

УДК 539.3

© 2006 г. Е. СКАПРЕТТА, В. ТИБУЛЛО

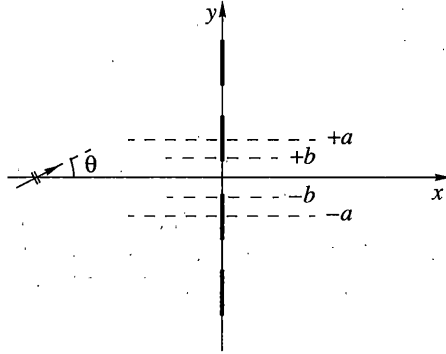
## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ НАКЛОННО ПАДАЮЩИХ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГИХ СРЕДАХ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН

В рамках постановки задачи о распространении волн в поврежденных (упругих) средах с помощью аналитического метода, ранее использовавшегося для решения скалярных задач, исследуется (векторная) задача о косом проникновении продольной плоской волны в периодическую систему коллинеарных трещин. Задача сведена к системе интегральных уравнений для просвета трещин. В рамках однододового приближения найдены аналитические решения и явные выражения для параметров рассеяния. Проведено сравнение полученных решений с результатами численных расчетов других авторов.

**1. Введение.** В [1, 2] был предложен аналитический метод решения задачи о распространении волн в сплошных средах с регулярным распределением дефектов. В настоящей работе в рамках двумерной постановки задачи рассматривается прямое либо косое распространение гармонических плоских скалярных волн через периодическую систему коллинеарных разрывов. В так называемом однододовом режиме с помощью средних (равномерных) приближений, включающих частоту и (или) угол падения, можно получить явные формулы для поля и параметров рассеяния. Данный метод был развит для случаев более общей геометрии задачи (см. [3, 4]; для сравнения, другие классические подходы к решению рассматриваемой проблемы можно найти в [5–10]). В рамках рассматриваемой модели упругого тела указанные разрывы следует понимать как щелевидные трещины в твердой структуре. Таким образом, целью настоящей работы является развитие указанного метода для решения плоской задачи о косом падении продольной плоской волны на периодическую систему трещин в случае, когда поле перемещений содержит две ненулевые компоненты. Аналогичная задача о нормальном падении рассматривалась ранее в [11]. В этой связи будем использовать некоторые результаты, полученные в [2] для соответствующей антиплоской (скалярной) задачи. После сведения (векторной) задачи к интегральным уравнениям для просвета между смежными трещинами (подобно тому, как это было сделано в [2]), используем аналитическое решение [2] (построенное в однододовом режиме) для получения явных выражений для параметров рассеяния. Будет проведено графическое сравнение найденных решений с результатами, полученными в [12] численными методами, и показано удовлетворительное соответствие.

Напомним, что антиплоские и плоские задачи о распространении плоских гармонических горизонтально поляризованных волн сдвига и продольных волн (или вертикально поляризованных волн сдвига), соответственно, не являются связанными и вместе составляют полную систему задач о распространении волн в волновой динамике [13].

**2. Постановка задачи и сведение к интегральным уравнениям.** Рассмотрим неограниченную (двумерную) упругую среду, в которой расположена периодическая система коллинеарных трещин (см. фиг. 1). Введем следующие обозначения:  $2a$  – период решетки и  $2b$  – расстояние между соседними трещинами (около  $|y| = 0, 2a, 4a, \dots$ ). В принятом



Фиг. 1

гармоническом режиме зависимости от времени всех величин содержат общий множитель  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  – круговая частота. Ниже этот множитель опущен.

Для удобства запишем поле перемещений  $\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y)$  в форме представления типа Грина – Ламэ

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1)$$

в котором потенциалы  $\phi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  удовлетворяют (несвязанным) уравнениям Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_1^2 \phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_2^2 \psi = 0$$

В этих формулах  $k_1$  и  $k_2$  – волновые числа продольной и поперечной волн соответственно,  $\omega/k_1 \equiv c_1$  и  $\omega/k_2 \equiv c_2$  – скорости волн в среде ( $c_1 > c_2$ ).

Имеют место следующие линейные определяющие уравнения для компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= c_2^2 \left( 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{xx} &= c_1^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - 2c_2^2 \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этих уравнениях плотность положена равной единице.

В рассматриваемой среде продольная волна вида

$$\phi_0 = e^{ik_1 x \cos \theta} e^{ik_1 y \sin \theta}, \quad \psi_0 = 0 \quad (2.3)$$

падает из  $-\infty$ , вызывая появление рассеянных полей в левой ( $x < 0$ ) и правой ( $x > 0$ ) частях. В этой формуле  $\theta \in [0, \pi/2)$  – угол между направлением падения волны и осью  $x$ . В силу периодичности геометрии задачи, можно рассматривать типичную полосу  $|y| < a$  с просветом  $|y| < b$  между двумя смежными трещинами (расположенными при  $x = 0$ ). Кро-

ме того, потенциалы перемещений в двух главных областях структуры могут быть представлены следующим образом [12, 13]<sup>1</sup>:

$$\varphi^{\text{left}}(x, y) = \left( e^{ik_1 x \cos \theta} + \operatorname{Re} e^{-ik_1 x \cos \theta} + \sum_{n \neq 0} A_n e^{q_n x} e^{-i\pi n y/a} \right) e^{ik_1 y \sin \theta} \quad (2.4)$$

$$\varphi^{\text{right}}(x, y) = \left( T e^{ik_1 x \cos \theta} + \sum_{n \neq 0} C_n e^{-q_n x} e^{-i\pi n y/a} \right) e^{ik_1 y \sin \theta}$$

$$\psi^{\text{left}}(x, y) = \left( \sum_{n \neq 0} B_n e^{r_n x} e^{-i\pi n y/a} + R_\psi e^{-i\tilde{k}x} \right) e^{ik_1 y \sin \theta} \quad (2.5)$$

$$\psi^{\text{right}}(x, y) = \left( \sum_{n \neq 0} D_n e^{-r_n x} e^{-i\pi n y/a} + T_\psi e^{i\tilde{k}x} \right) e^{ik_1 y \sin \theta}$$

где большими буквами обозначены неизвестные константы и  $\tilde{k} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta} (> 0)$ . В выражениях для рядов члены при  $n = 0$  представлены явно. Из условия, что каждый член представленных выше рядов является тривиальным решением соответствующего уравнения Гельмгольца, имеем

$$q_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a} - k_1 \sin \theta\right)^2 - k_1^2}, \quad r_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a} - k_1 \sin \theta\right)^2 - k_2^2} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.6)$$

Где требуется, каждая величина будет обозначена левой либо правой в зависимости от области, к которой она относится.

При этом, одномодовое приближение

$$k_2 + k_1 \sin \theta < \pi/a \quad (2.7)$$

предполагает  $q_n, r_n > 0 \forall n \neq 0$ . Таким образом, при больших расстояниях от системы трещин в уравнениях (2.4), (2.5) отличны от нуля только плоские однородные волны (нулевого порядка)<sup>2</sup>. Соответствующие коэффициенты  $R, T, R_\psi, T_\psi$  будем называть параметрами рассеяния структуры. В частности, для падающей продольной волны  $R$  и  $T$  – коэффициенты отражения и прохождения, соответственно, а  $R_\psi$  и  $T_\psi$  – коэффициенты трансформации.

Из условия, что трещины в слое не выдерживают напряжений, получаем

$$\tau_{xy} = \sigma_{xx} = 0, \quad x = 0, \quad b < |y| < a \quad (2.8)$$

На просвете ( $x = 0, |y| < b$ ) выполнено условие непрерывности напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\sigma_{xx}$ . Введем две новые функции  $g_\tau(y)$  и  $g_\sigma(y)$  ( $|y| < b$ ) следующим образом:

$$\tau_{xy}^{\text{left}}(0, y) = \tau_{xy}^{\text{right}}(0, y) = \begin{cases} g_\tau(y) e^{ik_1 y \sin \theta}, & |y| < b \\ 0, & b < |y| < a \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\sigma_{xx}^{\text{left}}(0, y) = \sigma_{xx}^{\text{right}}(0, y) = \begin{cases} g_\sigma(y) e^{ik_1 y \sin \theta}, & |y| < b \\ 0, & b < |y| < a \end{cases}$$

<sup>1</sup> Выражения в скобках в правых частях выражений представляет собой приведенные потенциалы в терминах [12, разд. 3].

<sup>2</sup> Это эквивалентно тому, что длина поперечной волны в среде всегда превышает период  $2a$ , см. [12].

Далее, с помощью уравнений (2.9) получим выражения для всех коэффициентов уравнений (2.4), (2.5) через новые функции. Начнем с вычисления полей всех величин в уравнении (2.9) с помощью уравнений (2.2) и (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}^{\text{left}}(0, y)}{c_2 e^{\frac{1}{2} i k_1 y \sin \theta}} &= 2(R-1)k_1^2 \sin \theta \cos \theta + R_\Psi(k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta) + \\ &+ \sum_{n \neq 0} \left[ 2i \left( k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a} \right) q_n A_n - (2r_n^2 + k_2^2) B_n \right] e^{-i\pi n y/a} \\ \frac{\tau_{xy}^{\text{right}}(0, y)}{c_2 e^{\frac{1}{2} i k_1 y \sin \theta}} &= -2T k_1^2 \sin \theta \cos \theta + T_\Psi(k_2^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta) - \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{n \neq 0} \left[ 2i \left( k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a} \right) q_n C_n + (2r_n^2 + k_2^2) D_n \right] e^{-i\pi n y/a} \\ \frac{\sigma_{xx}^{\text{left}}(0, y)}{c_2 e^{\frac{1}{2} i k_1 y \sin \theta}} &= (2k_1^2 \sin^2 \theta - k_2^2)(1+R) + 2R_\Psi \tilde{k} k_1 \sin \theta + \\ &+ \sum_{n \neq 0} \left[ (2r_n^2 + k_2^2) A_n + 2i \left( k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a} \right) r_n B_n \right] e^{-i\pi n y/a} \\ \frac{\sigma_{xx}^{\text{right}}(0, y)}{c_2 e^{\frac{1}{2} i k_1 y \sin \theta}} &= (2k_1^2 \sin^2 \theta - k_2^2)T - 2T_\Psi \tilde{k} k_1 \sin \theta + \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$+ \sum_{n \neq 0} \left[ (2r_n^2 + k_2^2) C_n - 2i \left( k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a} \right) r_n D_n \right] e^{-i\pi n y/a}$$

Интегрирование уравнений (2.9) на интервале  $|y| < a$  приводит к следующим линейным системам, каждая из которых содержит два уравнения:

$$\begin{aligned} 2k_1^2 \sin \theta \cos \theta R - (k_2^2 - 2\tilde{k}^2) R_\Psi &= \frac{1}{2ac_2} G_\tau + 2k_1^2 \sin \theta \cos \theta \\ (k_2^2 - 2\tilde{k}^2) R + 2\tilde{k} k_1 \sin \theta R_\Psi &= \frac{1}{2ac_2} G_\sigma - (k_2^2 - 2\tilde{k}^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} 2k_1^2 \sin \theta \cos \theta T + (k_2^2 - 2\tilde{k}^2) T_\Psi &= -\frac{1}{2ac_2} G_\tau \\ (k_2^2 - 2\tilde{k}^2) T - 2\tilde{k} k_1 \sin \theta T_\Psi &= \frac{1}{2ac_2} G_\sigma \end{aligned} \quad (2.13)$$

Повторное интегрирование после умножения (2.9) на  $e^{i\pi m y/a}$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$  дает следующие две линейные системы (по ортогональности):

$$2i\left(k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a}\right) q_n A_n - (2r_n^2 + k_2^2) B_n = \frac{1}{2ac_2^2} G_\tau(n) \quad (2.14)$$

$$(2r_n^2 + k_2^2) A_n + 2i\left(k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a}\right) r_n B_n = \frac{1}{2ac_2^2} G_\sigma(n)$$

$$-2i\left(k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a}\right) q_n C_n - (2r_n^2 + k_2^2) D_n = \frac{1}{2ac_2^2} G_\tau(n) \quad (2.15)$$

$$(2r_n^2 + k_2^2) C_n - 2i\left(k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a}\right) r_n D_n = \frac{1}{2ac_2^2} G_\sigma(n)$$

В полученных уравнениях было положено

$$G_\tau(n) = \int_{-b}^{+b} g_\tau(y) e^{i\pi n y/a} dy, \quad G_\tau = G_\tau(0) \quad (2.16)$$

$$G_\sigma(n) = \int_{-b}^{+b} g_\sigma(y) e^{i\pi n y/a} dy, \quad G_\sigma = G_\sigma(0)$$

Нетрудно решить выведенные системы для получения значений всех коэффициентов в уравнениях (2.4), (2.5):

$$R = 1 + \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{\tilde{k} k_1 \sin \theta}{ac_2^2} G_\tau + \frac{k_2^2 - 2\tilde{k}^2}{2ac_2^2} G_\sigma - 2(k_2^2 - 2\tilde{k}^2)^2 \right]$$

$$T = \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{\tilde{k} k_1 \sin \theta}{ac_2^2} G_\tau + \frac{k_2^2 - 2\tilde{k}^2}{2ac_2^2} G_\sigma \right) \quad (2.17)$$

$$R_\psi = \frac{1}{\Delta} \left[ -\frac{k_2^2 - 2\tilde{k}^2}{2ac_2^2} G_\tau + \frac{k_1^2 \sin \theta \cos \theta}{ac_2^2} G_\sigma - 4k_1^2 \sin \theta \cos \theta (k_2^2 - 2\tilde{k}^2) \right]$$

$$T_\psi = \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{k_2^2 - 2\tilde{k}^2}{2ac_2^2} G_\tau - \frac{k_1^2 \sin \theta \cos \theta}{ac_2^2} G_\sigma \right)$$

Также имеем

$$A_n + C_n = \frac{2r_n^2 + k_2^2}{ac_2^2 \Delta(n)} G_\sigma(n), \quad A_n - C_n = \frac{2i(k_1 \sin \theta - \pi n/a) r_n}{ac_2^2 \Delta(n)} G_\tau(n) \quad (2.18)$$

$$B_n - D_n = \frac{2i\left(k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a}\right) q_n}{ac_2^2 \Delta(n)} G_\sigma(n), \quad B_n + D_n = -\frac{2r_n^2 + k_2^2}{ac_2^2 \Delta(n)} G_\tau(n)$$

$$\Delta(n) = \Delta\left(\frac{\pi n}{a} - k_1 \sin \theta\right) = \left[2\left(\frac{\pi n}{a} - k_1 \sin \theta\right)^2 - k_2^2\right]^2 - 4q_n r_n \left(\frac{\pi n}{a} - k_1 \sin \theta\right)^2 \quad (2.19)$$

$$\Delta = \Delta(n=0) = (k_2^2 - 2\tilde{k}^2)^2 + 4\tilde{k}k_1^3 \sin^2 \theta \cos \theta$$

Заметим, что  $\Delta(\alpha) \equiv (2\alpha^2 - k_2^2)^2 - 4\alpha^2 \sqrt{\alpha^2 - k_2^2} \sqrt{\alpha^2 - \tilde{k}^2}$  представляет собой известную функцию Рэлея [13]. Все полученные значения упомянутых коэффициентов могут быть подставлены в уравнения (2.4), (2.5), что дает выражения для  $\Phi$  и  $\Psi$ , а затем для  $u_x$  и  $u_y$  через неизвестные функции  $g_\sigma$  и  $g_\tau$ . Для определения этих функций используем условие непрерывности поля перемещений на просвете

$$u_x^{\text{left}}(0, y) = u_x^{\text{right}}(0, y), \quad u_y^{\text{left}}(0, y) = u_y^{\text{right}}(0, y), \quad |y| < b \quad (2.20)$$

Начнем с первого условия (2.20), которое с учетом уравнений (2.1) и (2.4), (2.5) дает

$$\sum_{n \neq 0} \left[ (A_n + C_n)q_n + i(B_n - D_n) \left( k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a} \right) \right] e^{-i\pi n y/a} + ik_1 \cos \theta (1 - R - T) + ik_1 \sin \theta (R_\Psi - T_\Psi) = 0, \quad |y| < b \quad (2.21)$$

Подстановка из уравнений (2.17), (2.18) приводит к интегральному уравнению для  $g_\sigma$ , которое может быть записано в следующем виде:

$$\int_{-b}^{+b} g_\sigma(t) \left[ K_\sigma(t-y) + \frac{ik_1(k_2^2 - k_1^2) \cos \theta}{a\Delta} \right] dt = A_\sigma(k_1, k_2), \quad |y| < b \quad (2.22)$$

$$K_\sigma(y) = \frac{k_1^2 - k_2^2}{a} \sum_{n \neq 0} \frac{q_n}{\Delta(n)} e^{i\pi n y/a}, \quad A_\sigma(k_1, k_2) = \frac{2ik_1 \cos \theta (k_2^2 - k_1^2) (k_2^2 - 2\tilde{k}^2)}{\Delta/c_2^2} \quad (2.23)$$

Отметим, что в случае нормального падения ( $\theta = 0^\circ$ ) имеют место выражения  $q_n = q_{-n}$ ,  $\Delta(n) = \Delta(-n)$  и  $\Delta = k_2^4$ , а уравнение (2.22) сводится к уравнению (2.26) в [11].

Вместе с тем, из второго условия (2.20) с учетом уравнений (2.1) и (2.4), (2.5), а также (2.17), (2.18) имеем

$$\sum_{n \neq 0} \left[ i(A_n - C_n) \left( k_1 \sin \theta - \frac{\pi n}{a} \right) - (B_n + D_n)r_n \right] e^{-i\pi n y/a} + ik_1 \sin \theta (1 + R - T) + i\tilde{k}(R_\Psi + T_\Psi) = 0, \quad |y| < b \quad (2.24)$$

что дает следующее интегральное уравнение для  $g_\tau$ :

$$\int_{-b}^{+b} g_\tau(t) \left[ K_\tau(t-y) + \frac{i\tilde{k}(k_2^2 - k_1^2)}{a\Delta} \right] dt = A_\tau(k_1, k_2), \quad |y| < b \quad (2.25)$$

$$K_\tau(y) = \frac{k_1^2 - k_2^2}{a} \sum_{n \neq 0} \frac{r_n}{\Delta(n)} e^{i\pi n y/a}, \quad A_\tau(k_1, k_2) = \frac{4i\tilde{k}k_1^2 \sin \theta \cos \theta (k_1^2 - k_2^2)}{\Delta/c_2^2} \quad (2.26)$$

Заметим, что как  $K_\sigma$ , так и  $K_\tau$  в одномодовом режиме (2.7) являются действительными. Для получения решений этих уравнений введем два вспомогательных интегральных уравнения с более простыми (действительными) ядрами

$$\int_{-b}^{+b} h_{\sigma,\tau}(t) K_{\sigma,\tau}(t-y) dt = 1, \quad |y| < b \quad (2.27)$$

а также положим

$$H_{\sigma,\tau} = \int_{-b}^{+b} h_{\sigma,\tau}(t) dt \quad (2.28)$$

В силу линейности, имеем следующие выражения через новые действительные неизвестные  $h_{\sigma,\tau}(t)$ :

$$g_\sigma(y) = \left[ A_\sigma(k_1, k_2) - \frac{ik_1(k_2^2 - k_1^2) \cos \theta}{a\Delta} G_\sigma \right] h_\sigma(y), \quad |y| < b \quad (2.29)$$

$$g_\tau(y) = \left[ A_\tau(k_1, k_2) - \frac{i\tilde{k}(k_2^2 - k_1^2)}{a\Delta} G_\tau \right] h_\tau(y), \quad |y| < b$$

После интегрирования получим

$$G_\sigma = \frac{A_\sigma(k_1, k_2) H_\sigma}{1 + \frac{ik_1(k_2^2 - k_1^2) \cos \theta}{a\Delta} H_\sigma}, \quad G_\tau = \frac{A_\tau(k_1, k_2) H_\tau}{1 + \frac{i\tilde{k}(k_2^2 - k_1^2)}{a\Delta} H_\tau} \quad (2.30)$$

Эти уравнения замыкают математическую постановку задачи, так как после нахождения решения вспомогательных уравнений (2.27), а затем функций  $g_\sigma$  и  $g_\tau$  из (2.29), (2.30), уравнения (2.17) и (2.18) могут быть использованы при решении (2.4), (2.5) для получения рассеянных полей во всей структуре. В частности, все формулы (2.17) для параметров рассеяния могут быть выражены через функции  $h_\sigma$  и  $h_\tau$  следующим образом:

$$R = 1 - \frac{2(k_2^2 - 2\tilde{k}^2)^2}{\Delta} + \frac{k_2^2 - 2\tilde{k}^2}{2c_2^2} \frac{A_\sigma(k_1, k_2) H_\sigma}{a\Delta + ik_1(k_2^2 - k_1^2) \cos \theta H_\sigma} + \frac{\tilde{k}k_1 \sin \theta}{c_2^2} \frac{A_\tau(k_1, k_2) H_\tau}{a\Delta + i\tilde{k}(k_2^2 - k_1^2) H_\tau} \quad (2.31)$$

$$T = \frac{k_2^2 - 2\tilde{k}^2}{2c_2^2} \frac{A_\sigma(k_1, k_2) H_\sigma}{a\Delta + ik_1(k_2^2 - k_1^2) \cos \theta H_\sigma} - \frac{\tilde{k}k_1 \sin \theta}{c_2^2} \frac{A_\tau(k_1, k_2) H_\tau}{a\Delta + i\tilde{k}(k_2^2 - k_1^2) H_\tau}$$

$$R_\Psi = \frac{4k_1^2 \sin \theta \cos \theta (2\tilde{k}^2 - k_2^2)}{\Delta} + \frac{2\tilde{k}^2 - k_2^2}{2c_2^2} \frac{A_\tau(k_1, k_2) H_\tau}{a\Delta + i\tilde{k}(k_2^2 - k_1^2) H_\tau} +$$

$$+ \frac{k_1^2 \sin \theta \cos \theta}{c_2^2} \frac{A_\sigma(k_1, k_2) H_\sigma}{a\Delta + ik_1(k_2^2 - k_1^2) \cos \theta H_\sigma}$$

$$T_{\Psi} = \frac{\tilde{k}^2 - k_2^2}{2c_2^2} \frac{A_{\tau}(k_1, k_2)H_{\tau}}{a\Delta + ik(k_2^2 - k_1^2)H_{\tau}} - \frac{k_1^2 \sin\theta \cos\theta}{c_2^2} \frac{A_{\sigma}(k_1, k_2)H_{\sigma}}{a\Delta + ik_1(k_2^2 - k_1^2)\cos\theta H_{\sigma}}$$

Как известно [12, 13], в случае когда падение продольной волны является нормальным, коэффициенты трансформации одинаково стремятся к нулю. Более того, уравнения (2.31) для коэффициентов отражения и прохождения сводятся к (2.31) в [11] (с некоторыми незначительными формальными изменениями).

Так как ядра уравнений (2.7) содержат волновые числа, фактические значения констант  $H_{\sigma, \tau}$  также зависят от волновых чисел.

**3. Решение в одномодовом приближении.** С целью решения вспомогательных интегральных уравнений (2.27) найдем равномерное приближение ядер, верное в принятом одномодовом режиме (см. уравнение (2.7)). В соответствии со стандартной процедурой [2, 11] положим  $k_1, k_2 \approx 0$  в уравнениях (2.6) и (2.19) для  $|n| \geq 2$ , исключая (действительные) значения при  $n = \pm 1$ . Имеем

$$q_n \approx r_n \approx \frac{\pi|n|}{a}, \quad \Delta(n) \approx 2\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 (k_1^2 - k_2^2), \quad n = \pm 2, \pm 3, \dots \tag{3.1}$$

так что первое ядро принимает вид

$$\begin{aligned} K_{\sigma}(y) &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{i\pi ny/a}}{|n|} + \frac{k_1^2 - k_2^2}{a} \left[ \frac{q_1}{\Delta(1)} e^{i\pi y/a} + \frac{q_{-1}}{\Delta(-1)} e^{-i\pi y/a} \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \ln \left| 2 \sin \frac{\pi y}{2a} \right| - B_{\sigma}^+ e^{i\pi y/a} - B_{\sigma}^- e^{-i\pi y/a}, \quad |y| < b \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$B_{\sigma}^{\pm} = \frac{1}{2\pi} - \frac{k_1^2 - k_2^2}{a} \frac{q_{\pm 1}}{\Delta(\pm 1)}$$

где было использовано суммирование

$$\sum_{n=1, 2, \dots} \frac{1}{n} \cos \frac{\pi ny}{a} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\pi y}{2a} \right|$$

Аналогичное выражение выполняется для  $K_{\tau}(y)$ , где вместо  $B_{\sigma}^{\pm}$  следует подставить

$$B_{\tau}^{\pm} = \frac{1}{2\pi} - \frac{k_1^2 - k_2^2}{a} \frac{r_{\pm 1}}{\Delta(\pm 1)}$$

Таким образом, вспомогательные уравнения (2.27) могут быть записаны в форме

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-b}^{+b} h_{\sigma, \tau}(t) \ln \left| 2 \sin \frac{\pi(t-y)}{2a} \right| dt &= 1 + B_{\sigma, \tau}^- H_{\sigma, \tau}^- e^{i\pi y/a} + B_{\sigma, \tau}^+ H_{\sigma, \tau}^2 e^{-i\pi y/a}, \\ H_{\sigma, \tau}^1 &= \int_{-b}^{+b} h_{\sigma, \tau}(t) e^{-i\pi t/a} dt, \quad H_{\sigma, \tau}^2 = \int_{-b}^{+b} h_{\sigma, \tau}(t) e^{i\pi t/a} dt \end{aligned} \tag{3.3}$$

Полученные интегральные уравнения с логарифмическим ядром, не зависящим от частоты, аналогичны уравнениям (3.10) в [2]. После расщепления на четные и нечетные



компоненты эти уравнения могут быть решены аналитически, следуя разделу 4 работы [2], что является основной целью настоящей работы. Однако особенный интерес представляют явные (относительно частоты) формулы (2.31) для параметров рассеяния. Для получения таких выражений требуется лишь вычислить интегралы  $H_{\sigma, \tau} =$

$\int_{-b}^{+b} h_{\sigma, \tau}(t) dt$ . Следуя процедуре, представленной в разделе 5 работы [2], получаем

$$H_{\sigma, \tau} = \frac{\pi}{\ln \sin \frac{\pi b}{2a}} \left( 1 - \frac{2\pi \cos \frac{4\pi b}{2a} B_{\sigma, \tau}^+ a_{\sigma, \tau}^{21} + B_{\sigma, \tau}^- a_{\sigma, \tau}^{22}}{\ln \sin \frac{\pi b}{2a} a_{\sigma, \tau}^{11} a_{\sigma, \tau}^{22} + a_{\sigma, \tau}^{12} a_{\sigma, \tau}^{21}} \right) \quad (3.4)$$

$$a_{\sigma, \tau}^{11} = 1 - 2\pi \left( \sin \frac{4\pi b}{2a} - \frac{\cos \frac{4\pi b}{2a}}{\ln \sin \frac{\pi b}{2a}} \right) B_{\sigma, \tau}^-$$

$$a_{\sigma, \tau}^{12} = 1 - 2\pi \left( \sin \frac{4\pi b}{2a} - \frac{\cos \frac{4\pi b}{2a}}{\ln \sin \frac{\pi b}{2a}} \right) B_{\sigma, \tau}^+$$

$$a_{\sigma, \tau}^{21} = 1 - 2\pi \left( 1 - \cos \frac{4\pi b}{2a} \right) B_{\sigma, \tau}^-$$

$$a_{\sigma, \tau}^{22} = 1 - 2\pi \left( 1 - \cos \frac{4\pi b}{2a} \right) B_{\sigma, \tau}^+$$

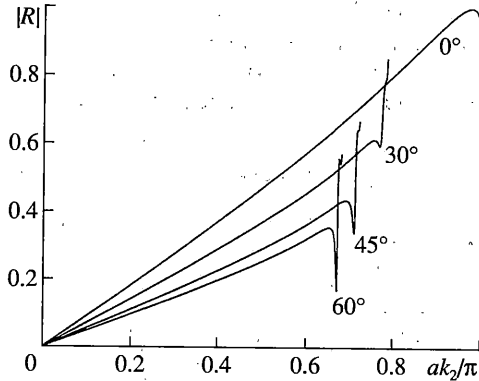
**4. Сравнение с предыдущими результатами.** В [12] задача сведена к рассмотрению сингулярного интегрального уравнения, выведенного из граничных условий отсутствия напряжений и верного на длине типичной трещины. Это уравнение решалось численно для получения диаграмм четырех параметров рассеяния (определенных так же, как в настоящей работе) на интервале частот, соответствующих  $0 \leq ak_2/\pi < 1$ . Были рассмотрены три различных угла падения:  $\theta = 0^\circ, 45^\circ$  и  $89.5^\circ$ .

Подстановка выражения (3.4) в уравнения (2.31) позволила построить графики зависимостей параметров рассеяния от частотного параметра  $ak_2/\pi \equiv f$  в однодифракционном режиме (2.7) для некоторых значений  $\theta$ , включая случай нормального падения ( $\theta = 0^\circ$ ), рассмотренный ранее в [11]. Как и в [12], были приняты значения  $c_2/c_1 = 0.535$  и  $b/a = 0.5$ .

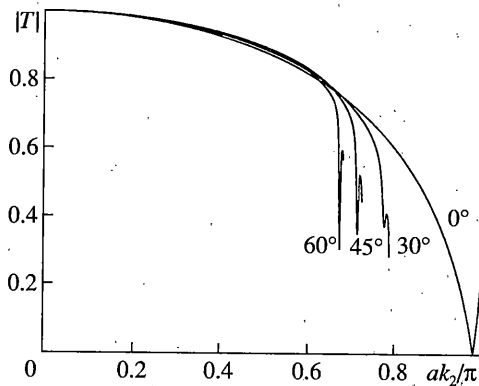
Максимальные (граничные) значения частоты имеют вид

$$f_{\max} = \begin{cases} 0.789 & \text{для } \theta = 30^\circ \\ 0.726 & \text{для } \theta = 45^\circ \\ 0.683 & \text{для } \theta = 60^\circ \end{cases}$$

и, разумеется, 1 при нормальном падении. Здесь рассматриваются большие углы падения, так как приближения (3.1) становятся тривиальными в случае, когда значение  $\sin \theta$  приближается к единице. Заметим, что значение  $f_{\max}$  при  $\theta = 45^\circ$  совпадает со значением,



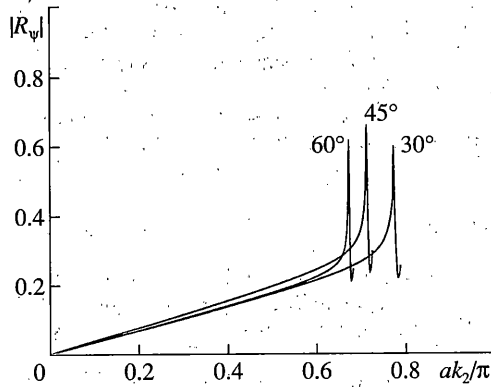
Фиг. 2



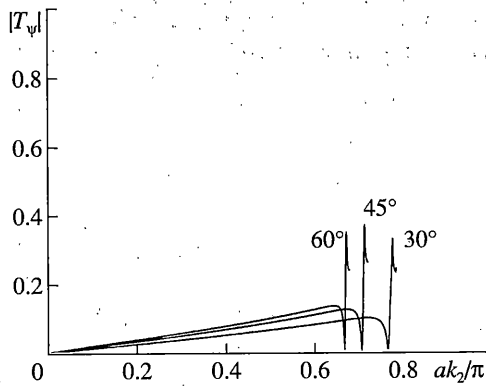
Фиг. 3

полученным в разделе 8 работы [12]. Плоские однородные моды с частотой, превышающей это граничное значение (за исключением мод нулевого порядка), могут распространяться в среде. В самом деле, не считая различия в обозначениях, неравенство (2.7) настоящей работы определяет область "I" в плоскости  $(\sin\theta, 1/f)$ , рассмотренную в [12] (см. фиг. 4 этой работы), где утверждалось, что в этой области могут быть представлены только моды нулевого порядка.

Полученные в настоящей работе кривые для  $\theta = 0^\circ$  и  $45^\circ$  (см. фиг. 2–5) убедительно согласуются с соответствующими кривыми, представленными в работе [12] фигурами 6–9, в общем диапазоне применимости. Заметим, что, благодаря используемому аналитическому подходу, об одинаковом характере стремления к нулю коэффициентов трансформации  $|R_{\nu}|$  и  $|T_{\nu}|$  при  $\theta = 0^\circ$  можно судить априори, исходя из соответствующих формул. Это означает, что при нормальном падении рассеянные моды нулевого порядка являются только продольными, как и падающая волна. Все кривые показывают, что при стремлении частот к нулю, т.е. при очень больших длинах волн, трещины взаимодействуют лишь незначительно, так что падающая продольная волна распространяется практически не измененной. Физическая интерпретация максимумов и участков спада полученных кривых приведена в [12]. Тем не менее, следует отметить, что такие максимумы и минимумы, для которых частота лежит в диапазоне одномодового режима, теперь могут быть аналитически выведены с помощью соответствующих формул скорее,



Фиг. 4



Фиг. 5

чем объяснены появлением однородных мод ненулевого порядка, как это сделано в заключении работы [12]<sup>3</sup>.

В заключение потребуем выполнения условия баланса скоростей переноса энергии во всем пространстве в одномодовом режиме [12, 13]:

$$|R|^2 + |T|^2 + |R_\psi|^2 + |T_\psi|^2 = 1 \quad (4.1)$$

Правая часть этого равенства была построена как функция  $f$ , и около границ соответствующих интервалов были обнаружены некоторые отклонения от единицы, не превышающие значения 0.05.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scarpetta E., Sumbtayan M.A. Explicit analytic results for one-mode normal reflection and transmission by a periodic array of screens // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195. P. 736–749.

<sup>3</sup> Действительно, более детальная проверка в окрестности оси абсцисс ясно показывает, что в этой области кривые также являются гладкими.

2. *Scarpetta E., Sumbtjan M.A.* Explicit analytic results for one-mode oblique penetration into a periodic array of screens // *IMA J. Appl. Math.* 1996. V. 56. P. 109–120.
3. *Scarpetta E., Sumbtjan M.A.* On wave propagation in alestic solids with a doubly periodic array of cracks // *Wave Motion.* 1997. V. 25. P. 61–72.
4. *Scarpetta E., Sumbtjan M.A.* On the oblique wave penetration in elastic solids with a doubly periodic array of cracks // *Quart. Appl. Math.* 2000. V. 58. P. 239–250.
5. *Malin V.V.* Theory of strip grating of finite period // *Radio Eng. Electron. Phys.* 1963. V. 8. P. 185–193.
6. *Van den Berg P.M., Voorman O.J.* Diffraction by a grating of cylinders with an arbitrary cross-section // *Appl. Sci. Res.* 1972. V. 26. P. 175–182.
7. *Miles J.W.* On Rayleigh scattering by a grating // *Wave Motion.* 1982. V. 4. P. 285–292.
8. *Jones D.S.* Acoustic and Electromagnetic Waves. Oxford: Clarendon Press, 1986.
9. *Achenbach J.D., Li Z.L.* Reflection and transmission of scalar waves by a periodic array of screens // *Wave Motion.* 1986. V. 8. P. 225–234.
10. *Angel Y.C., Achenbach J.D.* Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks // *J. Appl. Mech.* 1985. V. 52. P. 33–41.
11. *Scarpetta E.* In-plane problem for wave propagation through elastic solids with a periodic array of cracks // *Acta Mechanica.* 2002. V. 154. P. 179–187.
12. *Angel Y.C., Achenbach J.D.* Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks: oblique incidence // *Wave Motion.* 1985. V. 7. P. 375–397.
13. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. Amsterdam: North-Holland, 1973. 360 p.

Италия

Поступила в редакцию  
18.08.2003