

УДК 531.31

© 2006 г. Л.П. ДЗЮБАК, Г.В. МАНУЧАРЯН, Ю.В. МИХЛИН, Т.В. ШМАТКО

## **УСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛЯРНЫХ И ХАОТИЧЕСКИХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ПОЛОЖЕНИЯМИ РАВНОВЕСИЯ**

Рассматриваются вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы и несколькими положениями равновесия. Такие системы могут быть получены путем дискретизации упругих систем в закритическом состоянии. Анализируются формы колебаний, которые являются периодическими, если амплитуда внешнего периодического воздействия мала, и становятся хаотическими, если эта амплитуда возрастает. Задача устойчивости таких форм колебаний решается с использованием вычислительных процедур, которые представляют собой численную реализацию классического определения устойчивости по Ляпунову. Исследуется устойчивость форм колебаний нелинейных стержней, оболочек, арок.

Взаимная неустойчивость фазовых траекторий используется в качестве критерия появления хаотического поведения в нелинейной системе. Сравняются траектории с очень близкими начальными условиями. Вычислительные процедуры, связанные с определением устойчивости по Ляпунову, позволяют судить о взаимной устойчивости или неустойчивости этих траекторий. Конкретные вычисления, которые проводятся для неавтономного уравнения Дуффинга, а также фермы Мизеса, находящейся под действием гармонического возбуждения, дают возможность наблюдать возникновение и расширение областей хаотического поведения.

**1. Введение.** Рассматриваемые модели могут быть получены путем дискретизации упругих систем, исходное положение равновесия которых становится неустойчивым под действием сжимающей силы. Если перемещение нелинейной упругой системы аппроксимируется одной гармоникой ряда Фурье по пространственным координатам, то после применения процедуры Бубнова – Галеркина может быть получена система с одной степенью свободы, которая описывается неавтономным уравнением Дуффинга. При малых амплитудах внешнего периодического воздействия в такой системе наблюдаются периодические колебания, однако с ростом этих амплитуд происходит переход к хаотическим колебаниям [1, 2].

Если удерживаются две гармоники ряда Фурье по пространственным координатам, то после дискретизации получаем систему с двумя степенями свободы. В этом случае можно формулировать и решать задачу устойчивости формы периодических или хаотических колебаний в пространстве большей размерности. Неустойчивость этой формы колебаний означает “перекачку энергии” в другую форму колебаний. Имеется чрезвычайно много публикаций по общим и специальным проблемам устойчивости периодических (или почти-периодических) решений [3–8]. Однако проблема устойчивости форм хаотических колебаний не имеет аналитического решения в общем случае.

В публикуемой работе используются вычислительные процедуры, которые основаны на непосредственной численной реализации классического определения устойчивости по Ляпунову. При этом предполагается, что величины начальных вариаций ограничены снизу, что по сути отвечает определению Ляпунова. Вычисления на основе пред-

ложенного алгоритма продолжают до тех пор, пока не стабилизируются границы областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров системы.

Хаотическое поведение нелинейных систем является объектом исследования в многочисленных публикациях. Первые идеи о появлении хаоса в нелинейных детерминированных системах можно найти в работах Пуанкаре [9]. Критерии появления хаотических колебаний очень различны [2]. Среди основных аналитических или численно-аналитических критериев выделим следующие: критерий образования гомоклинических траекторий, критерий последовательного удвоения периода, критерий перекрытия резонансов, обнаружение положительных постоянных Ляпунова, появление так называемой “подковы Смейла” и др. Среди публикаций по проблемам начала хаотического поведения можно указать работы [10–14].

Существенно, что все фазовые траектории в области так называемого “странного аттрактора” взаимно неустойчивы, т.е. траектории, которые были близки между собой в какой-то момент времени, затем расходятся экспоненциально [2, 15–17]. Именно эта взаимная неустойчивость фазовых траекторий используется в публикуемой работе в качестве критерия начала хаотического поведения в динамической системе. Сравниваются траектории с близкими начальными условиями, на основе предложенного алгоритма оценивается взаимную устойчивость (или неустойчивость) этих траекторий. Вычисления в узлах некоторой сетки в избранной области фазового пространства позволяют наблюдать процесс появления и расширения областей хаотического поведения, если какие-то параметры системы меняются. Конкретные результаты получены для неавтономного уравнения Дuffинга, а также для фермы Мизеса, когда изменяется амплитуда внешнего периодического воздействия.

**2. Основная модель.** Рассмотрим систему, которая может быть получена путем дискретизации моделей динамики нелинейных стержней в рамках гипотезы Кирхгофа [18], а также моделей динамики длинных пологих цилиндрических оболочек [19, 20]:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \delta \dot{y}_1 - \alpha y_1 + \beta y_1^3 + c y_1 y_2^2 &= f \cos \omega t \\ \ddot{y}_2 + \delta \dot{y}_2 + a y_2 + b y_2^3 + c y_2 y_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  – искомые функции;  $\delta$  – коэффициент, определяющий демпфирование; все коэффициенты кроме  $\alpha$ , предполагаются положительными. В случае  $\alpha > 0$  уравнения (2.1) описывают закритическую динамику соответствующих упругих систем.

Если  $y_2 = 0$ , то получаем неавтономное уравнение Дuffинга с двумя потенциальными ямами. Известно [1, 2], что при возрастании амплитуды внешнего периодического воздействия  $f$  поведение решений этого уравнения существенно меняется. Происходит последовательное удвоение периода колебаний и, начиная с некоторого значения  $f$ , можно наблюдать появление хаотических колебаний (например, если  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 100$ ,  $\delta = 1$ ,  $\omega = 3.76$ , то хаотические колебания начинаются, если значение  $f$  примерно равно единице). Дополнительный анализ показывает, что область хаотического поведения в фазовом пространстве обладает свойствами “странного аттрактора”.

**3. Численная реализация определения устойчивости по Ляпунову.** Здесь обсуждается проблема устойчивости формы регулярных или хаотических колебаний  $y_1 = y_1(t)$ ,  $y_2 = 0$  системы (2.1). Переменные  $y_2$ ,  $\dot{y}_2$  являются вариациями рассматриваемого решения (или возмущениями), т.е. рассматривается устойчивость по части переменных. Предполагаем, что значения этих переменных в области устойчивости рассматриваемой формы колебаний существенно меньше значений переменных  $y_1$ ,  $\dot{y}_1$ . Это предположение соответствует общепринятой постановке задачи локальной устойчивости.

Рассмотрим хорошо известный критерий устойчивости по Ляпунову [3, 6, 21], который может быть сформулирован, например, таким образом: решение  $y = 0$  устойчиво,

если для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти  $\delta > 0$  такую, что для всех  $y_0 \in N_\delta(0)$  и  $t \geq 0$  будет выполнено условие  $y(t) \in N_\varepsilon(0)$ . Здесь  $N_\delta^{(0)}$  и  $N_\varepsilon^{(0)}$  означают  $\delta$ - и  $\varepsilon$ -окрестность формы колебаний  $y = 0$ . Такая окрестность может быть выбрана по-разному, например,  $N_\gamma = \{y \in R^n : |y| \leq \gamma\}$ .

Введем связь между величиной  $\varepsilon$  и начальным значением переменной  $y$ , что отвечает сути определения Ляпунова, поскольку в этом определении начальные вариации не могут стремиться к нулю. Пусть

$$\varepsilon = \rho |y_0| \leq \rho \delta \quad (\rho = \text{const}) \quad (3.1)$$

Условие (3.1) и означает, что величина  $\delta$  не может быть произвольно малой, так как  $\delta \geq \varepsilon/\rho$ . Перепишем последнее неравенство следующим образом:  $\rho \geq \varepsilon/\delta$ ; таким образом, постоянная  $\rho$  – это верхний предел отношения  $\varepsilon/\delta$ . Кроме того, из условия устойчивости по Ляпунову, принимая во внимание неравенство (3.1), находим, что  $|y(t)| \leq \rho |y(0)|$ .

В результате будем иметь: неустойчивость формы колебаний  $y_2 = 0$  фиксируется, если

$$|y_2(t)| \geq \rho |y_2(0)| \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.2)$$

В условии (3.2), в отличие от классического определения введено ограниченное время расчета на устойчивость  $T$ . Выбор времени расчета на устойчивость обсуждается далее. Неравенство (3.2) записано при условии, что величина  $\delta$  не может быть сколь угодно малой; предполагается также, что время числового расчета на устойчивость по необходимости конечно.

Далее следует обсудить выбор до сих пор не определенных величины  $\rho$  и  $T$ . Здесь значение  $\rho^{-1}$  – это мера малости начальных вариаций по отношению к максимально допустимым вариациям для любых  $t \geq 0$ . Возрастание величины  $\rho$  означает, что допустимые начальные значения вариаций убывают. Имеется существенный произвол в выборе величины  $\rho$ , и это не случайно, так как в области неустойчивости при возрастании  $t$  вариации выйдут за пределы  $\varepsilon$  – окрестности исходного решения при любом выборе  $\rho$ . В инженерных науках принято говорить, что некоторая величина  $\alpha$  “на порядок” больше, чем величина  $\beta$ , если  $\alpha/\beta \approx 10$ . Для конкретных расчетов можно выбрать, например,  $\rho = 10$ .

Обсудим теперь выбор величины  $T$ . Анализ устойчивости с использованием критерия (3.2) производится с использованием компьютерного расчета на основе стандартной программы Рунге – Кутты. Расчет производится в узлах некоторой сетки в избранной области плоскости (или пространства) параметров системы. Вычисления продолжаютс до тех пор, пока в выбранном масштабе сетки не стабилизируются границы областей устойчивости и неустойчивости. Это и есть принципиальный критерий для выбора времени вычислений  $T$ . Ясно, что если шаг сетки неограниченно убывает, а число узлов растет, то время расчета  $T$  стремится к бесконечности.

Следует заметить, что величины  $\rho$  и  $T$  не могут быть выбраны совершенно произвольно. Обсудим связь этих величин и так называемых постоянных Ляпунова [2, 14, 17], которые также определяются путём численного расчета на конечном интервале времени. Появление положительных постоянных Ляпунова означает глобальную взаимную неустойчивость фазовых траекторий, что является одним из критериев начала хаотических колебаний в нелинейной системе. Постоянную Ляпунова можно ввести, например, таким образом:  $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \ln |y(t)/y(0)|$ , откуда следует, что  $|y(t)/y(0)| = e^{(\lambda + \Delta)t}$ , где  $\Delta \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Сравнивая последнее равенство с (3.2), получаем неравенства

$$\rho \leq e^{(\lambda + \Delta)T} \quad \text{и} \quad T \geq \ln \rho / (\lambda + \Delta) \quad (\text{при } \lambda > 0) \quad (3.3)$$

где  $T$  – максимальное время расчета. Таким образом, постоянные  $\rho$  и  $T$ , которые присутствуют в критерии (3.2), оказываются связанными неравенством (3.3). Ясно, что уменьшение величины  $\rho$  ведет к уменьшению времени расчета  $T$  (это подтверждается конкретными расчетами). С приближением к границе областей устойчивости и неустойчивости значения постоянной Ляпунова  $\lambda$  уменьшаются, и время расчета увеличивается. Однако значение  $\rho$  не может быть выбрано слишком малым, поскольку вблизи границы значения  $\lambda$  малы, и время расчета будет зависеть от неопределенной величины  $\Delta$ .

Рассмотрим зависимость (или независимость) результатов анализа устойчивости от начальных условий. Известно, что анализ устойчивости на основе линеаризованных уравнений в вариациях не зависит от начальных условий. Однако дополнительные области неустойчивости в пространстве параметров системы, обусловленные влиянием нелинейности, имеют меньшую размерность, чем области неустойчивости, полученные из анализа линеаризованных уравнений [8, 22]. Численный расчет подтверждает, что результаты анализа устойчивости на основе критерия (3.2) не зависят от начальных условий, если начальные вариации достаточно малы.

*Замечание 1.* В работе [23] введена так называемая “обратная мера устойчивости”  $ISI(x_0, t_0) = \|x(t)\|_\infty / \|x_0\|$ , которая используется для установления “максимального смещения всех траекторий, стартующих с поверхности начальных условий, которая определяется некоторым гиперкубом вокруг тривиального положения равновесия”. Для неустойчивых систем имеем  $\lim ISI(x_0, t_0) = \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Конечные значения меры устойчивости вычисляются для областей устойчивости конкретных систем.

*Замечание 2.* Можно использовать вместо критерия (3.2) следующий “энергетический” критерий устойчивости. А именно, неустойчивость формы колебаний  $y_2 = 0$  фиксируется, если

$$y_2^2(t) + \dot{y}_2^2(t) \geq \rho(y_2^2(0) + \dot{y}_2^2(0)) \quad (0 \leq t \leq T), \quad \rho = O(10) \quad (3.4)$$

Ясно, и численные вычисления это подтверждают, что области неустойчивости в пространстве параметров системы более широкий в том случае, когда используем критерий (3.3), чем при использовании критерия (3.2). Дело в том, что существуют области, где вариации  $y_2(t)$  малы, но соответствующие скорости  $\dot{y}_2(t)$  велики.

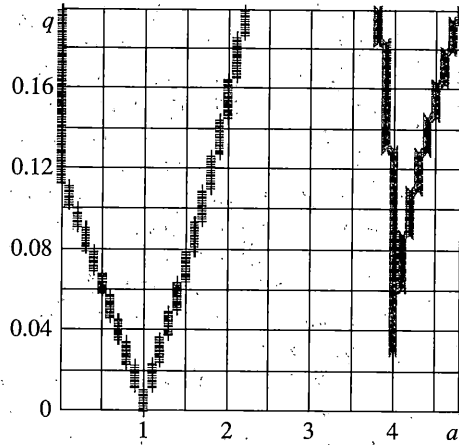
**4. Модельный пример (уравнение Матье).** В качестве модельного примера рассмотрим устойчивость тривиального решения известного уравнения Матье

$$\ddot{y} + (a + 16q \cos 2t)y = 0 \quad (4.1)$$

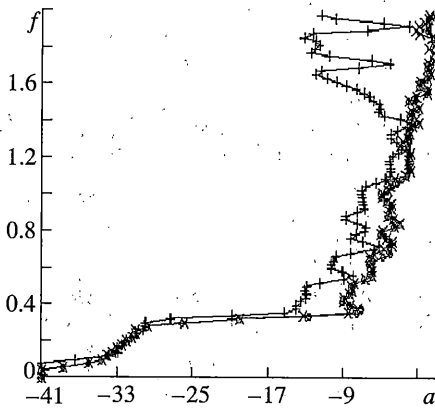
Выделим следующую область на плоскости параметров  $a, q$  (плоскости Айнса-Стретта):  $0 \leq a \leq 4.8, 0 \leq q \leq 0.2$ . Выбирается следующий шаг сетки:  $\Delta a = 0.1, \Delta q = 0.001$ ; таким образом, вычисления на основе условия (3.2) ( $\rho = 10$ ) ведутся примерно в 10000 узлах сетки в данной области.

В избранном масштабе сетки границы областей устойчивости и неустойчивости в данной области плоскости Айнса – Стретта стабилизируются на интервале  $0 \leq t \leq T = 700$ . Результаты вычислений, как и ожидалось, не зависят от начальных условий, если последние достаточно малы. Эти результаты, представленные на фиг. 1, совпадают с известными результатами.

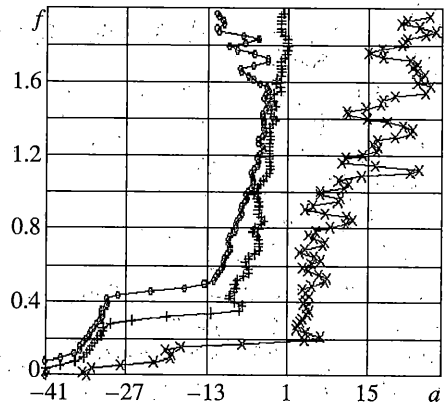
**5. Устойчивость форм колебаний нелинейных стержней и оболочек.** Вернемся к рассмотрению системы (2.1), описывающей нелинейную динамику стержней и оболочек. Используя масштабные преобразования вида  $y_1 \rightarrow \mu_1 y_1, y_2 \rightarrow \mu_2 y_2, t \rightarrow \mu_3 t$ , выберем коэффициенты  $\mu_i$  так, чтобы  $\alpha = 10, \beta = 100, \delta = 1, \omega = 3.76$ . Эти значения соответствуют системе с одной степенью свободы ( $y = 0$ ), рассмотренной в [1]. Неустойчивость решения  $y_1 = y_1(t), y_2 = 0$  означает перекачку энергии из первой формы колебаний, соответст-



Фиг. 1



Фиг. 2

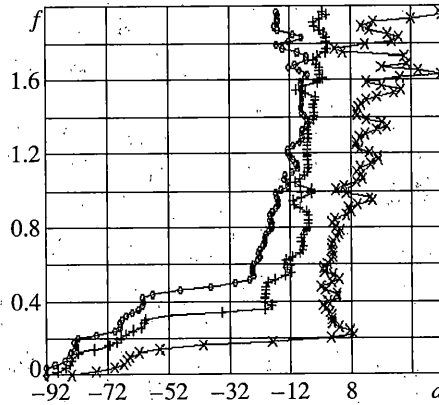


Фиг. 3

вующей первой гармонике укороченного ряда Фурье по пространственным координатам, в другие формы колебаний.

Рассмотрим следующие значения параметров:  $b = 1600$ ,  $c = 400$  (вариант А);  $b = 8100$ ,  $c = 900$  (вариант В). Значения параметра  $a$  здесь варьируются. Заметим, что интервал  $a \in [-400, 8800]$  и другие значения параметров системы соответствуют реальным характеристикам стержней и оболочек. Пусть амплитуда вынужденных колебаний  $f$  изменяется от 0 до 2, а коэффициент, определяющий трение,  $\delta = 0, 0.5, 1$ . Представленные далее результаты численного расчета соответствуют следующим начальным условиям:  $y_1(0) = 0.3$ ,  $\dot{y}_1(0) = 0$ ,  $y_2(0) = 0.01$ ,  $\dot{y}_2(0) = 0$ , однако эти результаты не зависят от начальных условий при достаточно малых вариациях. Шаг сетки равен:  $\Delta a = 1$ ,  $\Delta f = 0.04$ . В выбранном масштабе границы областей устойчивости и неустойчивости на плоскости  $(a, f)$  стабилизируются на интервале  $0 \leq t \leq T \approx 125$  (для вариантов А и В).

Результаты вычислений на основе критерия (3.2) ( $\rho = 10$ ) показаны на фиг. 2, 3 (вариант А) и фиг. 4 (вариант В). Области неустойчивости расположены в плоскости параметров слева от полученных границ. Типичный процесс стабилизации границ показан на фиг. 2, где кривые, отмеченные прямым крестом, соответствуют  $T = 10$ , кривые, отме-



Фиг. 4

ченные косым крестом, соответствуют  $T = 50$ , кривые, отмеченные светлыми точками, соответствуют  $T = 100$  ( $0 \leq f \leq 2$ ;  $-41 \leq a \leq 1$ ;  $\delta = 0.5$ ). Границы областей устойчивости и неустойчивости на плоскости  $(a, f)$  показаны на фиг. 3 (вариант А) и фиг. 4 (вариант В) для различных значений параметра трения: кривые, отмеченные косым крестом, соответствуют  $\delta = 0$ ; кривые, отмеченные прямым крестом, соответствуют  $\delta = 0.5$ ; кривые, отмеченные светлыми точками, соответствуют  $\delta = 1$ , где  $0 \leq f \leq 2$ ,  $-41 \leq a \leq 28$  на фиг. 3, и  $0 \leq f \leq 2$ ,  $-92 \leq a \leq 38$  на фиг. 4.

Примеры фазовых плоскостей неустойчивой регулярной и устойчивой хаотической форм колебаний показаны на фиг. 5, 6. На фиг. 5 изображена регулярная форма колебаний  $y_2 = 0$ , которая является неустойчивой по отношению к малым возмущениям  $y_2$  ( $f = 0.5$ ,  $a = 300$ ,  $\delta = 1$ ), а на фиг. 6 изображена форма хаотических колебаний, которая является устойчивой по отношению к малым возмущениям  $y_2$  ( $f = 1.5$ ,  $a = 300$ ,  $\delta = 1$ ). На фиг. 5 и 6 представлены фазовые плоскости  $y_1, \dot{y}_1$  и  $y_2, \dot{y}_2$ .

**6. Устойчивость форм колебаний арки.** Рассмотрим уравнения динамики пологой арки, которые получаются в рамках гипотезы Кирхгофа [18]:

$$A_s \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} - T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q(t, y) \tag{6.1}$$

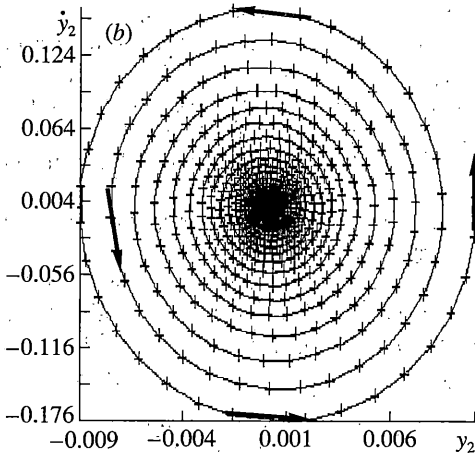
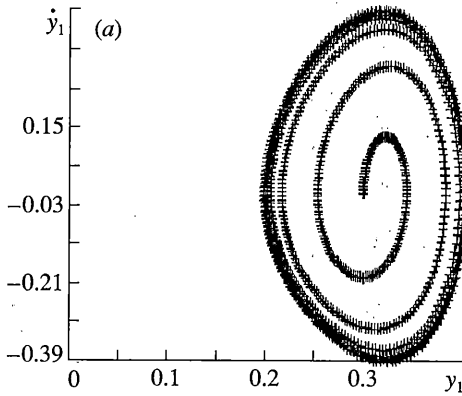
$$T = \frac{EA_s l}{2l} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

Здесь  $w = w(t, y)$  и  $w_0 = w_0(y)$  – координаты деформированной и начальной средней линии арки,  $\rho$  – плотность материала,  $q = q(t, y)$  – поперечная нагрузка,  $T$  – величина распора,  $EI$  и  $EA_s$  – жесткости на изгиб и растяжение-сжатие соответственно.

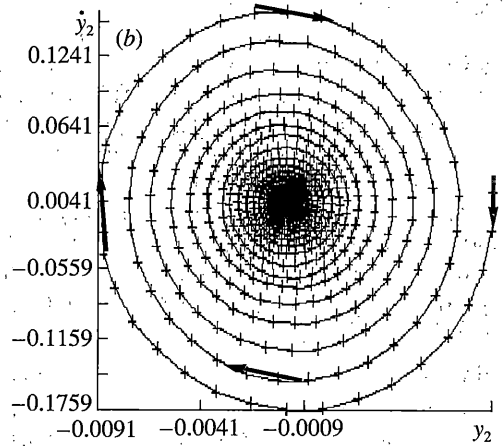
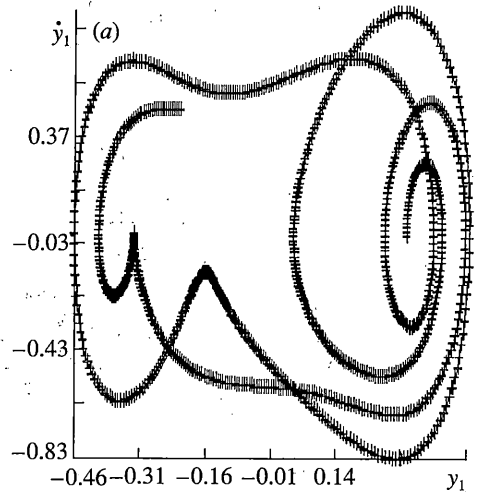
Следуя [24], введем параметр  $e$ , который характеризует высоту арки, а также некоторые безразмерные величины:

$$e = \frac{2}{l} \left| \int_0^l w_0 \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right) dy \right|, \quad \tau = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} et, \quad \eta = \frac{\pi y}{l}, \quad \lambda = \frac{EI}{e^2 EA_s} \tag{6.2}$$

$$W = W(\tau, \eta) = \frac{w}{e}, \quad W_0 = W_0(\eta) = \frac{w_0}{e}, \quad P = P(\tau, \eta) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{q}{eEI}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Прогиб представлен двумя гармониками укороченного ряда Фурье по синусам

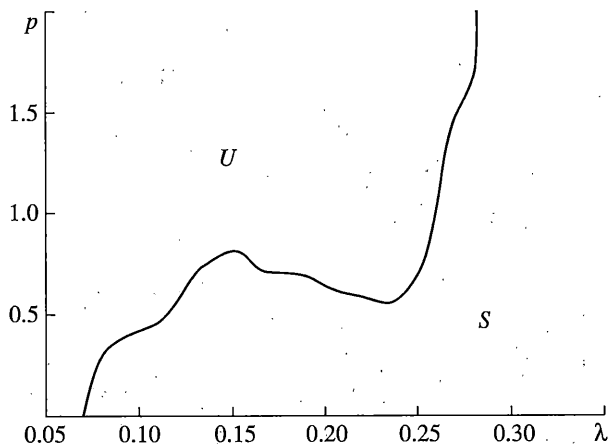
$$W = W_1(\eta) \sin \eta + W_2(\eta) \sin 2\eta \quad (6.3)$$

Пусть  $W_0 = \sin \eta$  и  $P = p \sin \eta$ . Применяя к уравнению (6.1) процедуру Бубнова-Галеркина, получим следующую систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, связывающую коэффициенты укороченного ряда Фурье:

$$\begin{aligned} d^2 W_1 / d\tau^2 + \lambda(W_1 + 1) + f[W]W_1 &= \lambda p \\ d^2 W_2 / d\tau^2 + 16\lambda W_2 + 4f[W]W_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$f[W] = 0.25(W_1^2 + 4W_2^2 - 1)$$

В [24] было показано, что в случае статической внешней нагрузки ( $p = \text{const}$ ), симметричная конфигурация  $W_2 = 0$  неустойчива, если  $\lambda < 1/22$ . Здесь рассмотрим случай динамической внешней нагрузки, а именно,  $p = q \cos \omega t$ .



Фиг. 7

Исследуем устойчивость формы колебаний  $W_2 = 0$  с использованием критерия (3.2) ( $\rho = 10$ ). Рассматривается следующая область на плоскости параметров  $(\lambda, q)$ :  $0.01 \leq \lambda \leq 0.35, 0 \leq q \leq 2$ . Шаг сетки равен:  $\Delta\lambda = 0.085, \Delta q = 0.05$ . В выбранном масштабе границы областей устойчивости и неустойчивости стабилизируются на интервале  $0 \leq t \leq T \approx 2000$ . Результаты вычислений представлены на фиг. 7, где область неустойчивости отмечена знаком  $U$ , а область устойчивости – знаком  $S$ . При построении графика использована функция сглаживания. Заметим, что область динамической неустойчивости шире, чем область статической неустойчивости, которая была получена в [24].

**7. Границы локализации регулярных или хаотических форм колебаний.** Орбитальная устойчивость формы колебаний влечет за собой ее локализацию, потому что перекачка энергии из этой формы в другую форму колебаний отсутствует, и малые начальные вариации остаются малыми для всех  $t > 0$ . Попытаемся определить здесь границы этой локализации. Пусть начальные вариации возрастают, т.е. расширяется  $\delta$  – окрестность начального значения  $y_0$  рассматриваемой формы колебаний; одновременно  $\varepsilon$  – окрестность этой формы колебаний сохраняется неизменной. Это означает, что параметр  $\rho$  в критерии (3.2), который представляет собой верхний предел отношения  $\varepsilon/\delta$ , будет уменьшаться.

Рассмотрим для определенности следующую систему, которая может быть получена из (2.1) при определенном выборе физико-геометрических характеристик соответствующей упругой системы, а также с использованием некоторых масштабных преобразований:

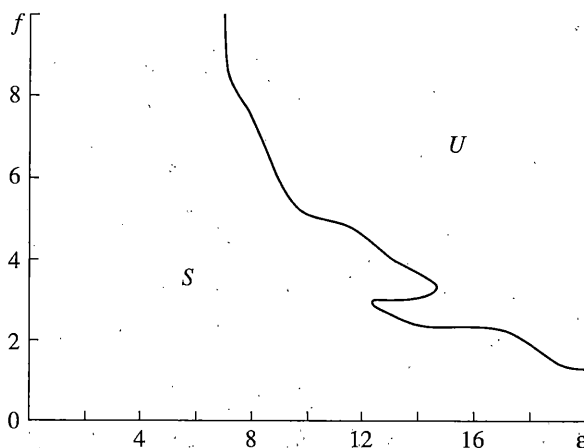
$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \delta \dot{y}_1 + [1 - q + y_1^2 + 4\varepsilon y_2^2]y_1 &= f \cos \omega t \\ \ddot{y}_2 + \delta \dot{y}_2 + 4[4 - q + \varepsilon y_1^2 + 4y_2^2]y_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь  $q$  – мера напряжений, связанных со статическим осевым сжатием, а  $\varepsilon$  – параметр, который характеризует степень связанности одномерных осцилляторов. Рассмотрим устойчивость формы колебаний  $y_1 = y_1(t), y_2 = 0$ , которые могут быть как регулярными, так и хаотическими.

Выделим следующую область на плоскости параметров  $(f, \varepsilon)$ :  $0 \leq f \leq 10, 0 \leq \varepsilon \leq 20$  ( $\delta = 0.1$ ). Шаг сетки равен:  $f = 1/3, \Delta\varepsilon = 1$ .

В этом масштабе сетки границы областей устойчивости и неустойчивости в выделенной области параметров системы стабилизируются в интервале  $0 \leq t \leq T \approx 250$ .





Фиг. 8

Уменьшаем значение постоянной  $\rho$ , которая присутствует в критерии (3.2). Пусть для определенности  $\rho = 10, 5, 2.5$ . Отметим, что области устойчивости остаются одними и теми же для различных значений параметров  $\rho$  и  $q$ . Соответствующие результаты представлены на фиг. 8, где  $q = 0.9$ . Области неустойчивости отмечены знаком  $U$ , а области устойчивости – знаком  $S$ . При построении графика использована функция сглаживания. Таким образом, можно обнаружить, как это и предполагалось в п. 3, что существует значительный произвол в выборе параметра  $\rho$ .

**8. Неавтономное уравнение Дуффинга.** Взаимная неустойчивость фазовых траекторий. Рассмотрим хорошо известное неавтономное уравнение Дуффинга

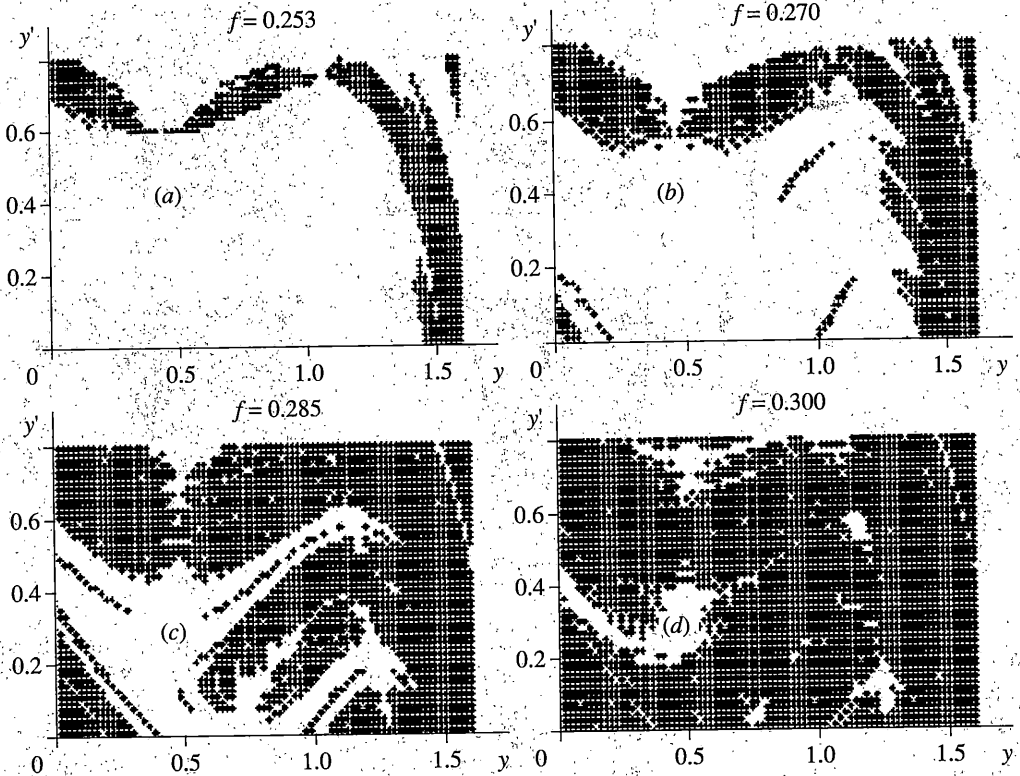
$$\ddot{y} + \delta \dot{y} - y + y^3 = f \cos \omega t \quad (8.1)$$

где выбраны такие значения параметров уравнения:  $\delta = 1/\sqrt{10}$ ,  $\omega = 3.76/\sqrt{10}$ , а значение амплитуды  $f$  варьируется. Выделим следующую область на фазовой плоскости уравнения (8.1):  $0 \leq y \leq 1.6$ ;  $0 \leq \dot{y} \leq 0.8$ . Введем в этой области некоторую сетку, используя приращения  $\Delta y = 0.02$ ,  $\dot{y} = 0.016$ . Узлы сетки  $P_{ij}(y_{i0}, \dot{y}_{j0})$  выбираются в качестве начальных точек для решений  $y_{ij}^{(1)}$  уравнения (8.1). Возьмем также другие начальные точки, близкие к выделенным точкам  $P_{ij}$ , а именно, точки  $Q_{ij}(y_{i0} + \Delta y_0, \dot{y}_{j0})$ , где значения  $\Delta y_0$  достаточно малы, и рассмотрим, соответственно, другие решения  $y_{ij}^{(2)}(t)$ . Теперь будем сравнивать траектории, исходящие из близких начальных точек, используя условие (3.2).

Будем полагать, что эти траектории взаимно неустойчивы, если

$$|y_{ij}^{(1)}(t) - y_{ij}^{(2)}(t)| \geq \rho |\Delta y_0| \quad (0 \leq t \leq T) \quad (8.2)$$

Пусть теперь  $\rho = 10$ , а  $\Delta y_0 = 0.002$ . Результаты анализа устойчивости (время стабилизации здесь  $T < 100$ ) представлены на фиг. 9 для различных значений амплитуды внешнего периодического воздействия:  $f = 0.253, 0.270, 0.285, 0.3$ . На фиг. 9 выделены начальные точки, которые отвечают взаимно неустойчивым траекториям. Вычисления (для выбранной сетки в рассматриваемой области фазовой плоскости уравнения) показывают, что для  $f < 0.27$  взаимная неустойчивость фазовых траекторий наблюдается только



Фиг. 9

лишь вблизи ветвей сепаратрисы. Области неустойчивости начинают очень быстро расширяться, если значение амплитуды  $f$  немного больше, чем 0.27. Это и есть переход к хаотическому поведению в рассматриваемой системе.

**9. Хаотические колебания в системе, обладающей возможностью прощелкивания.** Система с несколькими положениями равновесия (так называемая ферма Мизеса) может быть использована в качестве гасителя колебаний некоторой упругой системы [25, 26]. Здесь упругая система заменяется простейшим линейным осциллятором. Заметим, что подобную замену можно реализовать, например, с использованием метода Бубнова-Галеркина. Предполагая, что ферма Мизеса – пологая, и ограничиваясь в уравнениях движения линейными, квадратичными и кубическими членами, получим следующее уравнение для описания движения этой фермы:

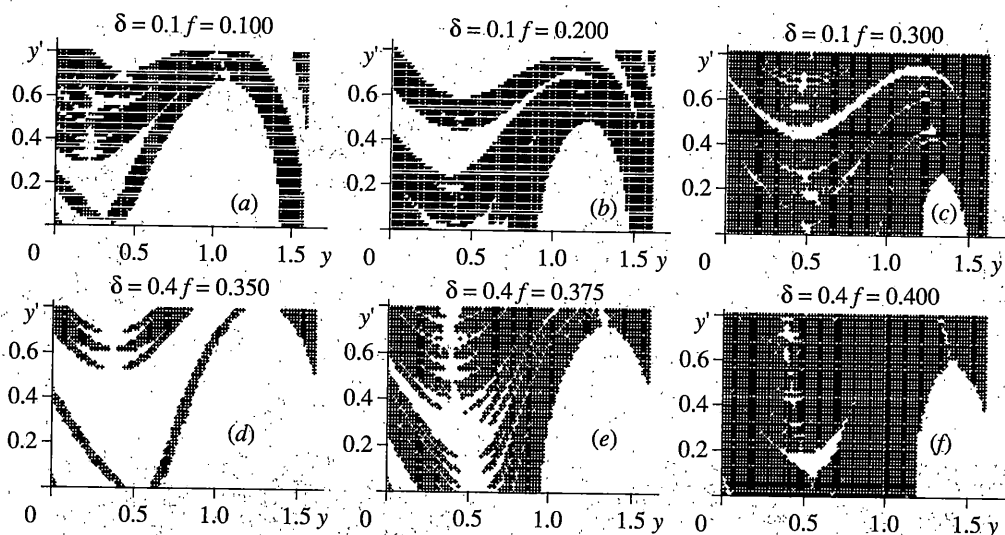
$$\ddot{W} + \frac{c}{mL} \left(1 - \frac{1}{\cos \varphi}\right) W - \frac{c}{mL} \frac{VW}{\cos^2 \varphi} + \frac{c}{2mL} \frac{W^3}{\cos^3 \varphi} + \delta \dot{W} = 0. \quad (9.1)$$

Здесь коэффициент  $c$  определяет жесткость связующей пружины,  $m$  – масса фермы,  $L$  – длина связующей пружины,  $\delta$  – коэффициент, определяющий трение.

Введем теперь гармоническую аппроксимацию колебаний упругой системы, а именно, представим  $V = f \cos(\Omega t)$ , тогда из (9.1) получаем следующее уравнение:

$$\ddot{w} - (a + bf \cos(\Omega t))w + dw^3 + \delta \dot{w} = 0 \quad (9.2)$$

$$a = \frac{c}{mL} \left( \frac{1}{\cos \varphi} - 1 \right), \quad b = \frac{c}{mL} \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad d = \frac{c}{2mL} \frac{1}{\cos^3 \varphi}$$



Фиг. 10

Без уменьшения общности полагаем, что  $a = b = 1$ . Этого можно добиться при помощи некоторых масштабных преобразований ( $w \rightarrow y, t \rightarrow \tau$ ). Мы полагаем также, что коэффициенты  $bf$  и  $\delta$  малы.

Итак, задача сводится к исследованию следующего уравнения:

$$y'' + \delta y' - (1 + bf \cos \omega \tau)y + y^3 = 0 \quad (9.3)$$

где функция  $y(\tau)$  связана с вертикальными перемещениями нелинейного виброгасителя.

Выделим следующую область фазового пространства:  $0 \leq y \leq 1.6, 0 \leq y' \leq 0.8$ , выберем также следующий шаг сетки:  $\Delta y = 0.02, \Delta y' = 0.016$ . Используем критерий (8.2). Пусть  $\rho = 10, \Delta y_0 = 0.002, b = 1, w = 1$ .

На фиг. 10 представлены результаты расчета взаимной неустойчивости фазовых траекторий, причем время стабилизации  $T = 50$ : Расширение областей неустойчивости при возрастании амплитуды внешнего периодического воздействия показано здесь для двух значений коэффициента  $\delta$ .

**9. Заключение.** В публикуемой работе исследуется устойчивость регулярных или хаотических форм колебаний в нелинейных упругих системах с двумя степенями свободы и несколькими положениями равновесия. Задача устойчивости форм хаотических колебаний не имеет аналитического решения прежде всего потому, что хаотические движения описываются с использованием компьютерного моделирования. Предложенный подход представляет собой численную реализацию классического определения устойчивости по Ляпунову для того случая, когда начальные вариации ограничены снизу и, следовательно, они не могут быть произвольно малы. Численный расчет проводится в узлах некоторой выбранной сетки в пространстве параметров системы и продолжается до тех пор, пока границы областей устойчивости и неустойчивости (в выбранном масштабе) не стабилизируются. Это и есть принципиальное условие выбора конечного времени вычислений. В работе проведен расчет устойчивости форм регулярных или хаотических колебаний для уравнений, описывающих нелинейный стержень, нелинейную оболочку и арку. Представленный здесь метод исследования устойчивости является достаточно общим и может быть использован при решении задач устойчивости форм колебаний различных типов нелинейных систем.

В работе предложен также численно-аналитический подход определения начала хаотического поведения системы, который также опирается на классическое определение устойчивости по Ляпунову. Взаимная неустойчивость фазовых траекторий используется как критерий хаотического поведения динамической системы. Предложенный подход является достаточно эффективным, что подтверждается расчетом начала хаоса для некоторых неавтономных систем. Заметим, что реализация этого подхода не является сложной, поскольку здесь используется только стандартная программа метода Рунге-Кутты вместе с дополнительным условием устойчивости.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Holmes P.J.* A nonlinear oscillator with a strange attractor // *Philos. Trans. Royal Soc. London. Ser. A.* 1979. V. 292. P. 419–448.
2. *Moon F.C.* Chaotic Vibrations. N.Y.: Wiley, 1987. 309 p.
3. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Л.; М.: ОНТИ, 1935. 386 с.
4. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гос. науч. техн. изд-во Украины, 1939. 717 с.
5. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
6. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. *Minorsky N.* Nonlinear Oscillations. Princeton: Van Nostrand, 1962. 714 p.
8. *Siegel C.L., Moser J.K.* Lectures on Celestial Mechanics. N.Y.: Springer, 1971. 302 p.
9. *Poincare H.* Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste. 3 Vols // Paris: Gauthier-Villars. V. 1. 1892. 385p.; V.2. 1893. 472p.; V. 3. Pt 1–2. 1897–1899. 414 p.
10. *Lorenz E.N.* Deterministic non-periodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. V. 20. P. 130–141.
11. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Communs. Math. Phys.* 1971. V. 20. P. 167–192.
12. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. мат. о-ва.* 1963. Т. 12. С. 1–57.
13. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields // N.Y.: Springer, 1983. 453 p.
14. *Wiggins S.W.* Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. N.Y.: Springer, 1990. 672 p.
15. *Lichtenberg A.J., Lieberman M.A.* Regular and Stochastic Motion. N.Y.: Springer, 1983. 499p.
16. *Ueda Y.* Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation // *J. Stat. Phys.* 1979. V. 20. P. 181–196.
17. *Wolf A.* Quantifying chaos with Lyapunov exponents // *Chaos Nonlinear Science: Theory Applications* / Ed. A.V. Holden. Manchester: Univ. Press, 1986. V. 1.
18. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 777 с.
19. Тонкостенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980. 607 с.
20. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наук. думка, 1984. 219 с.
21. *Perko L.* Differential Equations and Dynamical Systems. N.Y.: Springer, 1991. 403p.
22. *Pecelli G., Thomas E.S.* Normal modes, incoupling, and stability for a class of nonlinear oscillators // *Quart. of Appl. Math.* 1979. V. 37. P. 281–301.
23. *Schiehlen W.* Nonlinear oscillations in multibody systems // *Proc. 1<sup>st</sup> Europ. Nonlinear Oscillations Conf. Hamburg, 1993.* Berlin: Akademie Verlag, 1993. P. 85–106.
24. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
25. *Avramov K.V., Mikhlin Yu.V.* Forced oscillations of a system, containing a snap-through truss, close to its equilibrium position // *Nonlinear Dynamics.* 2004. V. 35. P. 361–379.
26. *Avramov K.V., Mikhlin Yu.V.* Snap-through truss as a vibration absorber // *Journal of Vibration and Control.* 2004. V. 10. P. 291–308.