

УДК 534.11

© 2006 г. Л.Л. СОНГ, Д.В. ЮРЧЕНКО

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ С НЕУПРУГИМ УДАРОМ

Виброударные системы представляют особый интерес для изучения. Это связано с тем, что даже когда поведение системы линейно между ударами, условие удара делает систему сильно нелинейной. Все виброударные системы можно разделить на два вида: системы с односторонним или двухсторонним ограничением. В случае одностороннего ограничения, расстояние от положения равновесия системы до ограничителя Δ может быть меньше нуля (натяг), равно нулю или больше нуля (зазор) [1], тогда как во втором случае Δ может быть симметричным или несимметричным.

Виброударные системы с детерминированным возбуждением хорошо изучены и подробно описаны в ряде книг [1–4]. Системы с упругим ударом можно исследовать с помощью метода предложенного в [5, 6], который преобразует ударную систему в неударную. Однако этот метод успешно работает в тех случаях, когда движение системы между ударами линейно или имеет полиномиальную нелинейность. В тех случаях когда удар неупругий, обычно условие удара вводится в правую часть уравнения в виде дельта-функции Дирака с множителем, выражающим величину импульса, и задача решается методом усреднения.

Описание стохастических виброударных систем может быть найдено в [7]. Стохастические системы с линейным поведением между ударами, упругим ударом и односторонним ограничением, находящимся в положении равновесия системы ($\Delta = 0$), хорошо изучены. Точные выражения для плотности вероятности и спектральной плотности [8] таких систем найдены с помощью преобразования предложенного в [5, 6]. В остальных случаях, подобно детерминированным системам, условие удара вводится в правую часть уравнения в виде дельта-функции Дирака с соответствующим коэффициентом усреднения, и решается приближенно методом квази-консервативного усреднения, предложенным в [9]. Метод статистической линеаризации для виброударных стохастических систем подробно описан в [1].

Однако упомянутые выше приближенные методы позволяют изучать колебания виброударных систем только при значениях коэффициента восстановления близких к единице, т.е. $(1 - r) \ll 1$. Таким образом, представляется невозможным оценить реакцию виброударной системы при других, более низких значениях коэффициента восстановления.

Новый метод баланса энергии для систем с доминирующими потерями при ударах, т.е. систем с пренебрежимо малым трением был недавно предложен в работах [10, 11]. Такие системы были названы кусочно-консервативными системами, т.е. системами где потери энергии происходят только в определенные, дискретные моменты времени, неизвестные заранее и определяемые только положением и/или скоростью системы. Виброударные системы с доминирующими потерями при ударе являются характерным представителем класса кусочно-консервативных систем. Идея метода в при-

менении к виброударным системам заключается в рассмотрении поведения энергии системы между ударами и балансе энергии до и после удара. Важно заметить, что предложенный метод не требует малости изменения энергии системы за период, как это требует метод квази-консервативного усреднения. Следовательно, можно предположить, что предложенный метод должен давать лучшую оценку для средней энергии системы чем метод квази-консервативного усреднения.

Основной целью данной работы является получение аналитических оценок для средней энергии стохастических виброударных систем с неупругим ударом. Для этого в работе приводятся выкладки позволяющие расширить область применения метода баланса энергий для стохастических виброударных систем с натягом, зазором и двухсторонним ударом. Также в работе проводится сравнение результатов с приближенными результатами, полученными методом квази-консервативного усреднения и результатами численного моделирования. В работе приведены результаты численного моделирования виброударной системы с двумя степенями свободы.

1. Виброударные системы с нулевым зазором. 1.1 Метод баланса энергии. Рассмотрим виброударную систему под действием гауссовского белого шума с потерями при ударе

$$\begin{aligned} \dot{y} + f(y) &= \xi(t), \quad y > 0, \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = D\delta(\tau) \\ \dot{y}_+ &= -ry_-, \quad y = 0; \quad 0 < r < 1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где r – коэффициент восстановления, \dot{y}_- , \dot{y}_+ – скорость системы до и после удара, $f(y)$ – нелинейная, нечетная функция перемещения, а угловые скобки обозначают операцию усреднения. Записывая уравнение (1.1) в стандартной форме, изменение полной энергии между двумя последующими ударами можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \quad \dot{y}_2 = -f(y_1) + \xi(t) \\ \dot{\bar{E}}(t) &= y_2 \xi(t) \Rightarrow \dot{\bar{E}}(t) = D/2 \Rightarrow \bar{E}(t) = Dt/2 + \bar{E}(0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где черта обозначает среднее, а $D/2$ – коэффициент сноса, появляющийся в результате перехода от уравнения в смысле Стратоновича к уравнению в смысле Ито [12, 13]. Из уравнения (1.2) видно, что энергия в системе между ударами возрастает линейно.

Рассмотрим эволюцию энергии начиная с момента времени сразу же после предыдущего удара до такого же момента после следующего удара. Тогда

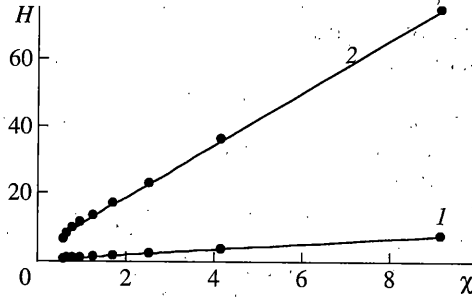
$$\begin{aligned} \bar{E}(t_-) &= Dt_-/2 + \bar{E}(0) \\ \bar{E}(t_+) &= r^2 \bar{E}(t_-) = r^2 (Dt_-/2 + \bar{E}(0)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Следует заметить, что при стационарном режиме значения средней энергии на последующем и предыдущем циклах равны, а следовательно

$$\langle \bar{E}(t_+) \rangle = \langle \bar{E}(0) \rangle = \frac{r^2}{1-r^2} \frac{D \langle t_- \rangle}{2} = \frac{r^2}{1-r^2} \frac{DT}{2} \quad (1.4)$$

где T – среднее время системы находящейся между двумя последующими ударами. Подставляя это выражение в последнее уравнение в (1.2) и усредняя за период, выражение для средней энергии системы будет

$$\langle \bar{E}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{E}(t) dt = \frac{DT}{4} + \frac{r^2}{1-r^2} \frac{DT}{2} = \frac{DT}{4} \chi, \quad \chi = \frac{1+r^2}{1-r^2} \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Полученное выражение является точным, хотя и зависит от T , которое должно быть найдено из решения задачи о достижении заданных границ. Очевидно, что для случая нелинейной восстанавливающей силы T будет нелинейной функцией средней энергии системы. Однако в случае линейного поведения системы между ударами T в первом приближении является константой равной π/Ω , что хорошо известно для консервативных виброударных систем [1, 2, 7].

1.2. Анализ результатов и эквивалентная линейная система. Полученное аналитическое выражение достаточно точно предсказывает значения средней энергии системы вплоть до значений $r = 0.1$ и больших значений D , что хорошо видно на фиг. 1. Сплошные линии 1, 2 соответствуют аналитическому решению (1.5) для значений интенсивности шума $D = 1$ и $D = 10$ соответственно, а точки представляют результаты численного моделирования. Из фиг. 1 видно, что средняя энергия системы зависит линейно от коэффициента χ , который может быть назван коэффициентом ударных энергетических потерь. Сравнивая значение средней энергии (1.5) со значением средней энергии линейной системы $\langle E_{lin} \rangle = D/(4\alpha)$, можно получить следующее значение эквивалентного коэффициента трения [10], которое впоследствии будем называть эквивалентным ударным трением:

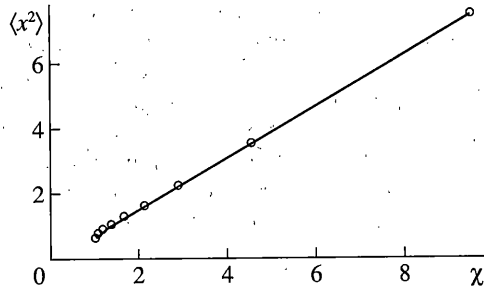
$$\alpha_{eq} = \frac{1 - r^2 \Omega}{1 + r^2 \pi} = \frac{\Omega}{\chi \pi} \quad (1.6)$$

Это позволяет заменить ударную систему на неударную линейную и получить некоторые необходимые моментные характеристики процесса. Среднеквадратичное перемещение системы может быть записано как

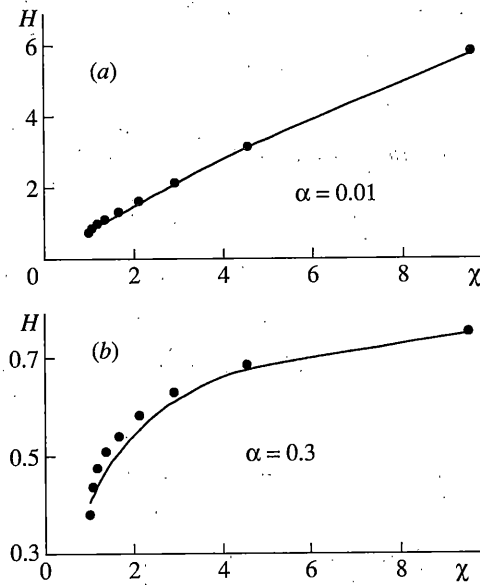
$$\langle x^2 \rangle = \frac{D}{4\alpha_{eq} \Omega^2} = \frac{1 + r^2 D \pi}{1 - r^2 4 \Omega^3} \quad (1.7)$$

На фиг. 2 сравниваются результаты среднеквадратичного перемещения, полученного путем численного моделирования (точки) виброударной системы с выражением (1.7), представленного сплошной линией для $D = 1$. Результаты хорошо согласуются даже при малых значениях коэффициента восстановления.

Интерес также представляет изучение влияния вязкого трения на среднее значение энергии виброударной системы. В связи с тем, что предложенный метод баланса энергии не позволяет найти простое выражение для средней энергии системы с линейным трением, воспользуемся результатом, полученным для эквивалентной линейной системы. Из физических соображений ясно, что диссипация в системе благодаря вязкому трению и ударному трению (1.6) дают общую диссипацию в системе. Следовательно, сред-



Фиг. 2



Фиг. 3

няя энергия ударной линейной системы с вязким трением и потерями при ударе может быть записана в виде:

$$\langle E_{lin} \rangle = \frac{D}{4(\alpha + \alpha_{eq})} \quad (1.8)$$

На фиг. 3 *a, b* представлены результаты численного моделирования виброударной системы с $\alpha < \alpha_{eq}$ и $\alpha \approx \alpha_{eq}$ соответственно. Аналитический результат (1.8) на фиг. 3 *a* сравнивается с результатом численного моделирования, указанного точками для $D = 1$. Очевидно, что малое вязкое трение не сильно влияет на окончательный результат для средней энергии. На фиг. 3 *b* приводятся сравнение результатов численного моделирования (точки) с результатом (1.8) для значения коэффициента линейного трения близкого к коэффициенту эквивалентного ударного трения и $D = 1$. Видно, что предложенный метод достаточно точно предсказывает значение средней энергии и в этом случае. Разумеется, что при наличии значительного вязкого трения, средняя энергия системы не является линейной функцией χ .

Таким образом, стохастическая виброударная система с неупругим ударом и $\Delta = 0$ может быть с высокой степенью точности проанализирована с помощью метода баланса энергии или линейной эквивалентной системы. Более того, частотные характеристики системы (например, спектральная плотность) могут быть изучены путем замены виброударной системы с неупругим ударом на виброударную систему с упругим ударом ($r = 1$) и эквивалентным ударным трением при помощи решения, полученного в [8].

1.3. Сравнение с результатами квази-консервативного усреднения. Рассмотрим систему, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) + f(x) = \xi(t) \quad (1.9)$$

Согласно методу квази-консервативного усреднения введем новую, медленную переменную – энергию системы $E = \dot{x}^2/2 + U(x)$. Тогда стохастическое уравнение относительно этой переменной можно записать в виде [7]:

$$\dot{E} = -Q(E)/T(E) + D/2 + \sqrt{DS(E)/T(E)}\xi(t)$$

$$Q(E) = \int_{x_-}^{x_+} g(x, \sqrt{2E - 2U(x)})dx, \quad S(E) = \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{2E - 2U(x)}dx \quad (1.10)$$

$$T(E) = \int_{x_-}^{x_+} \frac{1}{\sqrt{2E - 2U(x)}}dx, \quad U(x) = \int_0^x f(x')dx'; \quad U(x_{\pm}) = E$$

Плотность вероятности энергии может быть найдена через выше найденные коэффициенты в следующем виде

$$p(E) = CT(E)e^{\Gamma(E)}, \quad \Gamma(E) = -2 \int_0^E \frac{Q(E')dE'}{DS(E')} \quad (1.11)$$

Рассмотрим случай нулевого зазора и согласно методу квази-консервативного усреднения внесем условие удара в правую часть уравнения движения системы в виде дельта-функции Дирака. Таким образом, предполагая, что потери при ударе пропорциональны малому параметру $(1 - r)$ уравнение (1.1) в форме (1.9), с помощью преобразования предложенного в [5, 6] можно записать в следующем виде:

$$\ddot{x} + f(x) = -\dot{x}|\dot{x}|(1 - r)\delta(x) + \xi(t)\text{sign}(x); \quad (1 - r) \ll 1 \quad (1.12)$$

Тогда, плотность вероятности энергии системы (1.12), а также среднюю энергию системы можно записать как

$$T(E) = \pi/\Omega, \quad S(E) = ET(E); \quad Q(E) = (1 - r)E$$

$$p(E) = ae^{-aE}, \quad a = \frac{4\Omega(1 - r)}{D\pi}, \quad \langle E \rangle = \int_0^{\infty} Ep(E)dE = \frac{D\pi}{4\Omega} \frac{1}{1 - r} \quad (1.13)$$

Интересно сравнить результаты для средней энергии, полученные двумя различными способами (2.5) и (2.13). При малых $(1 - r)$ результаты совпадают

$$\langle E_{EB} \rangle = \frac{D\pi}{4\Omega} \frac{1 + r^2}{1 - r^2} \Big|_{r \rightarrow 1} = \frac{D\pi}{4\Omega} \frac{1}{1 - r} \quad (1.14)$$

Таким образом, если в уравнении (1.12) коэффициент потерь был бы пропорционален χ , а не $(1 - r)$, метод квази-консервативного усреднения мог бы достаточно точно предсказать среднее значение энергии системы на всем интервале значений коэффициента восстановления. Однако следует заметить, что аналитическое выражение для средней энергии системы методом квази-консервативного усреднения можно получить в замкнутом виде аналитически только для виброударных систем с нулевым зазором. Именно поэтому, предложенный метод баланса энергии выгодно отличается от метода квази-консервативного усреднения.

2. Виброударные системы с ненулевым зазором. Рассмотрим виброударную систему с ненулевым зазором, линейную между ударами

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \Omega^2 y &= \xi(t); \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau) \\ \dot{y}_+ &= -r\dot{y}_-, \quad y = \pm h; \quad 0 < r < 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Поведение системы между ударами остается таким же, как и в предыдущем случае. Следуя методу энергетического баланса, посчитаем энергетические потери в системе за один период. Начиная новый цикл сразу же после удара запишем изменение энергии как

$$\begin{aligned} E(t_-) &= Dt_-/2 + E(0), \quad E^* = h^2\Omega^2/2 \\ E(t_+) &= r^2E(t_-) + (1 - r^2)E^* = r^2\frac{Dt_-}{2} + r^2E(0) + (1 - r^2)E^* \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь предполагается, что удары происходят на каждом цикле, т.е. $E \gg E^*$. Снова предполагая, что процесс стационарен, среднее значение энергии в начале каждого цикла, а также средняя энергия системы могут быть записаны в виде [11]

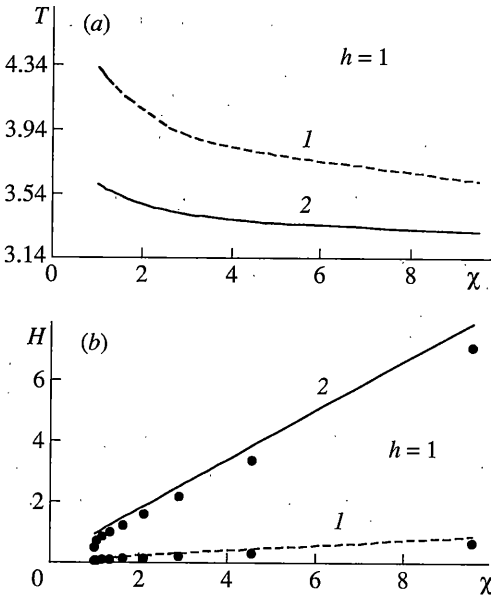
$$\begin{aligned} \langle E(t_+) \rangle &= \langle E(0) \rangle = \frac{r^2}{(1 - r^2)} \frac{DT_h}{2} + E^*, \quad \langle t_- \rangle = T_h \\ \langle E(t) \rangle &= \frac{1}{T_h} \int_0^{T_h} \frac{Dt}{2} dt + \langle E(0) \rangle = \frac{DT_h}{4} \chi + E^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

Очевидно, что в этом случае, время между ударами T будет являться функцией энергии системы. В первом приближении это время можно записать как

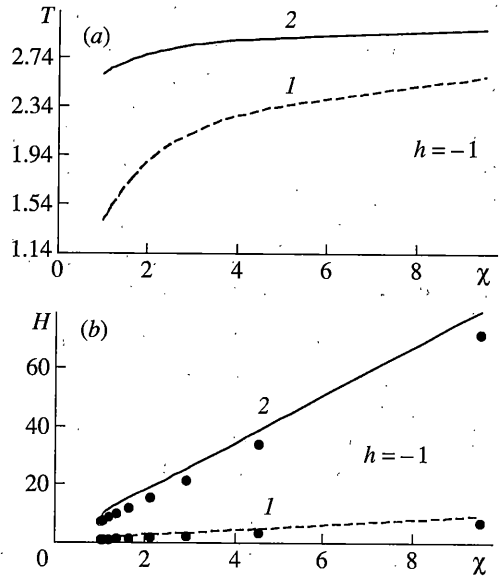
$$T_h = \frac{\pi}{\Omega} + \frac{2}{\Omega} \arcsin(\sqrt{E^*/E}) \quad (2.4)$$

где предполагается, что энергия под знаком арксинуса есть средняя энергия системы. Тогда для того, чтобы найти среднее значение энергии и среднее время между ударами уравнения (2.3) и (2.4) должны решаться одновременно. Это можно сделать численно или графически. Однако итеративный подход также дает достаточно точные результаты после нескольких итераций. Предположим изначально $T = \pi/\Omega$ и подставим это значение в выражение для средней энергии. Первая итерация заканчивается нахождением первого уточнения для значения периода при подстановке найденной средней энергии системы в (2.4).

На фиг. 4, *a* приведены аналитические результаты среднего времени между ударами системы с зазором для $D = 1 - (1)$ и $D = 10 - (2)$. Для тех же значений интенсивности шума на фиг. 4, *b* сравниваются аналитические результаты (линия) с результатами численного моделирования (точки). На фиг. 5, *a, b* изображены значения среднего времени между ударами ($D = 1 - (1)$ и $D = 10 - (2)$) и средней энергии системы для системы с натя-



Фиг. 4



Фиг. 5

гом ($h = -1$). Как и ожидалось, аналитические результаты хорошо согласуются с результатами численного моделирования, даже при больших значениях интенсивности шума.

3. Виброударные системы с симметричным двухсторонним ограничением. Рассмотрим виброударную систему с двухсторонним ограничением, линейную между ударами

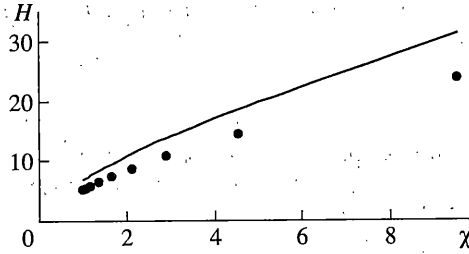
$$\begin{aligned} \ddot{y} + \Omega^2 y &= \xi(t), \quad \langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D\delta(\tau) \\ \dot{y}_+ &= -r\dot{y}_-, \quad y = \pm\Delta; \quad 0 < r < 1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Изменение энергии рассматриваемой двухударной системы между ударами также описывается последним уравнением в (1.2). Более того, изменение энергии благодаря удару и средняя энергия системы будут подобны системе с односторонним ограничением, как и предполагалось из метода квази-консервативного усреднения [7], за исключением выражения для среднего времени между ударами. Таким образом, предполагая виброударный режим $E \gg E^{**}$:

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle &= DT_{\Delta}\chi/4 + E^{**}, \quad E^{**} = \Delta^2\Omega^2/2 \\ T_{\Delta} &= \frac{2}{\Omega} \arcsin(\sqrt{E^{**}/E}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Предполагая, что энергия, входящая под знак арксинуса есть средняя энергия системы, оба уравнения (3.2) могут быть решены одновременно.

Проводя сравнение аналитических результатов с численными, следует заметить, что аналитические результаты дают оценку сверху (снизу) для средней энергии системы (среднего времени между ударами) и отличаются на 10–15%. Такая ошибка является следствием сразу же нескольких неточностей. Время между ударами, принятое в формуле (3.2), является первым приближением и требует уточнения. Уравнение для среднего времени между ударами, строго говоря, следует понимать как случайное. Следовательно, чтобы точно вычислить среднее время между ударами необходимо знать плотность



Фиг. 6

вероятности энергии системы и вычислить среднее значение правой части этого выражения. Однако, так как аналитическое выражение для плотности вероятности энергии неизвестно, приходится прибегать к приближенному анализу (3.2). Результаты численного моделирования показали, что среднее время $\langle T \rangle$ полученное путем прямого моделирования отличается от $\langle 2/\Omega \arcsin \sqrt{E^*/E} \rangle$ на те же 10%. На фиг. 6 продемонстрированы результаты численного моделирования (точки) и аналитические результаты (3.2) (линия) для $\Delta = 0.5$ и $D = 100$.

Следует также отметить, что для поддержания виброударного режима интенсивность белого шума должна быть достаточно высокой, особенно при малых значениях коэффициента восстановления. Это приводит к тому, что среднее время системы между ударами существенно уменьшается, что требует малого шага по времени и огромных вычислительных затрат.

4. Задача о достижении заданных границ. Среднее время, которое система проводит между двумя последовательными ударами может быть найдено из решения задачи о достижении заданных границ [12, 14]. Эта задача формулируется таким образом, что необходимо найти решение обратного уравнения Колмогорова для данной системы с заданными граничными условиями. Для виброударных систем, рассмотренных в этой статье, задача формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \quad \dot{y}_2 = -\Omega^2 y_1 + \xi(t) \\ y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} - \Omega^2 y_1 \frac{\partial T}{\partial y_2} + \frac{D \partial^2 T}{2 \partial y_2^2} &= -1, \quad y_2 \frac{\partial T}{\partial y_1} \Big|_{y_1=0, y_2>0} = -1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда как первое граничное условие является общим для всех рассмотренных виброударных систем (4.1) [12], второе граничное условие будет различным. Так для системы с односторонним ограничением и $\Delta = 0$:

$$T|_{y_1=0, \dot{y}_2 < 0} = 0 \quad (4.2)$$

а для системы с двухсторонним ограничением

$$T|_{y_1 = \Delta, y_2 > 0} = 0 \quad (4.3)$$

В связи с тем, что точное решение уравнения (4.1) получить не удастся, уравнение (4.1) будет решено приближенно, методом малого параметра, предполагая интенсивность шума D малой величиной. Тогда уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} T &= T_0 + DT_1 + D^2 T_2 + \dots, \quad y_2 \frac{\partial T_0}{\partial y_1} - \Omega^2 y_1 \frac{\partial T_0}{\partial y_2} = -1 \\ y_2 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} - \Omega^2 y_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_2} &= -\frac{1 \partial^2 T_0}{2 \partial y_2^2}, \quad y_2 \frac{\partial T_2}{\partial y_1} - \Omega^2 y_1 \frac{\partial T_2}{\partial y_2} = -\frac{1 \partial^2 T_1}{2 \partial y_2^2}, \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Производя замену переменных, первое уравнение перепишем как

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin \theta; \quad y_2 = A \Omega \cos \theta \\ \partial T_0 / \partial \theta &= -1 / \Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1 Система с односторонним ограничителем ($\Delta = 0$). В этом случае уравнение (4.5) решается с граничным условием (4.2) и в первом приближении:

$$\begin{aligned} T_0 &= -\theta / \Omega + c \\ T_0(\theta = \pi) &= 0 \Rightarrow c = \pi / \Omega, \quad T_0^* = T_0(\theta = 0) = \pi / \Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

где T_0^* – среднее время между ударами. Следует заметить, что выражение (4.6) было получено ранее в работе [10]. Подставляя первое выражение (4.6) в последующее уравнение в (4.4) получим следующее приближение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2\Omega} \frac{\partial^2 T_0}{\partial y_2^2} = \frac{1}{2A^2 \Omega^4} \sin(2\theta) \\ T_1(\theta) &= -\frac{1}{4A^2 \Omega^4} \cos(2\theta) + c, \quad T_1(\theta = \pi) = 0 = -\frac{1}{4A^2 \Omega^4} + c \\ T_1(\theta) &= \frac{1}{4A^2 \Omega^4} (1 - \cos(2\theta)), \quad T_1^* = T_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Аналогичным образом могут быть найдены следующие приближения. Однако легко убедиться в том, что следующие два приближения также равны нулю

$$\begin{aligned} T_2(\theta) &= \frac{3}{16A^4 \Omega^7} \sin(4\theta), \quad T_2^* = T_2(0) = 0 \\ T_3(\theta) &= \frac{5}{16A^6 \Omega^{10}} (\cos(6\theta) - 1), \quad T_3^* = T_3(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

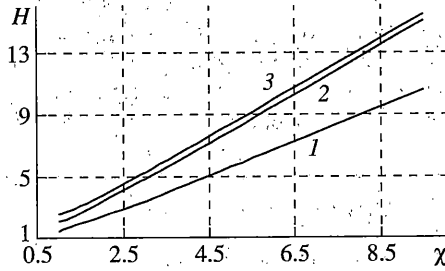
Таким образом, первое приближение для среднего времени виброударной системы с нулевым зазором оказывается весьма точным, что и является причиной достаточно высокой точности метода баланса энергии в этом случае на всем интервале значений коэффициента восстановления и для достаточно высоких значений интенсивности шума (фиг. 1, а, $D = 10$).

4.2. Система с двухсторонним симметричным ограничением. Результаты полученные в предыдущем пункте могут быть использованы здесь с учетом граничного условия (4.3), которое в новых переменных записывается как

$$T|_{\theta = \theta^*} = 0, \quad \theta^* = \arcsin \frac{\Delta \Omega}{\sqrt{2E}} \quad (4.9)$$

где E – энергия системы, $E > E^{**}$. Таким образом, первое приближение выглядит следующим образом, совпадая с (3.2):

$$\begin{aligned} T_0 &= -\theta / \Omega + c; \quad \theta^* = \arcsin \frac{\Delta \Omega}{\sqrt{2E}} \\ T_0(\theta = \theta^*) &= 0 \Rightarrow c = \frac{1}{\Omega} \arcsin \frac{\Delta \Omega}{\sqrt{2E}} \end{aligned} \quad (4.10)$$



Фиг. 7

$$T_0^* = T_0(\theta = -\theta^*) = \frac{2}{\Omega} \arcsin \frac{\Delta \Omega}{\sqrt{2E}}$$

Следующие приближения принимают вид

$$T_1(\theta) = \frac{1}{4A^2 \Omega^4} (\cos(2\theta^*) - \cos(2\theta)), \quad T_1^* = T_1(-\theta^*) = 0$$

$$T_2(\theta) = \frac{3}{16A^4 \Omega^7} (\sin(4\theta) - \sin(4\theta^*)), \quad T_2^* = T_2(-\theta^*) = -\frac{3}{8A^4 \Omega^7} \sin(4\theta^*) \quad (4.11)$$

$$T_3(\theta) = \frac{5}{16A^6 \Omega^{10}} (\cos(6\theta) - \cos(6\theta^*)), \quad T_3^* = T_3(-\theta^*) = 0$$

Из выражения (4.11) видно, что для получения более точных результатов первое приближение нуждается в поправке, пропорциональной квадрату интенсивности шума, которая уменьшит значение среднего времени.

5. Виброударные системы с двумя степенями свободы. Изучение виброударных систем со многими степенями свободы оказывается интересной и трудной проблемой. Разные факторы, такие как перекачка энергии от одной подсистемы в другую, внутренний резонанс и другие, оказывают существенное влияние на колебания системы, затрудняя поиск аналитических решений. Несмотря на то, что эта тема является предметом отдельного глубокого исследования, авторы хотели бы продемонстрировать результаты одного численного эксперимента.

Рассматривается система с двумя степенями свободы, первая масса которой имеет односторонний ограничитель, находящийся в положении равновесия ($\Delta = 0$) и возбуждается гауссовским белым шумом

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + 2k_1 y_1 - k_2 y_2 &= \xi(t), & \dot{y}_{1+} &= -r \dot{y}_{1-}, & y_1 &= 0, & 0 < r < 1 \\ \ddot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = D \delta(\tau)$$

Результаты численного моделирования системы (5.1), а именно средней энергии системы для различных значений коэффициента восстановления, приведены на фиг. 7 для $D = 10$, $k_1 = 1$ и $k_2 = 0.1 - (1)$, $k_2 = 1.0 - (2)$, $k_2 = 10.0 - (3)$. Из фигуры 7 видно, что средняя энергия системы (5.1) также линейно пропорциональна коэффициенту ударных энергетических потерь χ .

6. Заключение. В работе проведен анализ кусочно-консервативных, виброударных систем. Предложенный ранее метод баланса энергии применен к системам с двухсторонним ограничением, а также исследовано влияние вязкого трения на системы такого рода. Численное моделирование системы с двумя степенями свободы показало, что коэффициент ударных энергетических потерь χ является характерным для виброударных систем с неупругим ударом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем: приближенные методы. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Бабицкий В.И., Крупенин В.Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 320 с.
3. *Бабицкий В.И., Коловский М.З.* К теории виброударных систем // *Машиноведение*. 1970. № 1. С. 24–30.
4. *Кобринский А.Е., Кобринский А.А.* Виброударные системы. М.: Наука, 1973. 591 с.
5. *Журавлев В.Ф.* Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями // *ПММ*. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 781–788.
6. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. *Dimentberg M.F.* Statistical Dynamics of Nonlinear and Time-Varying Systems. N.Y. etc., Wiley; Taunton: Research Studies Press, 1988. 609 p.
8. *Dimentberg M.F., Hou Z., Noori M.* Spectral density of a non-linear single-degree-of-freedom system's response to a white-noise random excitation: a unique case of an exact solution // *Intern. J. of Non-Linear Mech.* 1995. V. 30. № 5. P. 673–676.
9. *Ланда П.С., Стратонович Р.Л.* К теории флуктуационных переходов различных систем из одного стационарного положения в другое // *Вестн. МГУ*. 1962. Сер. 3. № 1. С. 33–45.
10. *Dimentberg M.F., Iourtchenko D.V.* Towards incorporating impact losses into random vibration analyses: a model problem // *Probabilistic Eng. Mech.* 1999. V. 14. № 4. P. 323–328.
11. *Iourtchenko D.V., Dimentberg M.F.* Energy balance for random vibration of piecewise-conservative systems // *J. Sound and Vibrat.* 2001. V. 248. № 5. P. 913–923.
12. *Lin Y.K., Cai G.Q.* Probabilistic structural dynamics: advanced theory and applications. NY.: McGraw Hill, 1995. 476 p.
13. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. Радио, 1961. 558 с.
14. *Болотин В.В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.12.2003