alpha 3}(\lambda)$ и четвертого порядка $p_{33}(\lambda)$, $p_4(\lambda)$, подставляя формулы (3.1) в соответствующие операторы (2.4):

$$\begin{aligned} \partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1) \mathbf{u}_0 &= -is^3 p_{\alpha\beta}(\lambda) u_{\beta}, \quad p_{12} = p_{21}, \quad p_4(\lambda) \equiv p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} \\ -\partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \text{grad} w &= is^3 p_{\alpha 3}(\lambda) w, \quad -\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \mathbf{u}_0 = -s^4 p_{\beta 3}(\lambda) u_{\beta} \\ \partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3) \text{grad} w &= s^4 p_{33}(\lambda) w \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для амплитуд парциальных волн и величины λ получаем линейную систему уравнений

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & -p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & -p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & p_{33} - \rho H \omega^2 s^{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ w^* \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

Введем теперь характеристический полином восьмого порядка – детерминант матрицы (3.4):

$$p_8(\lambda) \equiv \det \mathbf{P}|_{\omega=0} \quad (3.5)$$

Искомое решение будет иметь место, если выполнены равенства

$$p_8(\lambda) - \rho H \omega^2 s^{-4} p_4(\lambda) = 0 \quad (3.6)$$

$$u_1^* = \frac{p_{13}p_{22} - p_{23}p_{12}}{p_4} w^*, \quad u_2^* = \frac{p_{11}p_{23} - p_{21}p_{13}}{p_4} w^* \quad (3.7)$$

и краевые условия (3.2). Величины λ являются корнями характеристического уравнения (3.6). Последнему удобнее придать следующий вид

$$p_8(\lambda)/p_8(0) - \Omega^4 p_4(\lambda)/p_4(0) = 0 \quad (3.8)$$

$$\Omega^4 \equiv \frac{V^2}{V_B^2} = \frac{\rho H \omega^2 p_4(0)}{s^4 p_8(0)}, \quad V_B^2 \equiv \frac{s^2 p_8(0)}{\rho H p_4(0)} \quad (3.9)$$

где $V = \omega/s$ – фазовая скорость искомой волны, а V_B – скорость изгибной волны, распространяющейся вдоль оси x_1 (последняя не удовлетворяет краевым условиям (3.2)). Нетрудно заметить, что введенные нами характеристические полиномы аналогичны характеристическим полиномам статической задачи [13] и обладают теми же свойствами. В частности, полиномы $p_{33}(\lambda)$, $p_4(\lambda)$ и $p_8(\lambda)$ положительно определены при вещественных λ . Следовательно, вне интервала

$$0 < \Omega < \Omega_*, \quad \Omega_* \equiv \left\{ \sup_{\lambda \in R} \frac{p_4(\lambda)p_8(0)}{p_4(0)p_8(\lambda)} \right\}^{-1/4} \quad (3.10)$$

уравнение (3.8) имеет хотя бы один вещественный корень. Внутри интервала (3.10) все корни комплексные и образуют четыре сопряженные пары, из которых выберем только те, что имеют неотрицательную мнимую часть $\lambda_k(\Omega)$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Отметим, что величина Ω_* задает также физическое ограничение на фазовую скорость изгибной рэле-

евской волны $V < V_B \Omega_*^2$. Подстановка парциальных перемещений (3.1), (3.7) в выражения для усилий и моментов приводит к соотношениям

$$Q_{\alpha\beta} = -s^2 q_{\alpha\beta}(\lambda) w^* e^{i[s(x_1 + \lambda x_2) - \omega t]}, \quad (Q_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}(\lambda) \leftrightarrow M_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta}(\lambda))$$

$$N_{\alpha z} = -is^3 n_{\alpha z}(\lambda) w^* e^{i[s(x_1 + \lambda x_2) - \omega t]}$$

и эквивалентной записи краевых условий (3.2) в следующем виде:

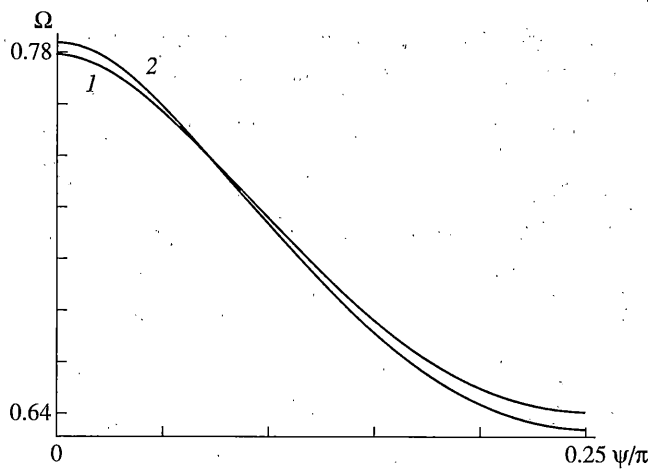
$$\begin{bmatrix} q_{12}^1 & q_{12}^2 & q_{12}^3 & q_{12}^4 \\ q_{22}^1 & q_{22}^2 & q_{22}^3 & q_{22}^4 \\ m_{22}^1 & m_{22}^2 & m_{22}^3 & m_{22}^4 \\ n_{2z}^1 & n_{2z}^2 & n_{2z}^3 & n_{2z}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ w_3^* \\ w_4^* \end{bmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

$$\Delta(\Omega) = 0 \quad (3.12)$$

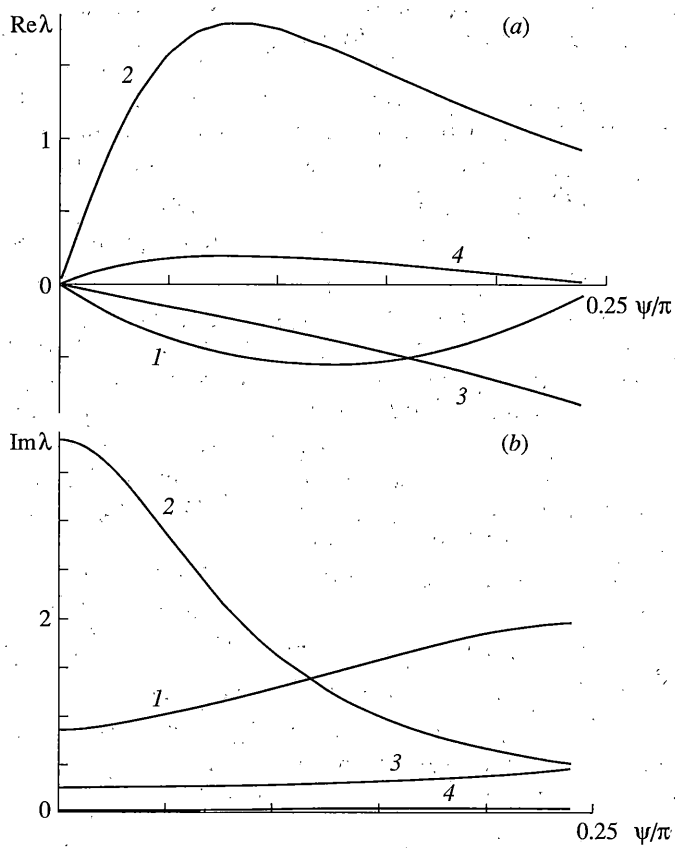
где $q_{\alpha\beta}^k \equiv q_{\alpha\beta}(\lambda_k)$ ($q_{\alpha\beta} \leftrightarrow m_{\alpha\beta}, n_{\alpha z}$), $w_1^* \equiv w^*(\lambda_k)$, а $\Delta(\Omega)$ – детерминант линейной системы (3.11). Таким образом, парциальные волны в искомом решении должны удовлетворять характеристическому уравнению (3.8) и дисперсионному уравнению (3.12) на интервале (3.10).

4. Покажем теперь, как выглядят фазовая скорость и затухание изгибных волн рэлеевского типа для некоторых слоистых пластин из реальных композиционных материалов: ортотропного углепластика (У) с параметрами $\rho = 1500$ [кг/м³], $E_1 = 0.128 \cdot 10^{15}$, $E_2 = 0.84 \cdot 10^{13}$, $G_{12} = 0.46 \cdot 10^{13}$ [Н/м²], $\nu_{12} = 0.37$ и органопластика (О) $\rho = 1400$, $E_1 = 0.26 \cdot 10^{14}$, $E_2 = 0.18 \cdot 10^{14}$, $G_{12} = 0.230 \cdot 10^{13}$, $\nu_{12} = 0.14$. В обоих случаях рассмотрим пластину толщиной $H = 0.2 \cdot 10^{-2}$ [м] из одинаковых слоев, полностью сцепленных на границе контакта и уложенных с поворотом главных осей на 90° по отношению друг к другу. Угол между главной осью 1 верхнего материала и координатной осью x_1 обозначим ψ : $0 < \psi < \pi/4$. Решение строится по описанному алгоритму: при каждом ψ находим значение Ω_* , из уравнения (3.8) определяем $\lambda_k(\Omega)$, ($k = 1, 2, 3, 4$) и разрешаем дисперсионное уравнение (3.12) относительно Ω . Такая процедура проделана с использованием пакета программ MAPLE 5. Графики $\Omega(\psi)$ приведены на фиг. 1 (кривые 1, 2 отвечают материалам (У) и (О), соответственно). Отметим, что значения $\Omega(\psi)$ оказываются весьма близкими к Ω_* (различие может наблюдаться во втором-третьем знаке) и поиск корней уравнения (3.12) требует определенной аккуратности. Вещественные и мнимые части корней $\lambda_k(\Omega)$ приведены на фиг. 2, а, b (материал (У)) и фиг. 3, а, b (материал (О)). Как показано на фиг. 4 (материал (У)), модуль отношения $|w_4^*/w_k^*|$ не является малой величиной и амплитудой w_4^* нельзя пренебречь, т.е. затухание краевой волны определяется по минимальной из мнимой частей $\text{Im}\lambda_4(\Omega)$ и оказывается относительно невелико (фиг. 5). Вводя в рассмотрение средний за период поток мощности J и групповую скорость V_G (точка означает дифференцирование по времени):

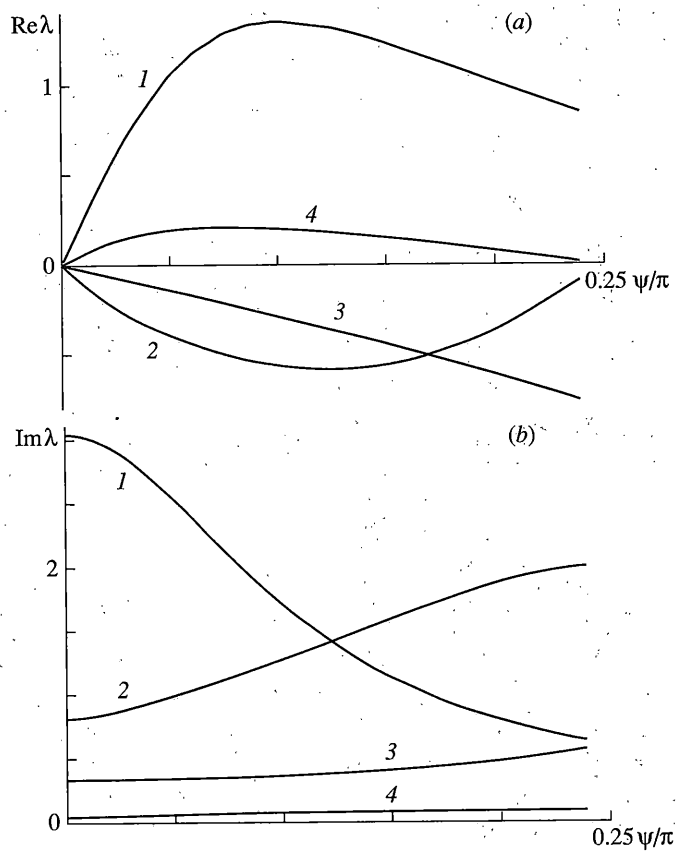
$$J \equiv -\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^\infty \{ \text{Re} u_\alpha \cdot \text{Re} Q_{1\alpha} + \text{Re} \dot{\theta}_\alpha \cdot \text{Re} M_{1\alpha} + \text{Re} w \cdot \text{Re} Q_{1z} \} dx_2 \quad (4.1)$$



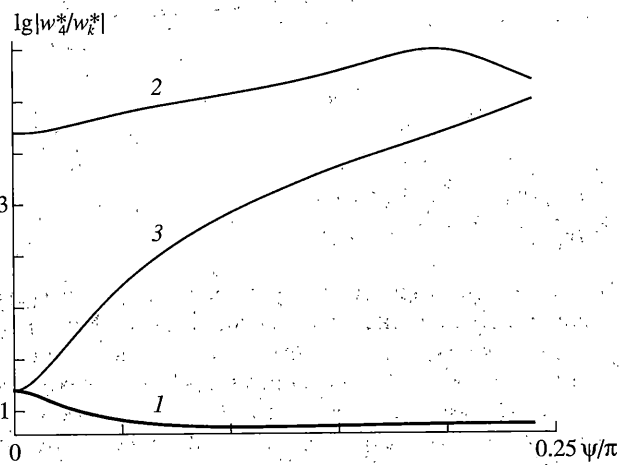
Фиг. 1



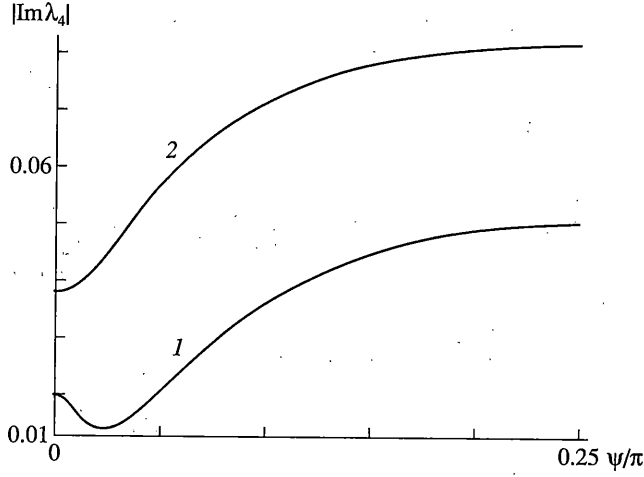
Фиг. 2



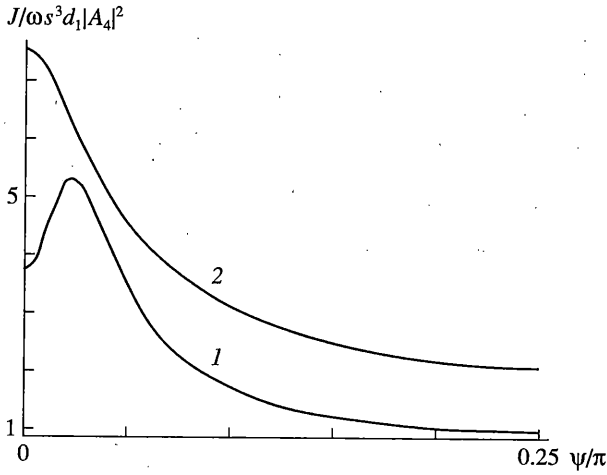
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$$V_G \equiv \frac{d\omega}{ds} = 2s \sqrt{\frac{\Omega^4 p_8(0)}{\rho H p_4(0)}} = 2\Omega^4 \sqrt{\frac{\omega^2 p_8(0)}{\rho H p_4(0)}} \quad (4.2)$$

убеждаемся, что знак фазовой скорости V и групповой скорости V_G положителен и согласуется с направлением переноса энергии краевой волной (фиг. 6).

5. Рассмотрим теперь переход к случаю симметричной укладки слоев. Как легко видеть, осредненная мембрано-изгибная жесткость $\mathbf{D}_2 \equiv 0$ и, соответственно, $\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \equiv 0$, $p_{\alpha 3}(\lambda) \equiv 0$. При полном отделении квазистатической задачи обобщенного плоского напряженного состояния от динамической задачи изгиба $p_8(\lambda) = p_{33}(\lambda)p_4(\lambda)$ и уравнение (3.6) естественным образом переходит в уравнения

$$p_{33}(\lambda) - \rho H \omega^2 s^{-4} = 0 \quad (5.1)$$

$$p_{33}(\lambda)/p_{33}(0) - \Omega^4 = 0 \quad (5.2)$$

$$\Omega^4 \equiv \frac{V^2}{V_B^2} = \frac{\rho H \omega^2}{s^4 p_{33}(0)}, \quad V_B^2 \equiv \frac{s^2 p_{33}(0)}{\rho H} \quad (5.3)$$

Количество искомых корней сокращается до двух. Соответственно, следует полагать $u_0 = 0$ и в формулах (3.1) рассматривать лишь нормальный прогиб. Краевые условия (3.2) ставятся только для нормального момента и перерезывающего усилия $M_{22} = 0, N_{2z} = 0$, а уравнения, аналогичные (3.11)–(3.12), принимают вид

$$\begin{bmatrix} m_{22}^1 & m_{22}^2 \\ n_{2z}^1 & n_{2z}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_4^* \end{bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

$$\Delta(\Omega) = 0 \quad (5.5)$$

$$0 < \Omega < \Omega_* \equiv \left\{ \inf_{\lambda \in R} \frac{p_{33}(\lambda)}{p_{33}(0)} \right\}^{1/4} \quad (5.6)$$

6. В частном случае ортотропной пластины, главные оси которой совпадают с осями x_1, x_2 , ситуация существенно упрощается. Смешанные жесткости $d_{16}^3 = d_{26}^3 = 0$ и характеристическое уравнение (5.5) имеет чисто мнимые ветви корней $\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega)$. Для удобства нормируем изгибные жесткости $d_{pq} = d_{pq}^3/d$.

Выбирая нормировочный коэффициент $d = d_{22}^3$, получаем соотношения

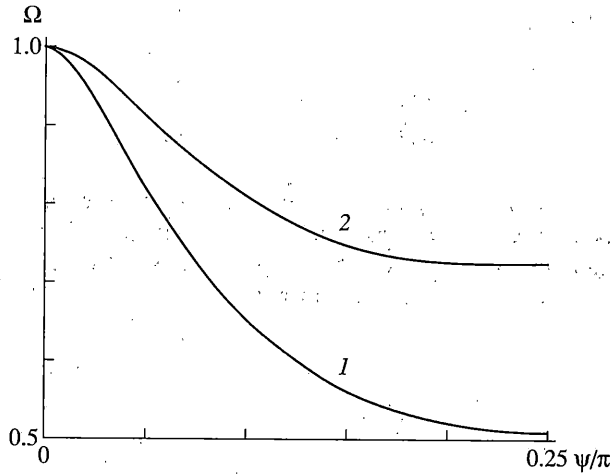
$$\lambda_{1,2} = i \{ C \mp \sqrt{D + \Omega^4} \}^{1/2}, \quad D = C^2 - \frac{d_{11}^3}{d_{22}^3}, \quad C = \frac{d_{12}^3 + 2d_{66}^3}{d_{22}^3}, \quad E = \frac{2d_{66}^3}{d_{22}^3} \quad (6.1)$$

$$f(\Omega) \equiv \left\{ \frac{E + \sqrt{D + \Omega^4}}{E - \sqrt{D + \Omega^4}} \right\}^2 \left\{ \frac{C - \sqrt{D + \Omega^4}}{C + \sqrt{D + \Omega^4}} \right\}^{1/2} = 1 \quad (f(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \det \Delta(\Omega) = 0) \quad (6.2)$$

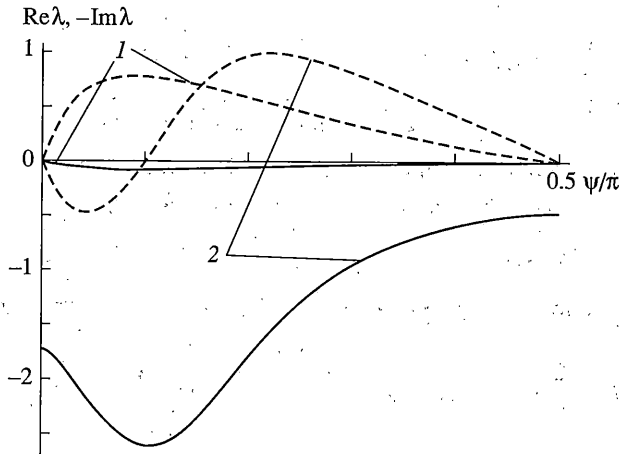
Функция $f(\Omega)$ при $\Omega^4 \in [E^2 - D, C^2 - D]$ изменяется от 0 до $+\infty$, т.е. вещественный корень Ω уравнения (6.2) существует всегда и равен

$$\Omega = \left\{ -D + CE \left(2 - 3a^2 + 2\sqrt{2(a^2 - 1/2)^2 + 1/2} \right) \right\}^{1/4}, \quad a^2 = \frac{E}{C} \quad (6.3)$$

где положительная определенность радикалов следует из положительной определенности тензора упругих постоянных. Легко видеть, что отношение амплитуд w_2^*/w_1^* также вещественно. Следовательно, при вещественной амплитуде w_2^* перемещения и углы θ_1, θ_2 изменяются по гармоническому закону с разницей фаз $\pi/2$. Произвольно выбранная точка (x_1, x_2) за период колебаний описывает эллипс, направление обхода – положительное, полуоси эллипса экспоненциально уменьшаются с удалением от свободного торца.



Фиг. 7



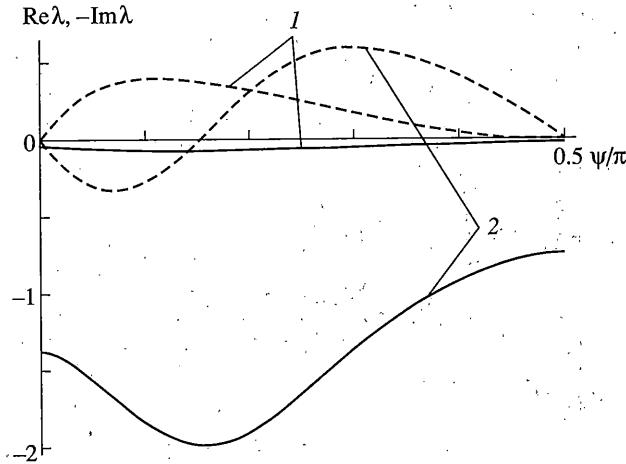
Фиг. 8

В частном случае изотропной (и трансверсально изотропной) среды равенство (6.3) приводит к известному соотношению Коненкова [1]:

$$\Omega = \{(1 - \nu)(3\nu - 1 + 2\sqrt{1 - 2\nu + 2\nu^2})\}^{1/4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

7. Для численной иллюстрации рассмотрим симметрично-слоистую пластину из эквивалентного ортотропного материала двух типов: материал (Т) с модулями Юнга $E_1 = 0.13 \cdot 10^{15}$, $E_2 = 0.975 \cdot 10^{13}$ [Н/м²], модулем сдвига $G_{12} = 0.6 \cdot 10^{13}$, коэффициентом Пуассона $\nu_{12} = 0.27$ и плотностью $\rho = 1580$ [кг/м³]; и материал (Е) с постоянными $\rho = 2000$, $E_1 = 0.45 \cdot 10^{14}$, $E_2 = 0.13 \cdot 10^{14}$, $G_{12} = 0.44 \cdot 10^{13}$, $\nu_{12} = 0.29$. Полная толщина принимается равной $H = 10^{-3}$ [м] коэффициент $d = \max(d_{11}^3, d_{22}^3)$, угол ψ между главной осью 1 и координатной осью x_1 меняется в пределах $0 < \psi < \pi/2$. Качественное поведение фазовой скорости V , параметра $\Omega(\psi)$ (фиг. 7) и характеристических корней $\lambda_k(\Omega)$ (фиг. 8, 9 для



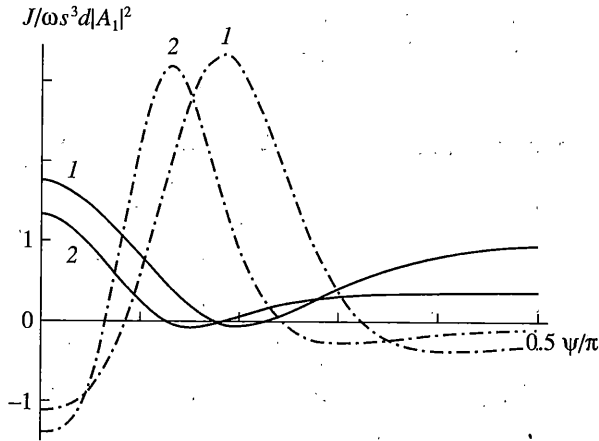
Фиг. 9

материалов (Т) и (Е); пунктиром показаны $\text{Re}\lambda_k$ аналогично рассмотренному выше несимметрично-слоистому пакету. Поведение среднего за период потока мощности и групповой скорости

$$J = -\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{2\pi} \{ \text{Re}\theta_\alpha^* \text{Re}M_{1\alpha} + \text{Re}w^* \text{Re}Q_{1z} \} dx_2$$

$$V_G \equiv \frac{d\omega}{ds} = 2s \sqrt{\frac{\Omega^4 p_{33}(0)}{\rho H}} = 2\Omega \sqrt{\frac{\omega^2 p_{33}(0)}{\rho H}}$$

обнаруживает существенное отличие. Графики нормированных значений функции $J(\psi)$ приведены на фиг. 10 (кривые 1, 2 соответствуют материалам (Т) и (Е), соответственно). При $s > 0$ фазовая и групповая скорости имеют одинаковый знак и поток мощности, казалось бы, должен быть положительным. Однако для обоих материалов можно найти критическое значение угла ориентации $\psi_* = 0.1249\pi(\text{Т}), 0.1767\pi(\text{Е})$, при котором искомая волна превращается в стоячую, а затем ($\psi > \psi_*$) меняет направление переноса энергии. Далее, при следующем критическом угле $\psi_{**} = 0.1848\pi(\text{Т}), 0.2268\pi(\text{Е})$ волна снова становится стоячей, а при $\psi > \psi_{**}$ восстанавливается положительный знак потока мощности. Этот факт является новым, присущ лишь средам с достаточно общей анизотропией ($d_{16}, d_{26} \neq 0$) и для изотропных сред и стандартно-ориентированных ортотропных сред не реализуется в принципе. Как было показано выше, его пока не удалось наблюдать и для несимметричного пакета. Вне интервала $[\psi_*, \psi_{**}]$ соответствие знаков не нарушено, тогда как для любого промежуточного значения ψ можно выделить активную кромочную зону с обратным направлением потока энергии, за счет чего и достигается перемена знака интеграла J . В частности, если рассматривать значения подынтегральной функции потока мощности в одной точке $x_2 = 0$ в зависимости от ψ , оказывается, что она меняет знак с положительного на отрицательный и обратно при значениях $\psi < \psi' < \psi_*$ и $\psi > \psi'' > \psi_{**}$. Графики нормированных значений такой функции показаны на фиг. 10 пунктиром. Внутри интервала $[\psi_*, \psi_{**}]$ именно вклад отрицательных значений вблизи кромки и определяют изменение знака J .



Фиг. 10

8. Полученный результат показывает важность адекватной формулировки принципа излучения при решении задач динамического изгиба и не противоречит классическим энергетическим соотношениям. Действительно, запишем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\partial_t e + \text{div} \mathbf{p} = 0$$

где e – плотность полной энергии, а $\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2)$, $p_\alpha \equiv \text{Re} \theta_\beta^* \text{Re} M_{\alpha\beta} + \text{Re} w^* \text{Re} Q_{\alpha z}$ – компоненты вектора плотности потока мощности. Задавая вариацию частоты $\omega = \omega_0 + i\delta\omega$ волнового числа $s = s_0 + i\delta k$ и вводя групповую скорость $V_G = \delta\omega/\delta s$, после некоторых преобразований [14] и стандартной процедуры осреднения по времени и интегрирования получаем

$$J - V_G \tilde{e} = \frac{1}{2} \partial_1 \text{Re} \{ w^* \bar{M}_{12} \} \Big|_{x_2=0}, \quad \tilde{e} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} dt \int_0^{+\infty} e dx_2$$

В итоге групповая скорость не совпадает с отношением среднего потока мощности J к средней плотности энергии $\tilde{e}$ и теорема Леонтовича – Лайтхилла в общепринятой формулировке для плоских волн не выполняется [14]. Невязка объясняется тем, что краевые условия в теории пластин ставятся не на сами напряжения, а на интегралы от них (усилия N_{2z} и моменты M_{22}). Кроме того, сами уравнения описывают внутреннее НДС, не включающее пограничный слой вблизи края, где как раз локализуется энергия кромочной волны. В простейшем случае изотропного материала поправка в краевых условиях слабо влияет на свойства такой волны [9], тогда как порядковое различие в модулях упругости $E_1/E_2 \sim 10^1 - 10^2$ делает это влияние существенным.

Таким образом, можно утверждать, что изгибные Рэлеевские волны в анизотропных средах могут обладают качественным отличием как от аналогичных волн в изотропных средах, так и от классических волн Рэлея в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния. Заметим также, что определяющим здесь является поведение изгибных жесткостей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке проекта INTAS 96-2306.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне Рэлеевского типа // Акуст. ж. 1960. Т. 6. Вып. 1. С. 124–126.
2. Зильберглейт А.С., Суслова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах // Акуст. ж. 1983. Т. 29. Вып. 2. С. 186–191.
3. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластины с кубической симметрией // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 6. С. 139–143.
4. Chadwick P., Smith G.D. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials / in: Advances in Appl. Mechanics. N.Y.: Academic Press, 1977. V. 17. P. 303–376.
5. Norris A.N. Flexural edge waves // J. of Sound and Vibration. 1994. V. 174. № 4. P. 571–573.
6. Zakharov D.D., Becker W. Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. of Sound and Vibration. 2003. V. 261. № 5. P. 805–818.
7. Thompson I., Abrahams I.D., Norris A.N. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112. P. 1756–1765.
8. Fu Y.B. Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate // Q. J. Mech. Appl. Math. 2003. V. 56. P. 605–616.
9. Zakharov D.D. Analysis of the acoustical edge flexural mode in a plate using refined asymptotics // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. P. 872–878.
10. Захаров Д.Д. Двумерные динамические уравнения тонкой несимметрично слоистой упругой пластины с анизотропией общего вида // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 5. С. 378–380.
11. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 456 с.
12. Zakharov D.D., Becker W. 2D Problems of thin asymmetric laminates // ZAMP. 2000. V. 51. № 4. P. 49–66.
13. Захаров Д.Д. Постановка краевых задач статики тонких несимметрично-слоистых анизотропных пластин и решение с помощью функций комплексной переменной // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 4. С. 615–623.
14. Захаров Д.Д. Соотношения обобщенной ортогональности для собственных функций в пространственных задачах динамики упругого слоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 62–68.

Москва

Поступила в редакцию
12.03.2003