

УДК 532.516

© 2006 г. М.Я. ПАНОВКО

УПРУГОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СМАЗКА ТОЧЕЧНОГО КОНТАКТА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Формулируется и численно решается задача об изотермической смазке упругогидродинамического (УГД) точечного контакта с изменяющейся во времени по синусоидальному закону внешней нагрузкой. Подобные контакты типичны для подшипников качения и зубчатых передач, в которых контактирующие тела разделены тонким слоем смазки и под воздействием внешней нагрузки упруго деформируются в зоне контакта.

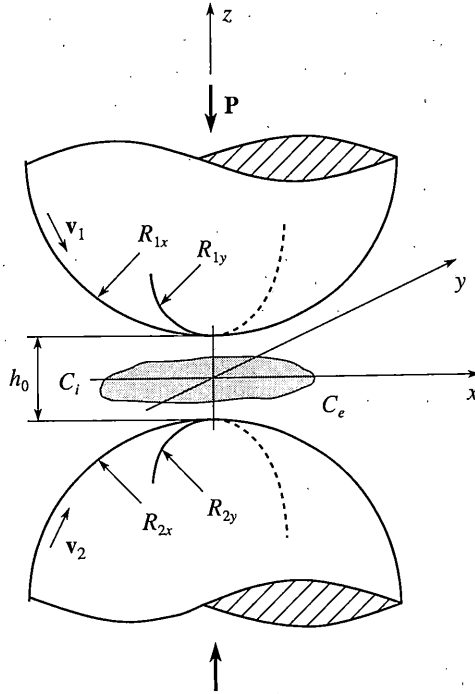
Математическая модель точечного УГД контакта описывается нелинейной интегродифференциальной системой уравнений, включающей уравнение Рейнольдса для давления в смазочной пленке, уравнение для определения толщины смазочной пленки между упругими телами, условие равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта, начальным краевым условиями. Расположение входной части границы области смазанного контакта считается заданным. Для определения расположения выходной (свободной) части границы, отделяющей область смазанного контакта от области кавитации, задача формулируется как задача дополненности. Вычислительный алгоритм решения системы уравнений и неравенств, описывающих УГД контакт, основывался на методе Ньютона и применении неявной схемы при аппроксимации нестационарных уравнений.

Получены численные решения для тяжелонагруженного УГД контакта при различных значениях частоты и амплитуды гармонической составляющей внешней нагрузки. Показаны особенности влияния динамического нагружения на распределения давления и толщины смазочной пленки в зоне контакта.

1. Введение. Задачи об упругогидродинамической (УГД) смазке возникают при анализе процессов в зоне контакта смазанных упругих тел, образующих различные узлы трения. Режим упругогидродинамической смазки характеризуется наличием тонкой смазочной пленки, толщина которой в несколько раз превосходит высоту шероховатости поверхностей, и упругой деформацией тел в зоне контакта. Подшипники качения (роликовые, шариковые) и зубчатые передачи являются типичными примерами узлов трения со смазанными сосредоточенными контактами, работающими в условиях УГД смазки.

Сосредоточенные контакты подразделяются на линейные и точечные в зависимости от конфигурации первоначального (до деформации) касания двух несмазанных контактирующих тел. Примером линейного контакта является контакт двух соосно расположенных бесконечно длинных цилиндров, точечного – контакт двух сферических тел.

В большинстве работ, посвященных сосредоточенным УГД контактам, анализ процессов в зоне контакта осуществлялся в предположении, что внешняя нагрузка не зависит от времени (см. обзорную статью [1]). В реальных условиях функционирования узлов трения это допущение весьма часто может не соблюдаться из-за вибраций агрегатов технических устройств. К настоящему времени эффекты динамического нагружения в



Фиг. 1

сосредоточенных УГД контактах анализировались в крайне ограниченном числе публикаций, среди которых следует отметить работы [2, 3]. В этих работах представлен ряд результатов, демонстрирующих влияние внешней изменяющейся во времени по гармоническому закону нагрузки на распределения давления и толщины смазочной пленки в сосредоточенном УГД контакте. Результаты, изложенные в этих работах, получены для условий легкого и умеренного нагружения линейного [2] и точечного [3] контактов.

Настоящая работа посвящена изучению влияния частоты и амплитуды внешней нагрузки, изменяющейся во времени по синусоидальному закону, на параметры тяжело нагруженного точечного УГД контакта. Смазка изотермического УГД контакта описывалась нестационарной нелинейной системой интегродифференциальных уравнений и неравенств, численно решаемых методом Ньютона с использованием неявной схемы.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача о смазке точечного УГД контакта (см. фиг. 1) в условиях динамического нагружения. В области контакта вводится подвижная система координат, ось z которой проходит через центры кривизны контактирующих тел, а плоскость xy совпадает со срединной плоскостью в смазочном слое $z = 0$. Предполагается, что гладкие поверхности контактирующих тел движутся с линейными скоростями $v_1(v_{1x}, v_{1y})$, $v_2(v_{2x}, v_{2y})$; смазка, вовлекаемая поверхностями в зазор между ними, обладает свойствами несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости и находится в изотермических условиях; к сосредоточенному контакту упругих тел приложена внешняя стационарная сила P_0 , а затем – дополнительная осциллирующая сила $\Delta P \sin \omega t$, т.е., начиная с момента времени $t = 0$, к УГД контакту приложена сила $P(t) = P_0(1 + A \sin \omega t)$, где A и ω – соответственно амплитуда и частота гармонической составляющей.

Система уравнений, описывающая течение смазки в изотермическом УГД контакте, выводится с учетом ряда допущений (их обсуждение и вывод уравнений см., например, в [4–6]) из уравнений гидродинамики и теории упругости. Основные допущения заключа-

ются в следующем: толщина слоя смазки существенно меньше радиусов кривизны поверхностей контактирующих тел, локально контактирующие тела заменяются полупространствами, динамические эффекты в телах пренебрежимо малы (выполняется условие квазистатичности деформации), инерционные и объемные силы по сравнению с силами вязкого трения и давления в смазке пренебрежимо малы, течение масляного слоя рассматривается как ламинарное, соблюдаются условия прилипания жидкости к поверхности. Зависимость вязкости смазки от давления полагается известной. Известными являются физические свойства упругих тел. Система УГД уравнений замыкается начальными условиями для давления и зазора в области контакта в момент времени $t = 0$ и краевыми условиями для давления на кривой, ограничивающей рассматриваемый смазочный слой в плане на плоскости xy . Причем часть границы области контакта – входная – задается; оставшая часть границы – выходная (свободная), отделяющая область смазки от кавитационной, – определяется в процессе решения задачи.

В итоге задача о точечном УГД контакте сводится к следующей системе уравнений с начально-краевыми условиями:

$$L(p) = \nabla \left(\frac{h^3}{12\mu} \nabla p - \frac{v_1 + v_2}{2} h \right) - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

$$h(x, y, t) = h_0(0, 0, t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E^*} \left(\iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} - \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) \quad (2.2)$$

$$M(p) = \iint_{\Omega} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - P_0(1 + A \sin \omega t) = 0 \quad (2.3)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad h_0(0, 0, 0) = h_0^0, \quad p|_C = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{C_e} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \right), \quad \mu = \mu(p)$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}}, \quad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}}$$

где x, y, ξ, η – декартовы координаты; t – время; p – давление; p^0 – давление в начальный момент времени; h – толщина смазочного слоя (зазор); h_0 – зазор в центре контакта; h_0^0 – зазор в центре контакта в начальный момент времени; μ – вязкость смазки; E_1, E_2 – модули упругости контактирующих тел; E^* – эффективный модуль упругости; v_1, v_2 – коэффициенты Пуассона упругих тел; $R_{1x}, R_{1y}, R_{2x}, R_{2y}$ – главные радиусы кривизны упругих тел; R_x, R_y – эффективные радиусы кривизны; Ω – область контакта; C – граница области контакта; C_e – выходная граница области контакта $C_e = CS_i$, где C_i – входная граница.

Система (2.1)–(2.4) является нелинейной интегродифференциальной системой уравнений, включающей уравнение Рейнольдса (2.1), уравнение для определения толщины

смазочной пленки между упругими телами (2.2), условие равенства внешней нагрузки интегралу от давления по области контакта (2.3), начально-краевые условия для давления и начальное условие для зазора в центре контакта (2.4). В уравнении (2.2) в общем случае $R_x \neq R_y$ и поверхности в окрестности точки первоначального (до деформаций) касания описываются эллипсоидальными поверхностями. В процессе решения системы уравнений определяются распределения давления, толщины смазочной пленки в зоне контакта, а также выходная граница.

Решение задачи должно удовлетворять граничным условиям для давления (см. два последних равенства в (2.4)) на входной части границы области контакта C_i , которая задана, и на заранее неизвестной границе выхода C_e , $C = C_i \cup C_e$. Входная и выходная границы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} C_i \text{ задано, если } (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})|_{C_i} < 0 \\ (\nabla p \cdot \mathbf{n})|_{C_e} = 0, \text{ если } (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})|_{C_i} \geq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{2} h - \frac{h^3}{12\mu} \nabla p$$

где $\mathbf{Q}$ – вектор плотности потока жидкости, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали.

Входная граница задается на достаточном удалении от центра контакта, с тем чтобы расположение этой части границы не влияло на решение задачи (подобным расположением C_i обеспечивается выполнение условия обильной смазки).

Выходная граница C_e отделяет зону смазки, где $p > 0$, от кавитационной, где полагается $p = 0$. Кавитация в жидкости возникает в расширяющейся части зазора из-за растягивающих напряжений. Граничное условие для давления на свободной границе $(\nabla p \cdot \mathbf{n})|_{C_e} = 0$, известное как условие Рейнольдса (кавитационное), удовлетворяет требованию сплошности течения смазки и применяется для решения различных задач контактной гидродинамики [4–6].

Для определения расположения выходной границы C_e задача о смазке УГД контакта формулируется как задача дополнителности, согласно которой давление смазки в той или иной точке контакта определяется уравнением Рейнольдса $L(p) = 0$, если $p > 0$, либо тривиальным решением $p = 0$, если $L(p) < 0$. Условие $L(p) < 0$ выполняется в кавитационной области, где толщина пленки дивергентна в пространстве и во времени. Обоснование применимости принципа дополнителности для решения задач о смазке УГД контакта подробно описано в работах [3, 7]. В работе [8] отмечалось, что при использовании этого подхода удовлетворяется кавитационное условие на C_e .

3. Основные уравнения. Для системы (2.1)–(2.4) вводятся следующие безразмерные переменные:

$$(x', y', \xi', \eta') = (x, y, \xi, \eta)/a_H, \quad t' = t/t_0, \quad p' = p/p_H$$

$$t_0 = 1/\omega, \quad Z = 2a_H/(\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|t_0) = 2a_H\omega/(\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|)$$

$$h' = h/h_0(t), \quad \mu' = \mu/\mu_0, \quad H_0(t) = 2R_x h_0(t)/a_H^2, \quad \varepsilon = R_x/R_y, \quad \beta = a_H/b_H$$

$$e = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \varphi(\beta) = (K(e) - D)/\beta^4 D, \quad D = (K(e) - E(e))/e^2$$

$$V = 24\mu_0\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|R_x^2/p_H a_H^3, \quad Q'_0 = Q_0/p_H, \quad p_H = \varepsilon a_H E^*/4\beta^2 R_x D$$

$$P' = P(t)/p_H a_H^2, \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|$$

Здесь a_H, b_H – полуоси герцевского эллиптического контакта, расположенные соответственно по осям x и y ($b_H \geq a_H$); p_H – максимальное герцевское давление; t_0 – характерное время процесса; Z – частотный параметр; μ_0 – вязкость при давлении окружающей среды; H_0 – безразмерная толщина смазочного слоя в начале координат; V – нагрузочно-скоростной параметр; Q_0 – пьезокоэффициент вязкости смазки; $K(e), E(e)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно; e – эксцентриситет эллипса контакта; β – определяется из уравнения $\beta^2 \Phi(\beta) = R_x/R_y$. Значения a_H, b_H и p_H оцениваются по формулам для стационарного несмазанного точечного контакта.

Система (2.1)–(2.4) в безразмерной форме имеет следующий вид (штрихи далее опущены):

$$L(p) = \nabla \left(H_0^2 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - V \mathbf{v} h \right) - VZ \frac{\partial h}{\partial t} - VZ \frac{h}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

$$h(x, y, t) = 1 + \frac{x^2 + \varepsilon y^2}{H_0(t)} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D H_0(t)} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (3.2)$$

$$M(p) = \iint_{\Omega} p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \frac{2\pi}{3\beta} (1 + A \sin \omega t) = 0 \quad (3.3)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad H_0(0) = H_0^0, \quad p|_C = \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{C_e} = 0 \quad (3.4)$$

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad \mu = \mu(p)$$

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

Местоположение выходной границы определяется на основе условий дополнителъности, если $(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n})|_{C_e} \geq 0$:

$$L(p) = 0, \quad p > 0; \quad p = 0, \quad L(p) < 0 \quad (3.5)$$

В системе уравнений и неравенств (3.1)–(3.5) заданными считаются входная граница C_i , нагрузочно-скоростной параметр V (для тяжёлонагруженного контакта $V \ll 1, Q_0 \gg 1$), частотный параметр Z , вектор скорости $\mathbf{v}(v_x, v_y)$, параметр $\varepsilon = R_x/R_y$, зависимость вязкости от давления $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$ с задаваемым пьезокоэффициентом вязкости смазки Q_0 , начальное условие $p^0(x, y), H_0^0$, в качестве которого выбирается численное решение стационарной задачи. Решение задачи представляется распределениями давления $p(x, y, t)$ и зазора $h(x, y, t)$, расположением выходной границе $x_e(y, t)$, безразмерной толщиной смазочной пленки $H_0(t)$ в начале координат.

Из соотношения (3.2) после дифференцирования по t следует

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{h-1}{H_0} \frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D H_0} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (3.6)$$

Учитывая (3.6), уравнение Рейнольдса (3.1) может быть записано в следующем виде, удобном для численного решения УГД задачи

$$L(p) = \nabla \left(H_0 \frac{h^3}{\mu} \nabla p - H_0 V \nabla h \right) - \\ - VZ \frac{\partial H_0}{\partial t} - VZ \frac{1}{\pi \beta^2 D} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = 0 \quad (3.7)$$

4. Численный метод решения. Расчетная область, включающая область контакта Ω , где $p > 0$, и кавитационную область, где $p = 0$, в плоскости xu задается в виде прямоугольника $\{x, y : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ и покрывается неравномерной разнесенной декартовой сеткой с системой узлов (x_i, y_j) , $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. Давление определяется в узлах (x_i, y_j) , толщина смазочной пленки – в узлах $(x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$. После интегрирования уравнения (3.7) по области $\Delta\Omega_{ij}$, занимаемой расчетной ячейкой (i, j) внутри контура (l_{ij}) , получаем

$$L_1(p) = \int_{(l_{ij})} \left[H_0 \frac{h^3}{\mu} (\nabla p \cdot \mathbf{n}) - H_0 V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right] dl - \\ - VZ \left[\frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \right] \Delta\Omega_{ij} = 0 \quad (4.1)$$

В условиях дополненности (3.5) оператор $L(p)$ заменяется на $L_1(p)$.

Алгоритм решения системы уравнений и неравенств, описывающих УГД контакт, основан на методе Ньютона с использованием неявной схемы при аппроксимации нестационарных уравнений. Линеаризованные на временном шаге $n + 1$ около решения $(p(x, y, t_{n+1}), H_0(t_{n+1}))_k^{n+1}$ уравнения (3.3), (3.4), (4.1) с учетом следующей аппроксимации частных производных по времени:

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} \approx \frac{H_{0,k}^{n+1} + \Delta H_{0,k+1}^{n+1} - H_0^n}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} G p d\xi d\eta \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\iint_{\Omega_k^{n+1}} G (p_k^{n+1} + \Delta p_{k+1}^{n+1}) d\xi d\eta - \iint_{\Omega^n} G p^n d\xi d\eta \right]$$

имеют вид

$$\int_{(l_{ij})} \left\{ \left[3H_0 \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} - H_0 V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial H_0} + H_0 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial H_0} - V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h \right]_k^{n+1} \Delta H_{0,k+1}^{n+1} - \right. \\ \left. - \left(H_0 \frac{h^3}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial n} \right)_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} + \left(H_0 \frac{3h^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial p} \right)_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} + \left(H_0 \frac{h^3}{\mu} \right)_k^{n+1} \frac{\partial \Delta p_{k+1}^{n+1}}{\partial n} - \right. \\ \left. - \left(H_0 V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial h}{\partial p} \right)_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} \right\} dl - VZ \left(\Delta H_{0,k+1}^{n+1} + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D} \iint_{\Omega_k^{n+1}} G \Delta p_{k+1}^{n+1} d\xi d\eta \right) \frac{\Delta\Omega_{ij}}{\Delta t} =$$

$$= - \int_{(l_{ij})} \left\{ \left(H_0^3 \frac{\partial p}{\mu \partial n} \right)_k^{n+1} - (H_0 V(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) h)_k^{n+1} \right\} dl + \\ + VZ \left[(H_{0,k}^{n+1} - H_0^n) + \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D} \left(\int_{\Omega_k^{n+1}} G p_k^{n+1} d\xi d\eta - \int_{\Omega^n} G p^n d\xi d\eta \right) \right] \frac{\Delta \Omega_{ij}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

$$\int_{\Omega_k^{n+1}} \Delta p_{k+1}^{n+1}(\xi, \eta, t_{n+1}) d\xi d\eta = \frac{2\pi}{3\beta} P(t_{n+1}) - \int_{\Omega_k^{n+1}} p_k^{n+1}(\xi, \eta, t_{n+1}) d\xi d\eta \quad (4.3)$$

$$p(x, y, 0) = p^0(x, y), \quad H_0(0) = H_0^0, \quad \Delta p_{k+1}^{n+1}|_C = 0 \\ \Delta p_{k+1}^{n+1} = p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}, \quad \Delta H_{0,k+1}^{n+1} = H_{0,k+1}^{n+1} - H_{0,k}^{n+1} \quad (4.4)$$

Здесь Δt – шаг по времени; n – номер шага по времени; k – номер итерации на текущем временном шаге; $(\partial h / \partial H_0)_k^{n+1}$ – частная производная от h_k^{n+1} по $H_{0,k}$, вычисляемая по соотношению (3.2); $(\partial \mu / \partial p)_k^{n+1}$ – частная производная от μ по p , вычисляемая по зависимости $\mu = \mu_0 \exp(Q_0 p)$; $(\partial h / \partial p)_k^{n+1}$ – линейный оператор, представляющий собой производную h_k^{n+1} по p_k^{n+1} и действующий на Δp_{k+1}^{n+1} , имеет вид

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_k^{n+1} \Delta p_{k+1}^{n+1} = \frac{\varepsilon}{\pi \beta^2 D H_{0,k}^{n+1}} \int_{\Omega_k^{n+1}} G(x, y, \xi, \eta) \Delta p_{k+1}^{n+1}(x, y, t_{n+1}) d\xi d\eta \quad (4.5)$$

Система (4.2)–(4.4) является исходной для построения конечноразностной схемы, при этом система разностных уравнений на каждом итерационном шаге имеет следующую структуру:

$$\left\| \begin{pmatrix} (a_{qr})_{mm} & (b_q)_m \\ (c_r)_m^T & 0 \end{pmatrix} \right\|_k^{n+1} \left\| \begin{pmatrix} (\Delta p_r)_m \\ \Delta H_0 \end{pmatrix} \right\|_{k+1}^{n+1} = - \left\| \begin{pmatrix} L_1(p_r)_m \\ M(p_r) \end{pmatrix} \right\|_k^{n+1}$$

где элементами матрицы Якоби порядка $(m+1)$ являются полная квадратная матрица $(a_{qr})_{mm}$ порядка m , вектор-столбец $(b_q)_m$ и вектор-строка $(c_r)_m^T$ ($q, r = 1, \dots, m$). Значение m равно числу узлов сетки, в которых определяется давление, и зависит от местоположения выходной границы.

Один шаг итерационного процесса состоит в решении разностных уравнений относительно $\Delta H_{0,k+1}^{n+1}(t_{n+1})$, $\Delta p_{k+1}^{n+1}(x_i, y_j, t_{n+1})$ методом гауссова исключения с частичным выбором ведущего элемента, вычисления $H_{0,k+1}^{n+1} = H_{0,k}^{n+1} + \Delta H_{0,k+1}^{n+1}$, $p_{k+1}^{n+1} = p_k^{n+1} + \Delta p_{k+1}^{n+1}$, вычисления $h_{k+1}^{n+1}(x_{i-1/2}, y_{j-1/2}, t_{n+1})$ по соотношению (3.2) и определении выходной границы $x_{e,k+1}^{n+1}(y_j, t_{n+1})$.

Интеграл в выражениях (3.2) и (4.5) вычислялся по кубатурной формуле для сингулярных интегралов [9]:

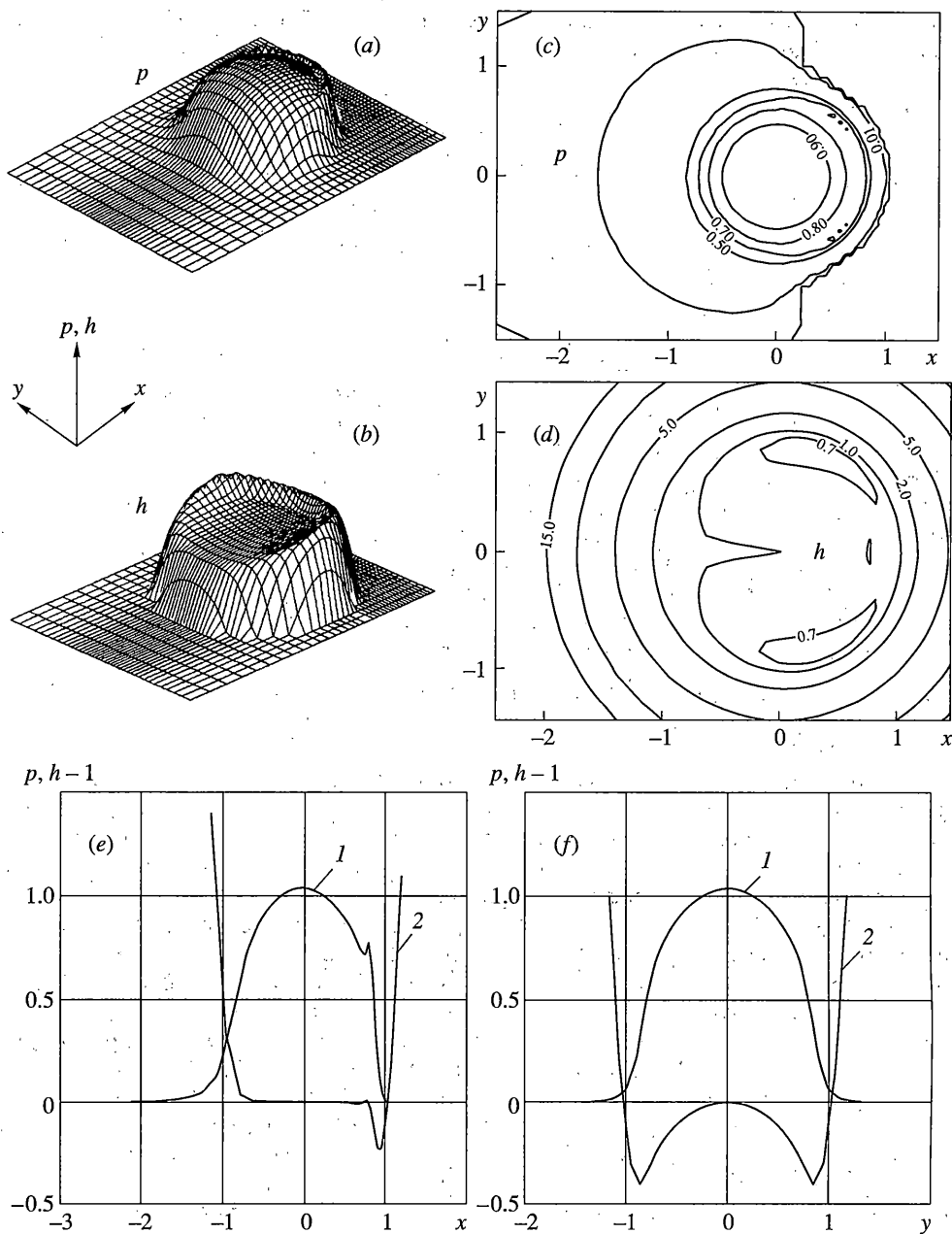
$$\iint_{\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{(\xi - x_{m-1/2})^2 + (\eta - y_{n-1/2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right) p(\xi, \eta, t) \equiv \\ \equiv \sum_{j=1}^{NY} \sum_{i=i1(j)}^{i2(j)} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{m-1/2})^2 + (y_j - y_{n-1/2})^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{m0-1/2})^2 + (y_j - y_{n0-1/2})^2}} \right) \times \\ \times p(x_i, y_j, t_{n+1})(x_{i+1/2} - x_{i-1/2})(y_{j+1/2} - y_{j-1/2})$$

где $i1(j)$, $i2(j)$ – целочисленные массивы, описывающие расположение соответственно входной и выходной границ ($m = 1, \dots, NX + 1$; $n = 1, \dots, NY + 1$). Массив $i2(j)$ определяется, исходя из условий дополнителности (3.5), на каждой итерации. Узел $(m0-1/2, n0-1/2)$ соответствует началу координат. Проверка условий дополнителности (3.5) осуществляется в каждом узле расчетной сетки после решения уравнения Рейнольдса. Узлы некавитирующей области, которые не удовлетворяют условию $p > 0$, помещаются в область кавитации, а узлы области кавитации, в которых нарушается условие $L(p) < 0$, помещаются в некавитирующую область. Процедура решения уравнения Рейнольдса и проверки принадлежности узлов кавитирующей и некавитирующей областям осуществляется в итерационном цикле. Итерационный процесс продолжался до достижения требуемой относительной точности решения δ , т.е. $\max(|H_{0,k+1}^{n+1}/H_{0,k}^{n+1} - 1|, |p_{k+1}^{n+1}/p_k^{n+1} - 1|, |h_{k+1}^{n+1}/h_k^{n+1} - 1|, |x_{e,k+1}^{n+1}/x_{e,k}^{n+1} - 1|) < \delta$.

После выполнения заданных условий по точности решения, осуществлялся переход на новый шаг по времени.

5. Результаты расчетов. Изложенный выше вычислительный алгоритм был применен для расчета тяжело нагруженного точечного УГД контакта двух упругих тел, поверхности которых в окрестности точки касания описываются сферическими поверхностями с равными радиусами кривизны ($\epsilon = 1$, $\beta = 1$, $D = \pi/4$), при наличии в зоне контакта смазочной пленки со свойствами несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости. Вектор скорости качения задавался вдоль оси x , т.е. имел компоненты $v_x = 1$, $v_y = 0$. Изменение во времени внешней нагрузки задавалось по гармоническому закону в виде функции $P(t) = 2\pi(1 + \text{Asin}(t))/3$ с амплитудой A и частотой $\omega = 1/t_0$. Численное моделирование осуществлялось на сетке 40×40 во временном диапазоне $0 \leq t \leq 28$ с шагом по времени $\Delta t = 0.2$ при следующих значениях параметров задачи: $Q_0 = 5$, $V = 0.01-0.1$, $Z = 0.1-10$, $A = 0.2$ и $A = 0.5$. В расчетах относительная точность задавалась равной $\delta = 0.001$. Дальнейшее уменьшение δ (до $\delta = 0.00001$ в ряде предварительных расчетов) практически не влияло на значения вычисляемых величин, существенно увеличивая при этом время счета. Представленные далее в графическом виде результаты относятся к случаю, когда $V = 0.1$, $Q_0 = 5$.

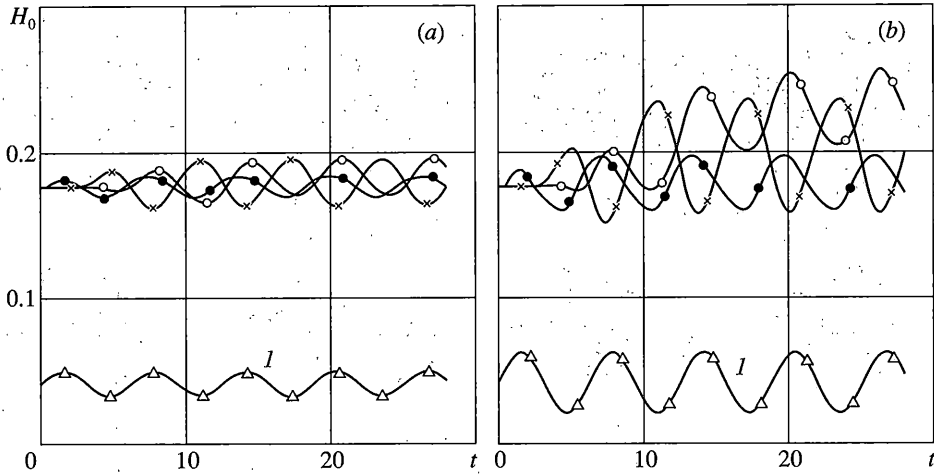
Начальные условия для нестационарной УГД задачи определялись решением стационарной задачи для тех же параметров. При этом использовался стационарный вариант изложенного выше алгоритма. Решение стационарной задачи подробно представлено распределениями давления и зазора на фиг. 2: в виде поверхностей (фиг. 2, а, в), в виде изолиний (фиг. 2, с, d), графиками в плоскостях сечений $y = 0$ и $x = 0$ (фиг. 2, е, f). На фиг. 2, в распределение зазора $h(x, y, 0)$ для наглядности показано как $-h(x, y, 0)$. На фиг. 2, е, f кривая 1 относится к распределению давления, кривая 2 – к распределению зазора. Представленные распределения демонстрируют характерные особенности рас-



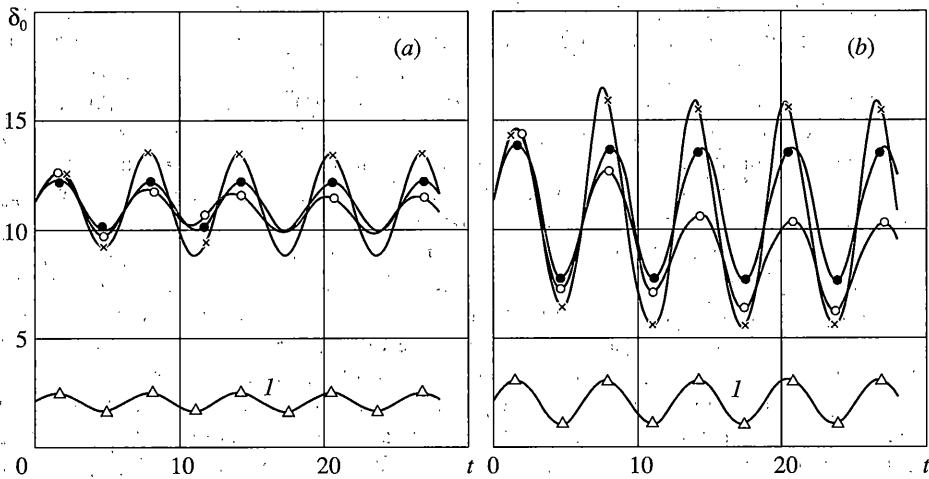
Фиг. 2

пределений давления и зазора в точечном тяжело нагруженном УГД контакте: уплотнение зазора в герцевской области, образование пиков давления и уменьшение зазора в окрестности выходной границы смазочной пленки, расположение выходной границы.

В процессе численного моделирования нестационарного УГД контакта были получены решения на каждом шаге по времени для всего интервала интегрирования. Так, на



Фиг. 3

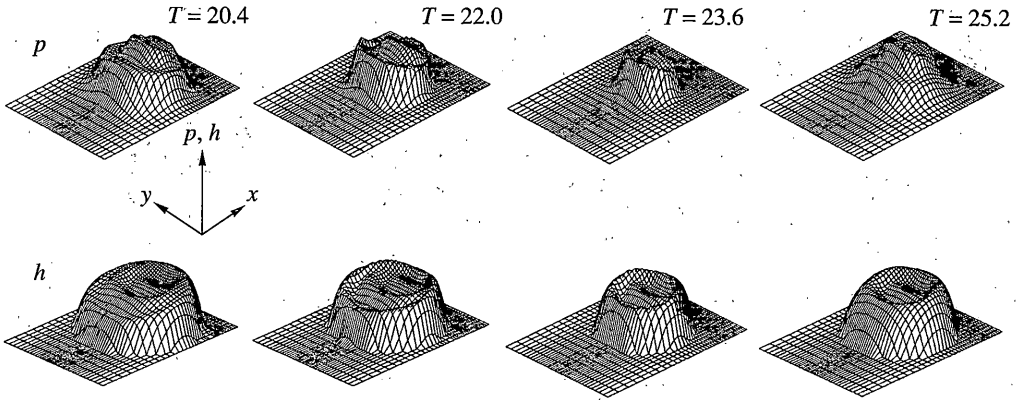


Фиг. 4

фиг. 3, 4 показаны изменения во времени безразмерной толщины смазочной пленки H_0 и сближения тел δ_0 в центре контакта соответственно в зависимости от внешней нагрузки $P(t)$ (кривые I) для двух значений амплитуды $A = 0.2$ (фиг. 3, а; 4, а) и $A = 0.5$ (фиг. 3, б; 4, б). Частотный параметр для представленных на фиг. 3, 4 зависимостей задавался равным $Z = 1$ (темные точки), 5 (косые кресты), 10 (светлые точки). Значения δ_0 оценивались по упругой деформации в центре контакта, исходя из следующего выражения

$$\delta_0(t) = \frac{4}{\pi^2 H_0} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

В начальной стадии динамического нагружения имеет место переходной процесс, по завершении которого наблюдаются установившиеся колебания H_0 и δ_0 с периодом колебаний, равным периоду колебаний внешней нагрузки (см. фиг. 3, 4). При этом колеба-



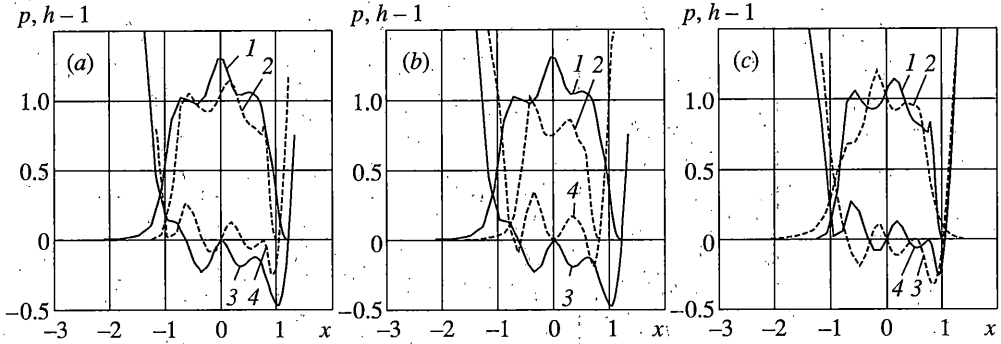
Фиг. 5

ния H_0 в отличие от колебаний δ_0 совершаются со сдвигом по фазе относительно колебаний нагрузки $P(t)$ (на фиг. 3 нагрузка равна $P(t)/50$). В режиме установившихся колебаний, как следует из рассмотрения фиг. 3, 4, при фиксированном значении амплитуды A и увеличении частотного параметра Z в диапазоне от $Z = 1$ до $Z = 10$ амплитудные значения H_0 и δ_0 сначала возрастают, а затем снижаются. С увеличением A от $A = 0.2$ до $A = 0.5$ при фиксированном значении Z амплитудные значения H_0 и δ_0 возрастают. Средние значения H_0 и δ_0 , как видно на фиг. 3, а и 4, а ($A = 0.2$, Z в диапазоне от $Z = 1$ до $Z = 10$), практически равны своим начальным значениям при $t = 0$. Однако при $A = 0.5$ средние значения H_0 больше, а средние значения δ_0 меньше своих начальных значений, причем разница возрастает с ростом Z (см. фиг. 3, б и 4, б).

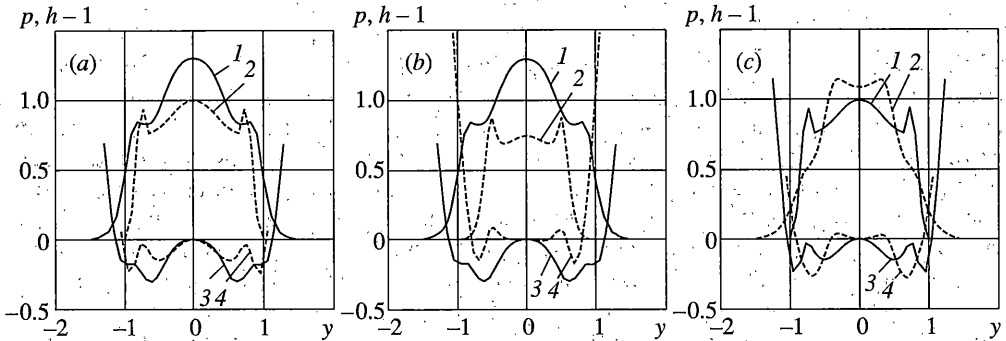
Из рассмотрения пространственных распределений давления p и зазора h в различных моменты времени установившихся колебаний, представленных на фиг. 5 ($A = 0.5$, $Z = 10$), следует, что эти распределения значительно отличаются от распределений в начальный момент времени (см. фиг. 2). Распределения p и h на фиг. 5 показаны для моментов времени, отстоящих друг от друга на величину $\Delta t \approx \pi/2$, в которые внешняя нагрузка достигает соответственно максимального значения при $t = 20.4$, среднего при $t = 22.0$ и $t = 25.2$, минимального при $t = 23.6$, т.е. фрагментарно прослеживаются изменения p и h за период колебаний внешней нагрузки. На фиг. 6 показаны распределения p и h в плоскостях сечений $y = 0$ (см. фиг. 6, а, б, с) и $x = 0$ (см. фиг. 7, а, б, с) в упомянутые выше моменты времени. Распределения p и h представлены на этих рисунках для двух различных моментов времени (сплошные 1 и пунктирные 2 кривые относятся к p соответственно в предшествующий и последующий моменты времени, сплошные 3 и пунктирные 4 кривые – к h в те же моменты времени). На фиг. 6, а и 7, а распределения p и h относятся к временам $t = 20.4$ и $t = 22.0$, на фиг. 6, б и 7, б – к временам $t = 20.4$ и $t = 23.6$, на фиг. 6, с и 7, с – к временам $t = 22.0$ и $t = 25.2$.

Особенность показанных на фиг. 5 и фиг. 6 распределений проявляется в волнистости распределений h при высоких значениях частотного параметра Z . Распределения h , подобные представленным на фиг. 5, 6, но с меньшими амплитудными значениями волнистости, наблюдались в случае $A = 0.2$ при прочих равных условиях. С уменьшением частотного параметра Z при прочих равных условиях волнистость h снижалась. Так например, в случае $Z = 5$ число модуляций h было практически вдвое меньше, чем в случае $Z = 10$.

Наблюдаемые особенности распределения толщины смазочной пленки, по всей вероятности, могут быть объяснены тем фактом, что в центральной области УГД контакта,



Фиг. 6



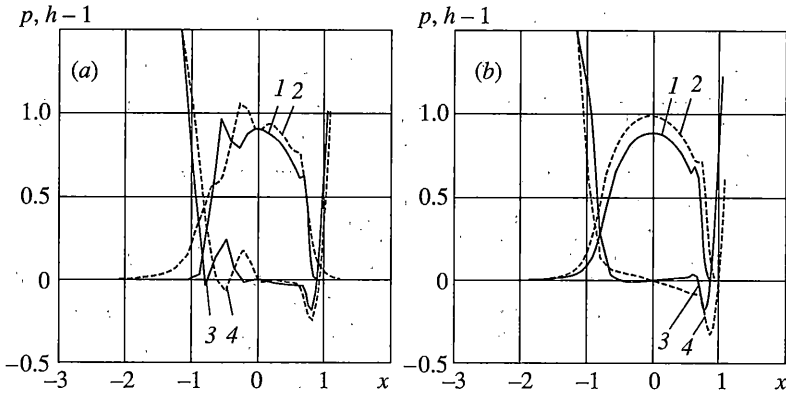
Фиг. 7

где вязкость достигает больших значений (в расчетах безразмерные значения вязкости $\mu \sim 10^3$), и следовательно, пренебрежимо малым становится пуазейлевский член $H_0^2 h^3 \nabla p / \mu$, уравнение Рейнольдса (3.1) приближенно сводится к уравнению переноса

$$\frac{\partial}{\partial t}(H_0 h) + \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial x}(H_0 h) = 0$$

общее решение которого имеет вид бегущей волны $h(x, t) = \psi(x - t/Z)/H_0(t)$. Из чего следует, что возмущение толщины смазочной пленки на входе в контакт, возникающее вследствие действия внешней возбуждающей силы, распространяется вниз по потоку со скоростью, численно равной $1/Z$. Уравнение переноса получено с учетом, что безразмерные компоненты вектора скорости качения $u_x = 1$, $u_y = 0$.

Возникновение и распространение возмущения толщины смазочной пленки во входной части контакта на стадии переходного процесса прослеживается по распределениям $h(x, 0, t)$ в два различных момента времени на фиг. 8, а (сплошная 1 и штриховая 2 кривые относятся к распределениям $p(x, 0, t)$ соответственно в моменты времени $t = 4.0$ и $t = 6.0$; сплошная 3 и штриховая 4 кривые – к распределениям $h(x, 0, t)$ соответственно в эти же моменты времени). Иная картина наблюдается при частотном параметре $Z = 1$ (см. фиг. 8, б, обозначения те же, что и на фиг. 8, а). Из сопоставления фиг. 8, а и фиг. 8, б следует, что с уменьшением частотного параметра Z модуляции толщины смазочной пленки проявляются все в меньшей степени.



Фиг. 8

Распространение возмущений толщины смазочной пленки вдоль УГД контакта анализировалось ранее в [10–13] при исследовании влияния шероховатости поверхности на распределения толщины смазочной пленки и давления в зоне контакта. В этих экспериментальных [10, 11] и численных [12, 13] исследованиях возмущение толщины смазочной пленки создавалось нерегулярностью поверхности (типа бугорка или лунки) во входной части зазора. Возникшее на входе возмущение затем распространялось вниз по потоку со скоростью качения $v_x = (v_{1x} + v_{2x})/2$. Модуляции толщины смазочной пленки наблюдались также при численном исследовании точечного УГД контакта, в математической модели которого учитывалась инерция системы (вместо уравнения статики применялся второй закон Ньютона [14]). В этом случае возмущение толщины смазочной пленки создавалось при выводе системы из равновесия заданием начального значения сближения тел отличным от сближения, полученного при решении стационарной задачи. После вывода системы из равновесия сближение тел из-за демпфирующего влияния вязкости смазочной пленки возвращалось к стационарному значению, совершая затухающие колебания. При этом вдоль зоны контакта распространялись возникшие на входе в зазор модуляции толщины смазочной пленки.

6. Заключение. На основе изложенного в работе вычислительного алгоритма получены численные решения задачи о точечном УГД контакте при внешней нагрузке, изменяющейся во времени по синусоидальному закону. Показано, что по завершении переходного процесса наблюдается режим установившихся колебаний параметров УГД контакта, частота которых равна частоте возбуждающей силы. При прочих равных условиях амплитудные значения толщины смазочной пленки в центре контакта H_0 и сближения тел в центре контакта δ_0 с ростом частотного параметра сначала увеличиваются, а затем уменьшаются. В случае больших значений частотного параметра и амплитуды колебаний возбуждающей силы средние значения H_0 и δ_0 отличаются от значений этих величин в условиях стационарной задачи.

Из полученных результатов следует, что при больших частотах внешней возбуждающей силы распределения давления и толщины смазочной пленки в центральной зоне контакта значительно отличаются от соответствующих распределений в случае стационарной внешней нагрузки. Это отличие, в частности, состоит в том, что зазор между контактирующими поверхностями (толщина смазочной пленки) при больших частотах внешней нагрузки приобретает в направлении скорости качения волнистую форму.

Автор благодарит И.Г. Горячеву и В.М. Александрова за полезное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dowson D., Ehret P.* Past, present and future studies in elastohydrodynamics // *Proc. Instn. Mech. Engrs. Pt J. J. Engng Tribol.* 1999. V. 213. № 5. P. 317–333.
2. *Yang P., Wen S.* The behavior of non-newtonian thermal EHL film in line contacts at dynamic loads // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1992. V. 114. № 1. P. 81–85.
3. *Oh K.P.* The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a nonlinear complementarity problem // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1984. V. 106. № 1. P. 88–95.
4. *Галахов М.А., Гусятников П.В., Новиков А.П.* Математические модели контактной гидродинамики. М.: Наука, 1985. 296 с.
5. *Коднир Д.С.* Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
6. *Dowson D., Higginson G.R.* *Elasto-Hydrodynamic Lubrication.* Oxford: Pergamon Press, 1966. 235 p.
7. *Kostreva M.M.* Elasto-hydrodynamic lubrication: a nonlinear complementarity problem // *Intern. J. Numer. Methods in Fluids*, 1984. V. 4. № 4. P. 377–397.
8. *Oh K.P., Li C.H., Goenka P.K.* Elastohydrodynamic lubrication of piston skirts // *Trans. ASME. J. Tribol.* 1987. V. 109. № 2. P. 356–365.
9. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 253 с.
10. *Kaneta M.* Effects of surface roughness in elastohydrodynamic lubrication // *JSME Intern. Journal.* 1992. Ser. 3. V. 4. № 4. P. 535–546.
11. *Kaneta M., Nishikawa H.* Experimental study on microelastohydrodynamic lubrication // *Proc. Instn. Mech. Engrs. Pt J. J. Engng Tribol.* 1999. V. 213. № 5. P. 371–381.
12. *Greenwood J.A., Morales-Espejel G.E.* The behaviour of transverse roughness in EHL contacts // *Proc. Instn. Mech. Engrs. Pt J. J. Engng Tribol.* 1994. V. 208. № 2. P. 121–132.
13. *Morales-Espejel G.E., Venner C.H., Greenwood J.A.* Kinematics of transverse real roughness in elastohydrodynamically lubricated line contacts using Fourier analysis // *Proc. Instn. Mech. Engrs. Pt J. J. Engng Tribol.* 2000. V. 214. № 6. P. 523–534.
14. *Wijnant Y.H., Venner C.H.* Analysis of an EHL circular contact incorporating rolling element vibration // *Elastohydrodynamics '96, Fundamentals and Application in Lubrication and Traction.* Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 445–456.

Москва

Поступила в редакцию
7.09.2004