

УДК 539.3

© 2006 г. А.П. МОЙСЕЕНОК, В.Г. ПОПОВ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВОЛНЫ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ОТСЛОИВШИМСЯ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Решена нестационарная задача о концентрации упругих напряжений в среде находящейся в состоянии антиплоской деформации вблизи тонкого жесткого отслоившегося включения. Предполагается, что в начальный момент времени на включение воздействует нестационарная волна продольного сдвига. Предлагаемый метод решения заключается в применении по времени интегрального преобразования Лапласа и представлении в пространстве изображений перемещения разрывным решением соответствующего дифференциального уравнения. Это позволило свести исходную задачу к системе двух сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных скачков перемещений и напряжений. Оригиналы по найденным изображениям восстанавливаются численно методом Папулиса с использованием регуляризации по Тихонову и методами, основанными на замене интеграла Меллина рядом Фурье.

Концентрация напряжений в упругих телах, приводящая к их разрушению, возникает не только при наличии в них трещин, но и тонких жестких включений. Известно также, что наиболее сильную концентрацию напряжений вызывают отслоившиеся включения [1]. Под ними понимаются включения, одна из сторон которых полностью сцеплена с внешней средой, а другая со средой не взаимодействует, т.е. отслоилась.

Целью настоящей работы является решение задачи динамической теории упругости о взаимодействии нестационарной волны продольного сдвига с тонким жестким отслоившимся включением в виде пластины, находящимся в условиях антиплоской деформации. Ранее такая задача рассматривалась только в статической постановке [1] или для случая гармонических колебаний [2].

Рассмотрим неограниченную упругую среду, находящуюся в условиях антиплоской деформации. Будем предполагать, что в этой среде расположено тонкое, абсолютно жесткое полосовое включение, занимающее в плоскости Oxy отрезок $y = 0, |x| \leq a$. Под отслоившимся включением подразумеваем включение, одна сторона которого ($y = -0$) полностью сцеплена со средой, а другая ($y = +0$) со средой не взаимодействует. Пусть в момент времени $t = 0$ на включение воздействует нестационарная волна продольного сдвига, которая вызывает в среде перемещение вдоль оси Oz равное

$$W_0 = A_0(ct - (x + a)\cos\theta_0 - y\sin\theta_0)H(ct - (x + a)\cos\theta_0 - y\sin\theta_0) \quad (1)$$

Тогда единственная отличная от 0 z -компонента вектора перемещений удовлетворяет волновому уравнению и нулевым начальным условиям:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad W(x, y, 0) = W_0(x, y, 0) \quad (2)$$

$$W(x, y, 0) = W_0(x, y, 0), \quad c_2^2 = \rho/G$$

где ρ – плотность среды, G – модуль сдвига.

Как известно, на отрезке расположения отслоившегося включения [1] терпят разрыв перемещение w и напряжения τ_{yz} . Введем для их скачков следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \langle w \rangle &= w(x, +0, t) - w(x, -0, t) = \chi_2(x, t) \\ \langle \tau_{yz} \rangle &= G \frac{\partial w}{\partial y}(x, +0, t) - G \frac{\partial w}{\partial y}(x, -0, t) = \chi_1(x, t) \end{aligned} \quad (3)$$

Кроме того, на сцепленной и отслоившейся сторонах включения выполняются условия

$$w(x, -0, t) = d(t), \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y}(x, +0, t) = 0, \quad -a \leq x \leq a \quad (4)$$

где $d(t)$ – неизвестная амплитуда колебаний включения, происходящих под действием падающей волны. Она находится из уравнения движения включения

$$m \ddot{d}(t) = R(t), \quad d(0) = \dot{d}(0) = 0, \quad R(t) = \int_{-a}^a \chi_1(x, t) dx \quad (5)$$

Представим перемещения среды в виде

$$w = w_0 + w_1 \quad (6)$$

где w_1 – перемещения, вызванные волнами, отраженными от включения. Функция w_1 удовлетворяет волновому уравнению (2) и нулевым начальным условиям. После приме-

нения интегрального преобразования Лапласа по времени $F(x, y, p) = \int_0^{\infty} f(x, y, t) e^{-pt} dt$ и учета (6) равенства (2)–(5) в пространстве изображений запишутся в виде

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} - \frac{p^2}{c_2^2} W_1 = 0 \quad (7)$$

$$T_{yz}^1(x, +0, p) - T_{yz}^1(x, -0, p) = X_1(x, p) \quad (8)$$

$$W_1(x, +0, p) - W_1(x, -0, p) = X_2(x, p)$$

$$W_1(x, -0, p) = D(p) - W_0(x, 0, p), \quad T_{yz}^1(x, +0, p) = G \frac{\partial W_1}{\partial y}(x, +0, p) = -T_{yz}^0(x, +0, p) \quad (9)$$

$$-a \leq x \leq a$$

$$W_0 = A_0 c_2 e^{\left(\frac{-p}{c_2} [(x+a) \cos \theta_0 + y \sin \theta_0] \right)} / p^2 \quad (10)$$

$$m p^2 D(p) = S(p) + \int_{-a}^{+a} X_1(x, p) dx$$

Представим W_1 разрывным решением уравнения (7), имеющим скачки (8). Для этого в разрывном решении уравнения Гельмгольца построенного в [2] положим $\kappa_2 = ip/c_2$. В результате получим

$$W_1 = \int_{-a}^a \frac{X_1(\eta, p)}{G} K(\eta - x, y) + \int_{-a}^a \frac{X_2(\eta, p)}{G} \frac{\partial}{\partial y} K(\eta - x, y) d\eta \quad (11)$$

$$T_{yz}^1 = \int_{-a}^a X_1(\eta, p) \frac{\partial}{\partial y} K(\eta - x, y) d\eta + G \int_{-a}^a X_2(\eta, p) \frac{\partial^2}{\partial y^2} K(\eta - x, y) d\eta$$

$$K(\eta, -x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha(\eta-x)} e^{-g|y|}}{2g} d\alpha, \quad g = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p^2}{c_2^2}}$$

Для определения неизвестных скачков, входящих в (11), получим систему интегральных уравнений. С этой целью первое равенство (9) заменим продифференцированным и условием эквивалентности продифференцированного первоначальному

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial x}(x, -0, p) &= -\frac{\partial W_0}{\partial x}(x, -0, p) \\ W_1(-a, -0, p) &= D - W_0(x, -0, p) \end{aligned} \quad (12)$$

После подстановки в первое равенство (12) и второе равенство (9) перемещения и напряжений (11) придем к системе двух интегральных уравнений

$$\begin{aligned} X_1(x, p) + \frac{G}{\pi} \int_{-a}^a \frac{X_2'(\eta, p)}{G} \frac{p}{c_2} K_1\left(\frac{p}{c_2}(\eta - x)\right) d\eta + \\ + \frac{G}{\pi} \int_{-a}^a X_2'(\eta, p) R_0\left(\frac{p}{c_2}(\eta - x)\right) d\eta = -\frac{T_{yz}^0(x, 0, p)}{G} \end{aligned} \quad (13)$$

$$X_2'(\eta, p) + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{X_1(\eta, p)}{G} \frac{p}{c_2} K_1\left(\frac{p}{c_2}(\eta - x)\right) d\eta = 2 \frac{\partial W_0}{\partial x}(x, 0, p)$$

К этой системе добавим равенство, следующее из условия эквивалентности (12), после подстановки туда перемещения (11):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{X_1(\eta, p)}{G} K_0\left(\frac{p}{c_2}(\eta + a)\right) d\eta = 2W_0(x, 0, p) \quad (14)$$

При выводе (13) и (14) были использованы следующие равенства

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} K = \frac{p^2}{c_2^2} K - \frac{\partial^2}{\partial x^2} K, \quad \frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{\partial K}{\partial \eta}$$

а в интегралах из (11), содержащих $X_2(\eta, p)$, было выполнено интегрирование по частям. Так же были применены формулы [3, 4]:

$$K(z, \pm 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha z}{g} d\alpha = -\frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{p}{c_2}|z|\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} K(\eta - x, \pm 0) = -\frac{1}{2\pi c_2} K_1\left(\frac{p}{c_2}(\eta - x)\right), \quad \frac{\partial K}{\partial y}(z, \pm 0) = \pm \frac{\delta(z)}{2}$$

$$R_0\left(\frac{pz}{c_2}\right) = 2\frac{p}{c_2}\left(-\ln\left|\frac{pz}{2c_2}\right|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\frac{pz}{2c_2}\right)^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\frac{pz}{2c_2}\right)^{2k+1}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{(k!)^2(2k+1)}, \quad b_k = a_k\left[-C + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \frac{1}{2k+1}\right]$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, $K_0(z)$, $K_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя. Кроме (14) к системе (13) необходимо добавить равенство

$$\int_{-a}^a X_2'(\eta, p) d\eta = 0 \tag{15}$$

следующее из того, что по физическим соображениям $X_2(\pm a) = 0$, а также уравнение (10). Введем новые обозначения

$$\eta = az, \quad x = a\zeta, \quad t = \frac{a}{c_2}\tau, \quad p = \frac{c_2}{a}q, \quad \Phi_1(z, \tau) = \frac{\chi_1(az, a\tau/c)}{G}$$

$$\Phi_2(z, \tau) = \chi_2\left(az, \frac{a}{c_2}\tau\right), \quad X_2'\left(az, \frac{c_2q}{a}\right) = \frac{a}{c_2}\Phi_2'(z, q)G \tag{16}$$

$$X_1\left(az, \frac{c_2q}{a}\right) = \frac{a}{c_2}\Phi_1(z, q)G$$

После этого система (13) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z, q) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_2(z, q)}{z-\zeta} dz + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(z, q) R_1(q(z-\zeta)) dz + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_2(z, q) R_0(q(z-\zeta)) dz = r_1(\zeta) \end{aligned} \tag{17}$$

$$\Phi_2(z, q) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_1(z, q)}{z-\zeta} dz + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Phi_1(z, q) R_1(q(z-\zeta)) dz = r_2(\zeta)$$

$$r_1(\zeta) = \frac{2A_0}{q} \sin\theta_0 \exp(-q(\zeta+1)\cos\theta_0), \quad r_2(\zeta) = \frac{2A_0}{q} \cos\theta_0 \exp(-q(\zeta+1)\cos\theta_0)$$

Функция $R_1(x)$, входящая в последнюю систему, определяется разложением функции $K_1(x)$ в степенной ряд [3], в соответствии с которым $qK_1(x) = 1/x + R_1(x)$. Для последующего численного решения полученной системы интегральных уравнений введем новые неизвестные функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(z, q) &= 1/2(g_1(z, q) + g_2(z, q)) \\ \Phi_2(z, q) &= 1/2(g_1(z, q) - g_2(z, q)) \end{aligned} \tag{18}$$

После сложения и вычитания уравнений системы (17) и подстановки в них (18) найдем

$$g_i(\zeta, q) + \frac{(-1)^{i+1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_i(z, q)}{z - \zeta} dz + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^2 \int_{-1}^1 g_l(z, q) H_{il}(q(z - \zeta)) dz = f_i(\zeta) \quad (i = 1, 2) \quad (19)$$

$$-1 \leq \zeta \leq 1, \quad f_1(\zeta) = r_1(\zeta) + r_2(\zeta), \quad f_2(\zeta) = r_1(\zeta) - r_2(\zeta)$$

Для однозначной разрешимости системы (19) к ней необходимо добавить еще три уравнения следующих из (10), (14), (15), после перехода к обозначениям (16), (18):

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^2 \int_{-1}^1 g_l(z, q) (-\ln(1+z) + F_0(q(z+1))) dz = D_0(q) - f_0(q)$$

$$D_0(q) = \frac{1}{4\epsilon q^2} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 g_1(z, q) dz + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g_2(z, q) dz \right) \quad (20)$$

$$\int_{-1}^1 g_1(z, q) dz - \int_{-1}^1 g_2(z, q) dz = 0$$

$$f_0 = \frac{2A_0}{q^2}, \quad D_0(q) = D \left(\frac{c_2 q}{a} \right) \frac{c}{a^2}$$

Решение системы (19), интегрируемое при $\zeta \in [-1, 1]$, будем искать в виде [5]:

$$g_l(\zeta) = (1 - \zeta)^{\alpha_l} (1 + \zeta)^{\beta_l} \Psi_l(\zeta, q), \quad \alpha_1 = \beta_2 = -1/4, \quad \beta_1 = \alpha_2 = -3/4 \quad (21)$$

Относительно функций $\Psi_l(\zeta, q)$ ($l = 1, 2$) предполагаем, что они удовлетворяют условию Гельдера при $\zeta \in [-1, 1]$, и приблизим их интерполяционными многочленами [5]:

$$\Psi_l(\zeta, q) = \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_l(z_{lk}, q) P_n^{\alpha_l, \beta_l}(\zeta)}{(\zeta - z_{lk}) [P_n^{\alpha_l, \beta_l}(z_{lk})]'} \quad (22)$$

где z_{lk} – корни многочлена Якоби $P_n^{\alpha_l, \beta_l}(\zeta)$ ($l = 1, 2$).

Решим задачу о приближенном определении значений функции $\Psi_l(z_{lk}, q)$ в узлах интерполяции из системы (20). Для этого рассмотрим сингулярные интегральные операторы:

$$S_l[g_l] = g_l(\zeta) + \frac{(-1)^{l+1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g_l(z)}{z - \zeta} dz \quad (l = 1, 2)$$

Для них справедливы квадратурные формулы [5]

$$S_l[g_l(\zeta_{lk})] = \frac{(-1)^{l+1}}{\pi} \sum_{m=1}^n A_m^{(l)} \frac{\Psi_l(z_{lm}, q)}{z_{lm} - \zeta_{lj}}, \quad A_m^{(l)} = \frac{\pi P_{n-1}^{-\alpha_l, -\beta_l}(z_{lk})}{\sqrt{2} [P_n^{\alpha_l, \beta_l}(z_{lk})]'} \quad (23)$$

где ζ_{lj} – корни многочлена $P_{n-1}^{-\alpha_l, -\beta_l}(\zeta)$, ($j = 1, 2, \dots, n-1, l = 1, 2$).

Чтобы получить аналогичные формулы для интегралов, имеющих логарифмическую особенность

$$E_l(\zeta) = \int_{-1}^1 \ln|z - \zeta| g_l(z) dz \quad (l = 1, 2) \quad (24)$$

воспользуемся тождеством Дарбу – Кристоффеля [6] для многочленов Якоби

$$\frac{P_n^{\alpha, \beta}(z)}{(z - z_{lk})} = \frac{\sigma_n^l a_{n+1}^l}{a_n^l P_{n+1}^{\alpha, \beta}(z_{lk})} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m^{\alpha, \beta}(z_{lk}) P_m^{\alpha, \beta}(z)}{(\sigma_m^l)^2}$$

$$a_n^l = \frac{\Gamma(\alpha_l + \beta_l + 2n + 1)}{2^n n! \Gamma(\alpha_l + \beta_l + n + 1)}$$

$$(\sigma_m^l)^2 = \frac{2^{\alpha_l + \beta_l + 1} \Gamma(\alpha_l + n + 1) \Gamma(\beta_l + n + 1)}{(\alpha_l + \beta_l + 2n + 1) n! \Gamma(\alpha_l + \beta_l + n + 1)}$$

С помощью (21), (22), (23) интеграл (24) преобразуем к виду

$$E_l(\zeta) = \sum_{k=1}^n \psi_l(z_{lk}, q) A_k^{(l)} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m^{\alpha, \beta}(z_{lk})}{(\sigma_m^l)^2} \times \int_{-1}^1 \ln|z - \zeta| (1 - \zeta)^{\alpha_l} (1 + \zeta)^{\beta_l} P_m^{\alpha, \beta}(z) dz \quad (l = 1, 2) \quad (25)$$

Интегралы, входящие в (25), найдем с помощью формул приведенных в [1]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \ln|\zeta - z| (1 - z)^\alpha (1 + z)^\beta dz &= \ln 2 B(1 + \alpha, 1 + \beta) + \\ &+ \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi \alpha}{1 + \alpha} \left(\frac{1 - \zeta}{2}\right)^{1 + \alpha} F\left(-\beta, 1 + \alpha, 2 + \alpha, \frac{1 - \zeta}{2}\right) \\ \int_{-1}^1 \ln|z - \zeta| (1 - z)^\alpha (1 + z)^\beta P_m^{\alpha, \beta}(z) dz &= \\ &= -2^{1 + \alpha + \beta} \frac{\Gamma(\alpha + m + 1) \Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(2 + \alpha + \beta + m) m} F\left(m, -1 - \alpha - \beta - m, -\alpha, \frac{1 - \zeta}{2}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(\alpha + m + 1) \pi \operatorname{ctg} \pi \alpha}{\Gamma(2 + \alpha) m!} \left(\frac{1 - \zeta}{2}\right)^{1 + \alpha} F\left(-\beta - m, 1 + \alpha + m, 2 + \alpha, \frac{1 - \zeta}{2}\right) 2^{1 + \alpha + \beta} \end{aligned}$$

Подставив найденные интегралы в (25) и взяв $\zeta = -1$, получим следующие формулы для интегралов с логарифмической особенностью из первого равенства (20):

$$\int_{-1}^1 \ln(1 + z) g_l(z) dz = \sum_{k=1}^n A_k^{(l)} \psi_l(z_{kb}, q) D_k^{(l)} \quad (26)$$

$$D_k^{(l)} = 2 \ln 2 + (-1)^l 2\pi + 2(\psi(1 + \alpha_l) - C) - 2 \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^m \frac{P_m^{\alpha, \beta}(z_{lk}) m!}{m(-\alpha_l)_m}$$

где C – постоянная Эйлера.

Заменим в (19), (20) сингулярные интегралы суммами по формулам (23), (26), а регулярированные с помощью квадратурных формул Гаусса – Якоби [6]. В результате (19) и (20) заменяются следующей системой линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестных функций в узлах интерполяции

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{l+1}}{\pi} \sum_{k=1}^n A_k^{(l)} \frac{\Psi_l(z_{lk}, q)}{z_{lk} - \zeta_{lj}} + \frac{1}{\pi} \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n A_k^{(l)} \Psi_l(z_{lk}, q) H_{1l}(q(z_{lk} - \zeta_{1j})) &= f_l(\zeta_j) \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^n A_k^{(l)} \Psi_l(z_{lk}, q) \left(D_k^{(l)} + F_0(q(z_{lk} + 1)) - \frac{\pi}{2\epsilon q^2} \right) &= D_0(q) \\ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} \Psi_1(z_{1k}, q) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} \Psi_2(z_{2k}, q) &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

$$D_0(q) = \frac{1}{4\epsilon q^2} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^{(1)} \Psi_1(z_{1k}, q) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k^{(2)} \Psi_2(z_{2k}, q) \right)$$

После решения системы (27) приближенные значения неизвестных функций могут быть найдены по формулам (21), (22). Величиной, характеризующей концентрацию упругих напряжений вблизи включения, как и в работе [7], будем считать коэффициенты при особенности скачка напряжений $K^\pm(t) = \lim_{x \rightarrow \pm a \mp 0} \chi_1(x, t)(\alpha \mp x)^{3/4}$. В дальнейшем их

будем называть коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) для включения. Если воспользоваться обозначениями (16), то можно ввести безразмерные КИН по формулам

$$k_0^\pm(t) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm 1 \mp 0} (1 - \zeta)^{3/4} \Phi_1(\zeta, \tau), \quad k_0^\pm(t) = a^{-3/4} G^{-1} K^\pm\left(\frac{a}{c_2} t\right) \tag{28}$$

Формулы (28) перепишем для изображений по Лапласу

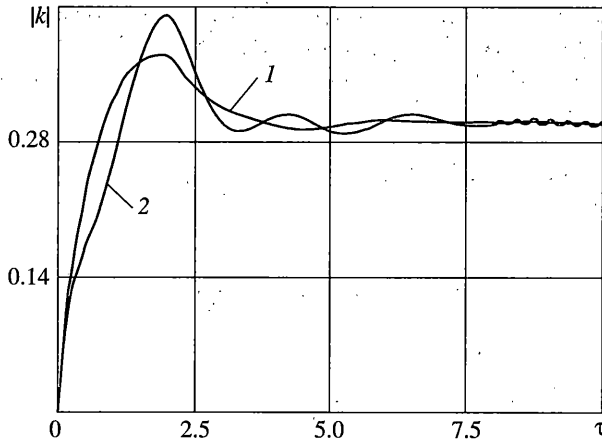
$$K_0^\pm(q) = \lim_{\zeta \rightarrow \pm 1 \mp 0} (1 \mp \zeta)^{3/4} \Phi_1(\zeta, q)$$

После подстановки в последнюю формулу (18), (21), (22) и выполнения предельного перехода окончательно найдем

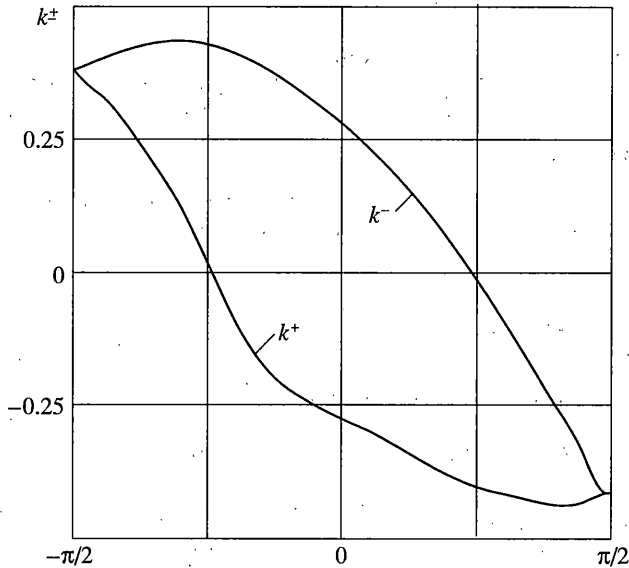
$$\begin{aligned} K_0^+(q) &= 2^{-5/4} \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_2(z_{2k}, q) P_n^{\alpha_2, \beta_2}(1)}{(1 - z_{2k}) [P_n^{-3/4, -1/4}(z_{2k})]'} \\ K_0^-(q) &= 2^{-5/4} \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_1(z_{1k}, q) P_n^{\alpha_1, \beta_1}(-1)}{(1 - z_{1k}) [P_n^{-1/4, -3/4}(z_{1k})]'} \end{aligned} \tag{29}$$

Формулы (29) и последнее уравнение (27), зная решение системы (27), позволяют находить изображения КИН и амплитуды колебаний включения.

В качестве примера было рассмотрено взаимодействие включения с волной продольного сдвига (1) с фронтом параллельным включению ($\theta_0 = 90^\circ$ или $\theta_0 = -90^\circ$). В этом случае напряженное состояние симметрично относительно оси Oy , поэтому $k_0^+(\tau) = k_0^-(\tau) = k(\tau)$. При $\theta_0 = 90^\circ$ волна набегаёт со сцепленной стороны, а при $\theta_0 = -90^\circ$ со стороны



Фиг. 1



Фиг. 2

отслоения. При численном восстановлении оригиналов наилучшие результаты получены методом Папулиса в сочетании с регуляризацией по Тихонову [8] и методом, основанным на замене интеграла Меллина рядом Фурье [9, 10]. Первый метод оказался более эффективным при малых значениях безразмерного времени, а второй при средних и больших. Результаты численного исследования представлены ниже на рисунках в виде графиков.

На фиг. 1 показано изменение абсолютной величины КИН с течением времени. Кривая 1 соответствует углу распространения $\theta_0 = 90^\circ$, а кривая 2 – $\theta_0 = -90^\circ$. На обеих кривых имеется максимум при $\tau \approx 2$, причем во втором случае максимальное значение КИН больше чем в первом. После прохождения максимума КИН убывают и после затухающих колебаний совпадают со статическим значением.

Кривые на фиг. 2 показывают изменения КИН в зависимости от угла распространения при $\tau = 2$. С учетом симметрии относительно оси Oy можно сделать вывод, что наибольшее значение КИН принимает при $(\theta_0 = 45^\circ)$. Наименьшее значение КИН наблюдается при $(\theta_0 = 90^\circ)$, т.е. при падении волны на сцепленную сторону с фронтом параллельным включению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрывов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.
2. Попов В.Г. Исследование колебательных напряжений при дифракции упругих волн сдвига на тонком отслоившемся включении // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 139–146.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегральных сумм рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 256 с.
6. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
7. Александров В.Н., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
8. Айтилиев Ш.М., Алексеев Л.А., Дильдабаев Ш.А., Жандарбаев Н.Б. Метод граничных интегральных уравнений в задачах динамики упругих многосвязных тел. Алма-Ата: Гылым, 1992. 228 с.
9. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк. 1975. 407 с.
10. Davies B., Martin B. Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods // J. Comput. Phys. 1979. V. 33. № 1. P. 1–32.

Одесса

Поступила в редакцию
2.07.2004