МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 2006

УДК 539.375

© 2006 г. С.А. НАЗАРОВ

О ТРЕХМЕРНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ КРИТЕРИЯ НОВОЖИЛОВА КВАЗИСТАТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Предложены априорная и апостериорная формулировки критерия Новожилова для плоских трещин нормального отрыва в пространственных хрупких телах. Построена и изучена вариационно-асимптотическая модель такого критерия для случая упругого изотропного пространства.

1. О трехмерных задачах механики трещин. Математические задачи механики хрупкого разрушения по своей природе трехмерны, так как наряду с констатацией начала квазистатического роста трещины требуют выяснить форму образующейся свободной поверхности, которая (форма) существенно влияет на сам процесс разрушения, но редко бывает известна априори. В связи с этим применение классических критериев Гриффитса и Ирвина, энергетического и силового, к сквозным трещинам в тонких пластинах, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, следует признать только основным приближением, но не безоговорочным результатом. Действительно, в [1] установлено, что при параллельном переносе фронта сквозной трещины относительное приращение полной энергии (поверхностная + упругая – работа внешних сил), найденное по решению двумерной задачи, отличается от такого же приращения, вычисленного для пространственной задачи, на величину $O(h)$, где h – относительная толщина пластины. Там же показано, что КИН, коэффициент интенсивности напряжений, $K_I(s)$ (функция длины дуги) на фронте трещины весьма опосредовано связан с КИН K_I^0 (скаляр) в вершине плоского изображения трещины.

Для толстых пластин с трещинами, наиболее часто служащих образцами для экспериментов, двумерный вариант энергетического критерия вообще неприменим ввиду использования им глобальных характеристик напряженно-деформированного состояния, а двумерный анализ на основе силового критерия встречает серьезные затруднения, в частности, по причине смены порядка сингулярностей при приближении к концевым точкам $\mathcal{P}^{\pm}$ фронта трещины, являющимся вершинами многогранных углов, и возможных особенностей функции K_I^0 в этих точках. Если показатель δ пространственной сингулярности $O(\rho^{-\delta})$ напряжений в точках $\mathcal{P}^{\pm}$ меньше 1/2, то $K_I(\mathcal{P}^{\pm}) = 0$, а вершины препятствуют квазистатическому продвижению всей кромки сквозной трещины и формируют стадию локального разрушения (ср. с [1]). Если же $\delta > 1/2$ и соответственно $K_I(\mathcal{P}^{\pm}) = \infty$, то продвижение трещины начинается вблизи вершин, а упомянутая стадия приобретает динамический характер. Разумеется, сказанное относится к хрупкому разрушению – пластические эффекты могут полностью изменить картину. Однако в любом случае прогнозирование развития трещины остается приближенным, а оценки погрешностей в описанной ситуации весьма проблематичны.

Вариационная природа квазистатического роста трещин, вскрытая в [2, 3], впрочем только для двумерных задач, позволила в [4, 5] сформулировать и изучить вариационно-асимптотические модели энергетического и силового критериев, описывающие квазистатическое развитие гладких фронтов плоских трещин нормального отрыва в хрупком упругом пространстве. Математическая формулировка трехмерной задачи механики разрушения апеллирует к вариационному неравенству на фронте трещины, решение которого доставляет значение критической нагрузки и форму фронта в зависимости от времениподобного параметра нагружения на малом участке изменения последнего. Кроме того, полное математическое исследование вариационного неравенства отвечает на вопросы о начале лавинообразного роста трещины и о возможности бифуркации формы трещины.

Многочисленные критерии разрушения, в которых постулируется специальное строение устья трещины и разрушение соотносится с привходящими физическими процессами, особо нуждаются в трехмерных формулировках, поскольку погрешности, обусловленные переходом к двумерной постановке задачи, могут превалировать, а в некоторых случаях гарантированно превалируют над поправками, обеспеченными введением в критерий дополнительных параметров – характеристик устья. В данной статье предлагается новая пространственная формулировка критерия разрушения, разработанного В.В. Новожиловым в статье [6] для трещин-отрезков и приспособленного в работах [7–10] и др. для иных концентраторов напряжений, по большей части также двумерных.

2. Модельные задачи. Если M – трещина-отрезок $\{y = (y_1, y_2) : |y_1| \le R, y_2 = 0\}$ в плоском упругом теле $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, к границе которого приложена нагрузка $p(y)$, то по Новожилову рост трещины в вершине $\mathcal{O}^+ = (R, 0)$ может происходить разве лишь при выполнении соотношения

$$\frac{1}{d}\int_0^d \sigma_{22}(R+r, 0)dr = \sigma_c \tag{2.1}$$

Здесь $\sigma_{22}(y_1, 0)$ – разрывающие напряжения на оси y_1, а d и σ_c – характерный размер и теоретическая прочность материала, параметры критерия разрушения. Тот факт, что интегрирование в (2.1) ведется вдоль отрезка, продолжающего трещину, означает предопределенность направления развития трещины, которая приемлема при симметричных данных и соответственно напряженном состоянии первой моды вблизи вершины трещины. Кроме того, считаем далее, что трещина распространяется в обе стороны одинаково, т.е. одновременно с (2.1) выполнено такое же равенство для точки $\mathcal{O}^- = (-R, 0)$, т.е. в подынтегральном выражении из (2.1) $R + r$ заменено на $-R - r$.

Рассмотрим две классические задачи о трещине в плоскости, деформируемой сосредоточенными в точке $(0, \pm 0)$ нормальными силами $\mp P$ или нормальными усилиями $\mp p$, распределенными равномерно вдоль берегов $M^\pm$. Как известно (см., например [11]), КИН в представлениях на продолжении трещины

$$\sigma_{22}(R+r, 0) = K_I(2\pi r)^{-1/2} + O(1), \quad r \to +0 \tag{2.2}$$

при указанных выше нагрузках имеют вид

$$K_I^P = P(\pi R)^{-1/2}, \quad K_I^p = p(\pi R)^{1/2} \tag{2.3}$$

Левая часть (2.1), вычисленная для напряжений $\sigma^P(x)$ и $\sigma^p(x)$, выглядит так:

$$\sqrt{2}\frac{P}{\pi R}\left(\frac{R}{d}\right)^{1/2} + O\left(\frac{P}{R}\frac{d^{1/2}}{R^{1/2}}\right), \quad \sqrt{2}p\left(\frac{R}{d}\right)^{1/2} + O\left(p\frac{d^{1/2}}{R^{1/2}}\right) \tag{2.4}$$

В итоге, как и в [8], равенство (2.1) при малом отношении d/R правомочно заменить равенством

$$K_I = \left(\frac{\pi}{2}d\right)^{1/2}\sigma_c \tag{2.5}$$

которое естественно соотнести с *асимптотической формой* критерия Новожилова, работающей для достаточно длинных трещин. Условие (2.5) совпадает с критерием Ирвина, если в согласии с [8] считать, что правая часть (2.5) является критическим КИН K_{Ic}. Подчеркнем, что понятие "достаточно длинная трещина" зависит от способа нагружения, а замена в (2.1) напряжения σ_{22} главным членом его асимптотики (2.2) нуждается в обосновании для каждого конкретного случая. Так, например, для обсуждаемых конкретных задач левая часть (2.1), вычисленная на основе явных формул [11], имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} &\frac{P}{d}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{R}{R+d}\right) = \sqrt{2}\frac{P}{\pi R}\left(\frac{R}{d}\right)^{1/2}\left\{1-\frac{5}{12}\frac{d}{R}+O\left(\frac{d^2}{R^2}\right)\right\} \\ &\frac{p}{d}(2Rd+d^2)^{1/2} = \sqrt{2}p\left(\frac{R}{d}\right)^{1/2}\left\{1+\frac{1}{4}\frac{d}{R}+O\left(\frac{d^2}{R^2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

В первом случае при малом d/R критическая нагрузка вычисляется по упрощенному критерию (2.5) с *избытком*, а во втором – с *недостатком*.

В качестве трехмерной модельной задачи выберем растяжение круговой трещины

$$M = \{x=(y,z)\in\mathbb{R}^3 : |y|<R,\ z=0\} \tag{2.7}$$

в однородном изотропном упругом пространстве, а на ее берегах $M^{\pm}$ опять зададим нормальные силы $\mp P$, сосредоточенные в точках (0, 0, ±0), или постоянные усилия $\mp p$. Ввиду осевой симметрии КИН K_I и коэффициент k_I при младшей сингулярности в разложении напряжений

$$\sigma_{zz}(y,0) = (2\pi r)^{-1/2}\{K_I + rk_I + O(r^{3/2})\}, \quad r\to +0 \tag{2.8}$$

не зависят от угловой переменной φ на окружности Γ. При помощи весовых функций (см. [12, 13] и др.) или на основе явных решений (см., например [14]) находятся выражения для упомянутых коэффициентов при конкретных нагрузках:

$$K_I^P = 2\frac{P}{\pi^{1/2}}R^{-3/2},\quad k_I^P = -\frac{9}{2}\frac{P}{\pi^{1/2}}R^{-5/2},\quad K_I^p = 2\frac{p}{\pi^{1/2}}R^{1/2},\quad k_I^p = \frac{7}{4}\frac{p}{\pi^{1/2}}R^{-1/2} \tag{2.9}$$

3. Времениподобный параметр и апостериорная формулировка критерия. Соотношение (2.1), выражающее двумерный критерий Новожилова, указывает только на *возможность разрушения*, но не отвечает на вопросы: действительно ли трещина растет, как увеличивается ее длина и остается ли процесс разрушения квазистатическим? Это – отличительная черта всех *априорных* формулировок критериев, в которых прогнозирование осуществляется в момент, предшествующий разрушению, и дальнейший рост трещины не анализируется. При обычных постановках задач механики разрушения многие аспекты подобного анализа невозможны в принципе, поскольку квазистатическое устойчивое развитие трещины под *постоянной* нагрузкой реализуется крайне редко – требуется, чтобы интеграл слева в (2.1) оставался неизменным при продвижении вершины (в противном случае трещина либо останавливается, либо растет лавинообразно). *Апостериорная* формулировка критериев разрушения апеллирует в *времениподобному* параметру нагружения τ, т.е. нуждается в предъявлении нового временного масштаба, более медленного, чем реальный t. Например, при простом нарастающем нагружении в качестве τ можно взять относительное приращение усилий. Если $\tau\in[0,\tau_0]$ – такой параметр, монотонный по отношению к реальному времени t, то, считая скорость его изменения малой в сравнении со скоростью упругих волн, отнесенной к длине (в трехмерном случае к диаметру) трещины, удается обоснованно пренебречь инерционными членами в уравнениях и, проследив процесс разрушения на некотором промежутке $(0, \tau_0) \ni \tau$, ответить на поставленные вопросы. В пространственном случае, где первостепенное значение приобретает определение формы развивающейся трещины, без времениподобного параметра, разумеется, не обойтись, но сначала обсудим апостериорный вариант двумерного критерия (2.1).

Пусть в результате действия симметричной нагрузки $p(\tau)$ трещина-отрезок M квазистатически подросла до положения $M(\tau) = \{y = (y_1, y_2) : |y_1| \le R(\tau), y_2 = 0\}$. Обозначим $\sigma_{22}(\tau; x_1, 0)$ разрывающие напряжения на оси y_1 в момент τ, а $K_I(\tau)$ – соответствующий КИН. Заметив, что условие (2.1) должно быть выполнено для растущей трещины и нарушено для равновесной, выписываем соответствующие импликации

$$\begin{aligned} &R(\tau) > R \Rightarrow \frac{1}{d}\int_0^d \sigma_{22}(\tau; R(\tau) + r, 0)dr = \sigma_c \\ &R(\tau) = R \Rightarrow \frac{1}{d}\int_0^d \sigma_{22}(\tau; R(\tau) + r, 0)dr \le \sigma_c \end{aligned} \tag{3.1}$$

Благодаря одностороннему ограничению $R(\tau) \ge R$, выражающему необратимость процесса разрушения (невозможность зарастания трещины), формулы (3.1) равносильны одномерному вариационному неравенству. Отметим также, что при допущении несимметричного роста трещины соотношения (3.1) пишутся для каждой из вершин по-отдельности и затем объединяются в двумерное алгебраическое неравенство (см. [15]). Поскольку основная цель работы – анализ пространственных задач, оба вариационных неравенства здесь не приводятся (см. по этому поводу [5, 15–17] и др.).

Если отталкиваться от асимптотического варианта (2.5) критерия Новожилова, то возникнут соотношения, эквивалентные критерию Ирвина в апостериорной формулировке (ср. с [3, 4, 15]):

$$\begin{aligned} &R(\tau) > R \Rightarrow K_I(\tau) = K_{Ic} \\ &R(\tau) = R \Rightarrow K_I(\tau) \le K_{Ic} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Применим критерий (3.2) к двум задачам о трещине-отрезке, обсуждавшимся в п. 2. В силу формулы (2.3) для КИН сосредоточенная сила $P(\tau) = P + \tau P'$, критическая в момент $\tau = 0$, не вызывает рост трещины при условии $P' \le 0$ (нагрузка не увеличивается и выполняется первая импликация в (3.2)). При возрастающей силе (при $P' > 0$) справедлива первая импликация в (3.2), т.е. трещина развивается квазистатически и ее полудлина в момент τ определяется по формуле

$$R(\tau) = R\{1 + 2P^{-1}P'\tau + O(\tau^2)\} \tag{3.3}$$

Соотношение (3.3) получается при решении уравнения $K_I(\tau) = K_{Ic}$, преобразованного согласно представлениям (2.4) и (2.5).

Если равномерно распределенное усилие $p + p'\tau$ увеличивается от критического и выше, то соотношения (3.2) удовлетворить нельзя (опять-таки по причине представлений (2.4) и (2.5)), а значит, процесс разрушения не может быть квазистатическим и должен наблюдаться лавинообразный рост трещины. Если же $p' \le 0$ и движение трещины сопровождается сбросом нагрузки, то в соответствии со второй формулой (2.3) имеем

$$R(\tau) = R\{1 - 2p^{-1}p'\tau + O(\tau^2)\} \tag{3.4}$$

Отметим, что в силу [15÷17] в последнем случае медленное распространение трещины неустойчиво (наряду с непрерывной функцией (3.4), равной $R(1 + O(\tau))$, существуют разрывные функции $R(\tau)$, удовлетворяющие (3.2) и предписывающие мгновенные изменения длины трещины, а значит, в любой момент квазистатический процесс разрушения может сорваться в динамический.

На основании обычного априорного анализа принято считать, что под сосредоточенной нагрузкой трещина развивается квазистатически и устойчиво, а во всесторонне растягиваемой плоскости – лавинообразно. Проведенный апостериорный анализ показывает, что процесс разрушения более многообразен, а его характер определяется не только критическим значением нагрузки, но прежде всего ее дальнейшим поведением. В частности, как вытекает из приведенных примеров, по достижению трещиной критического состояния сценарий разрушения может быть любым: отсутствие продвижения вершины, квазистатический или динамический рост.

Применение полного критерия (3.1) не приводит в рассмотренных простых случаях к качественно новым результатам, но уточняет формулы (3.3) и (3.4).

4. Трехмерная формулировка критерия. Если M – круговая трещина (2.7) и нагрузка осесимметрическая, то разумно предположить, что определенных условиях трещина будет развиваться подобно, и поэтому априорная формулировка трехмерного критерия Новожилова выглядит так:

$$\frac{1}{\pi d(2R+d)} \int\limits_{A(R,d)} \sigma_{zz}(y,0)dy = \sigma_c \tag{4.1}$$

Здесь $\sigma_{zz}(y, 0)$ – разрывающие напряжения в плоскости $\Pi = \{x : z = 0\}$, а знаменателем в дроби перед интегралом служит площадь кольца $A(R, d) = \{y : R < |y| < R + d\}$. Тот факт, что осреднение напряжений в (4.1) производится по образующейся свободной поверхности, согласуется с двумерный формулой (2.1) и с концепцией [6, 8] микроструктурного разрушения – количество элементарных актов разрушения пропорционально именно площади поверхности. Если заменить напряжения $\sigma_{zz}(y, 0)$ главным асимптотическим членом $(2\pi r)^{-1/2}K_I$ и пренебречь младшими членами $O(d^{1/2})$, то равенство (4.1) преобразуется в (2.5). Подставив в левую часть (4.1) двучленную асимптотику напряжений (2.8), получаем выражения

$$2\sqrt{2}\frac{q}{\pi R^2}\left(\frac{R}{d}\right)^{1/2}\left\{1 - \frac{13}{12}\frac{d}{R} + O\left(\frac{d^2}{R^2}\right)\right\}; \quad 2\sqrt{2}\frac{p}{\pi}\left(\frac{R}{d}\right)^{1/2}\left\{1 + \frac{d}{R} + O\left(\frac{d^2}{R^2}\right)\right\} \tag{4.2}$$

Эти выражения весьма похожи на правые части (2.5) и, поскольку осесимметричная задача по существу двумерна, схема, изложенная в п. 3, позволяет перейти к апостериорным формулировкам критерия (4.1) и сделать выводы, аналогичные тем, которые привели к соотношениям (3.3) и (3.4). Однако здесь интерес представляют трещины произвольной формы и неосесимметричные нагрузки. Поэтому займемся обобщениями, но сначала перепишем равенство (4.1), умножив его на $1 + 1/2d\kappa$ и заменив двойной интеграл повторным

$$\int\limits_{\Gamma}\left\{\frac{1}{d}\int\limits_0^d \sigma_{zz}((R+r)\cos\varphi, (R+r)\sin\varphi, 0)[1 + r\kappa]dr - \left(1 + \frac{d}{2}\kappa\right)\sigma_c\right\}Rd\varphi = 0 \tag{4.3}$$

При этом $\kappa = R^{-1}$ и $dl = Rd\varphi$ – кривизна и элемент длины дуги окружности Γ, а в квадратных скобках стоит якобиан перехода к координатам (r, φ).

Теперь рассмотрим произвольную плоскую связную трещину $M = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \in \overline{G}, z = 0\}$ в трехмерном изотропном упругом хрупком теле Ω; здесь $G \subset \mathbb{R}^2$ – область, ограниченная простым гладким замкнутым контуром ∂G, а $\Gamma = \{x : y \in \partial G, z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ – фронт трещины. Массовые силы отсутствуют и к поверхности $\partial\Omega$ приложены усилия $p(\tau; x)$, а $\tau \in [0, \tau_0]$ – времениподобный параметр нагружения (см. п. 3).

Пусть $M(\tau)$ – положение трещины в момент τ и $\Gamma(\tau)$ – ее фронт. Включение $M \subset M(\tau)$ отражает необратимость процесса разрушения, но не исключает случай $M = M(\tau)$, когда трещина неподвижна (ср. комментарии к соотношениям (3.1)). Напряжения, возникшие в теле $\Omega\backslash M(\tau)$ под нагрузкой $p(\tau; x)$, обозначаем $\sigma(\tau; x)$, а $\sigma_{zz}(\tau; y, 0)$ – разрывающие напряжения в плоскости П трещины. В окрестности контура $\Gamma = \Gamma(0)$ введем ортогональную систему криволинейных координат (ν, s, z), где s – длина дуги на Γ, $|n|$ – расстояние до Γ на плоскости П, причем $n > 0$ вне множества G. В формуле

$$\Gamma(\tau) = \{x : s \in \Gamma, \quad n = h(\tau; s), \quad z = 0\} \tag{4.4}$$

возникает неотрицательная функция $h(\tau; \cdot)$, указывающая глубину продвижения фронта $\Gamma(\tau)$ в точке $s \in \Gamma$ (несколько вольно, не различаем в обозначениях точку и ее координату). При малом τ контуры $\Gamma(\tau)$ также параметризуются переменной $s \in \Gamma$, а под $s(\tau)$ и $\kappa(\tau; s)$ понимаем соответствующую точку на $\Gamma(\tau)$ и кривизну дуги, положительную в выпуклом случае. Из точек $s(\tau)$ вдоль внешних нормалей к $\Gamma(\tau)$ выпустим отрезки $I_d(\tau; s) \subset П$ длиной d.

Приспосабливая к обсуждаемому критерию приемы [4] построения вариационно-асимптотической модели критерия Ирвина, использующие общие принципы составления вариационных неравенств (см., например [18]), предлагаем апостриорную формулировку трехмерного варианта критерия (3.1): *требуется найти такую функцию* $h \geq 0$, *что при любом малом* $\tau \geq 0$ *и всех* $s \in \Gamma$ *верна альтернатива*

$$\begin{aligned} h(\tau; s) > 0 \Rightarrow J(\tau; s) &= \left(1 + \frac{d}{2}\kappa(\tau; s)\right)\sigma_c \\ h(\tau; s) = 0 \Rightarrow J(\tau; s) &\leq \left(1 + \frac{d}{2}\kappa(\tau; s)\right)\sigma_c \end{aligned} \tag{4.5}$$

Помимо самого обозначения

$$J(\tau; s) = \frac{1}{d} \int\limits_{I_d(\tau;\, s)} \sigma_{zz}(\tau; y(\tau; r, s), 0)(1 + r\kappa(\tau; s))dr \tag{4.6}$$

необходимо пояснить происхождение формул (4.5) и (4.6). Во-первых, в (4.6) $y(\tau; r, s)$ – точка на отрезке $I_d(\tau; s)$, удаленная на расстояние r от фронта $\Gamma(\tau)$. Во-вторых, аналогично (3.1) импликации (4.5) означают, что для движущейся точки $s(\tau)$ фронта $\Gamma(\tau)$ напряжение, осредненное вдоль отрезка $I_d(\tau; s)$ (разделили на $1 + 1/2d\kappa$), совпадает с пределом прочности σ_c, а для неподвижной – не превосходит его. Подчеркнем, что неравенство $J(\tau; s) > \sigma_c(1 + 1/2d\kappa(\tau; s))$ невозможно по определению параметра σ_c, а совместное выполнение соотношений $h(\tau; s) > 0$ и $J(\tau; s) < \sigma_c(1 + 1/2d\kappa(\tau; s))$ противоречит существу критерия, так как ввиду второго из них движение точки s должно было прекратиться в какой-то предшествующий момент.

Еще одно обстоятельство – появление в (4.6) взвешенного среднего напряжения – согласовано с частной формулой (4.3), но требует более детального обсуждения. Возможность оперировать с гладкими фронтами трещин в телах, обладающих микроструктурой, обеспечена одной из специфических особенностей критерия Новожилова: в формуле (2.1) фигурирует характерный размер d материала, но напряжения σ_{zz} рассчитываются без учета микронеоднородностей. Для трещины-отрезка размер d связывается с диаметром зерна или конгломерата зерен (см. [8]), а для двумерной трещины логично соотнести $\pi d^2/4$ с площадью сечения названных неоднородностей. Кроме того, $(1 + r\kappa(\tau; s)\, d\, l\, dr$ – элемент площади поверхности на П, записанный в криволинейных координатах и учитывающий якобиан перехода, и поэтому интегральная формулировка критерия (4.5):

$$\int\limits_{\Gamma(\tau)} \left(J(\tau; s) - \sigma_c\left(1 + \frac{d}{2}\kappa(\tau; s)\right)\right)(\chi(\tau; s) - h(\tau; s))dl \leq 0 \ \forall\chi \in C^\infty(\Gamma(\tau)), \quad \chi \geq 0 \qquad (4.7)$$

в конечном счете содержит интеграл по полоске шириной d, охватывающей контур $\Gamma(\tau)$ на плоскости П. Подчеркнем, что присутствие в (4.5) и (4.6) якобиана $1 + r\kappa$ не только учитывает кривизну фронта трещины и корректирует вычисление площади полоски, но и устанавливает ограничение: минимальный радиус кривизны $\min\{\kappa(s)^{-1}\}$ должен превосходить характерный размер d материала.

Положив $\chi = 0$ и $\chi = 2h$, выводим из (4.7) соотношение

$$0 = \int\limits_{\Gamma(\tau)} \left\{J(\tau; s) - \sigma_c\left(1 + \frac{d}{2}\kappa(\tau; s)\right)\right\}h(\tau; s)dl$$

которое после выполнения интегрирования во втором члене превращается в (4.3), если воспроизвести условия рассмотренной задачи о круговой трещине $\tau = 0$, $\Gamma(0)$ – окружность радиусом R и $h(0; s) = \text{const} > 0$. Отметим еще, что в силу (4.5) $\{J(\tau; s) - \sigma_c(1 + 1/2\, d\kappa(\tau; s))\}\, h(\tau; s) = 0$, т.е. вариационное неравенство (4.7) вытекает из соотношений (4.5) ввиду неотрицательности пробной функции χ; по стандартной схеме [18] доказывается и обратное.

5. Асимптотический трехмерный критерий. Запись соотношений (4.5) в виде интегрального вариационного неравенства (4.7) позволяет применить развитый и широко применяемый в механике математический аппарат (существование, единственность и гладкость решения, бифуркационный анализ и пр.). Вместе с тем, прямое применение критериев разрушения в апостериорной формулировке и решение соответствующих вариационных неравенств очень трудоемко, так как требует определить упругие поля при произвольном возмущении фронта трещины. Поэтому целесообразно построение вариационно-асимптотических моделей критериев, опирающихся на асимптотические формулы для напряженно-деформированного состояния и приводящих к корректно поставленным математическим задачам. Платой за пользование асимптотиками и приближенный учет влияния вариаций фронта трещины становится требование малости времениподобного параметра τ и при необходимости долгосрочного прогнозирования – пошаговое применение модели.

Построим вариационно-асимптотическую модель для критерия (4.7) = (4.5) в асимптотической формулировке, т.е. при замене в (4.6) напряжения $\sigma_{zz}(\tau; y(\tau; s, r), 0)$ главным членом его разложения (2.8) вблизи фронта трещины. В статье [4] (см. также [19]–[22] и др.) получена следующая асимптотическая формула для коэффициента интенсивности напряжений на фронте $\Gamma(\tau)$ при симметричной растягивающей нагрузке $p(\tau; y) = p(y) + \tau p'(y)$, приложенной к берегам трещины $M(\tau)$ в упругом однородном пространстве $\Omega = \mathbb{R}^3$:

$$K_I(\tau; s) \sim K_I(s) + \tau K_I'(s) + B(K_I h(\tau, \cdot); s) - b(s)K_I(s)h(\tau; s) \qquad (5.1)$$

Здесь $K_I(s) = K_I(0; s)$ и $k_I(s)$ – коэффициенты в представлении (2.8) напряжений в теле $\mathbb{R}^3 \setminus M$, вызванных нагрузкой $p(y) = p(0; y)$; $K_I'(s)$ – КИН на фронте $\Gamma = \Gamma(0)$, порожденный нагрузкой $p'(y) = \partial_\tau p(0; y)$; $\kappa(s) = \kappa(0; s)$ – кривизна контура Γ; B – интегральный оператор с симметричным положительным ядром Q и b – функция на Γ:

$$B(H;\,s) = \int\limits_{\Gamma}(H(t)-H(s))Q(t,s)dt$$
$$Q(s,t) = Q(t,s) = \frac{1}{2\pi}|s-t|^{-2}+O(1),\quad b(s) = \frac{3}{8}\kappa(s)-q(s)-\frac{1}{2}K_I(s)^{-1}k_I(s) \tag{5.2}$$

Наконец, $q(s)$ – скачок ограниченной части первообразной функции $\Gamma\backslash\{s\}\ni t\mapsto Q(s,t)$, возникающий при регуляризации гиперсингулярного интеграла в (5.2).

Подробное описание составляющих в разложении (5.1) можно найти в [4, 5, 13] и др. Более того, описанная далее вариационно-асимптотическая модель трехмерного критерия Новожилова отличается от аналогичных моделей критериев Ирвина и Гриффитса лишь измененными данными соответствующего вариационного неравенства, и все дальнейшие утверждения подтверждаются ссылками на предшествующие работы [4, 5, 23] и [13, 24, 25].

Предположим, что трещина M полностью раскрыта усилиями p(y), т.е., в частности, $K_I(s)>0$ при $s\in\Gamma$, и введем безразмерный параметр $\beta = d\max\{K_I(s)^{-1}k_I(s),\,\kappa(s)\}$, который следует считать малым для обеспечения упоминавшейся подмены для $\sigma_{zz}(\ldots)$ в (4.6). Кроме того, согласно [4, 5] по величине h из (4.4) определим новую неизвестную

$$H(\tau;\,s) = K_{Ic}^{-1}K_I(s)h(\tau;\,s) \tag{5.3}$$

где $K_{Ic} = (\pi d/2)^{1/2}\sigma_c$ – критический КИН (см. (2.5)). Подставим разложения (5.1), (2.8) в (4.6), (4.5) и, отбросив величины более высоких порядков в сравнении с $O(\tau+\beta)$, после несложных преобразований получим вариационное неравенство

$$\int\limits_{\Gamma}(b(s)H(\tau;\,s)-B(H(\tau;\,\cdot);\,s))(X(s)-H(\tau;\,s))dl \geq$$
$$\geq\int\limits_{\Gamma}F(\tau;\,s)(X(s)-H(\tau;\,s))dl\ \ \forall X\in C^{\infty}(\Gamma),\quad X\geq 0 \tag{5.4}$$

$$F(\tau;\,s) = -1+\frac{1}{K_{Ic}}(K_I(s)+\tau K_I'(s))+\frac{1}{3}\frac{d}{K_{Ic}}(k_1(s)+\kappa(s)K_I(s))-\frac{d}{2}\kappa(s) \tag{5.5}$$

Подчеркнем, что все данные неравенства (5.4) находятся по решениям задачи теории упругости для начального положения трещины $M = M(0)$, но, решив вариационное неравенство, в соответствии с (5.3) и (4.4) восстанавливаем форму фронта трещины в момент τ. Как проверено в [4], свойства интегрального оператора B обеспечивают корректную постановку нелинейной задачи (5.4) на выпуклом конусе $W_{2+}^{1/2}(\Gamma) = \{X\in W_2^{1/2}(\Gamma){:}\ X\geq 0\}$ в пространстве Соболева–Слободецкого. В частности, по замыканию неравенство (5.4) распространяется на пробные функции $X\in W_{2+}^{1/2}(\Gamma)$. Кроме того, в случае $b>0$ задача (5.4) имеет единственное решение $H\in W_{2+}^{1/2}(\Gamma)$ при любой правой части $F\in L_2(\Gamma)$, причем, если $F\in L_q(\Gamma)$ и $q\in[2,+\infty)$, то $H\in W_q^1(\Gamma)$ (повышение гладкости решения) и верна оценка

$$\left\|H;\,W_q^1(\Gamma)\right\|\leq C_p\|F+|F|;\,L_q(\Gamma)\|$$

Как и в п. 3 для двумерных модельных задач, результаты исследования вариационного неравенства (5.4) допускают естественную механическую интерпретацию: если существует только тривиальное решение, то трещина неподвижна; если имеется единственное малое решение, то трещина развивается квазистатически и устойчиво; в случае нескольких малых решений может происходить бифуркация формы фронта трещины; если наряду с малыми решениями имеются большие или негладкие относительно параметра τ, то квазистатическое развитие трещины возможно, но оно заведомо неустойчивое; если малых решений нет, то развитие трещины оказывается лавинообразным и без учета динамических эффектов анализ процесса разрушения неправомерен.

Новый момент – возможность бифуркаций при наличии нескольких малых решений (ср. с работой [3] для двумерной задачи с периодическим семейством краевых трещин, но в случае трещины-отрезка бифуркации отсутствуют согласно [17]).

Если нагрузка возрастает и $K_I'(s) \geq 0$, а момент $\tau = 0$ соответствует старту трещины (при малых $\tau < 0$ неравенство (5.4) имеет лишь тривиальное решение $H = 0$), то функция (5.5) должна удовлетворять неравенству

$$F(0;\, s) \leq 0, \quad s \in \Gamma \tag{5.6}$$

и иметь нулевой глобальный максимум. Выражение (5.5) отличается от правой части в аналогичной модели для критерия Ирвина двумя последними членами. Нетрудно усмотреть, что при исчезающе малой величине β последнее слагаемое в (5.5) пренебрежимо мало и, значит, критическая нагрузка по Новожилову совпадает с критической нагрузкой, найденной согласно критерию Ирвина из условия $\max\, \{K_I(s)\} = K_{Ic}$ (см. [4]). В общем случае сумма названных членов не является знакоопределенной и решения двух обсуждаемых моделей, заведомо различающиеся разве лишь на малую величину $O(\beta)$, сравнить не удается. Напомним, что силовой и энергетический трехмерные критерии разрушения обнаруживают одну и ту же критическую нагрузку, однако для выпуклых трещин из-за положительной кривизны $\kappa(s)$ первый предсказывает большую глубину продвижения фронта, чем второй (см. [5], а также [15]).

В силу (5.6) и (5.5) на вогнутых участках фронта Γ при прочих равных условиях разрушение начинается раньше, чем на выпуклых. Асимптотические формулы для фронта $\Gamma(\tau)$ трещины $M(\tau)$ при малых τ, полученные в [23], годятся и для модели (5.4) трехмерного критерия Новожилова, причем локальное разрушение, как и для других моделей, характеризуется сингулярным возмущением фронта Γ: первая производная по τ функции h из (4.4) обращается в нуль при $\tau = 0$, а вторая не существует! Этот эффект объясняется разными скоростями распространения отростка трещины вглубь $O(\tau^{3/2})$ и вширь $O(\tau^{1/2})$.

Поскольку критерий Новожилова (4.7)=(4.5) не привязан к конкретному виду сингулярностей напряжений, он в отличие от трехмерных критериев разрушения, разработанных в [4] и [5], применим и в задаче о росте сквозной трещины в толстой пластине, упоминавшейся в п. 1. Вместе с тем, построение подобной (5.4) вариационно-асимптотической модели критерия для пластины сопряжено с определенными трудностями из-за отсутствия асимптотических формул для приращения КИН при вариации кромки сквозной трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00835).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Назаров С.А.* Об эффекте трехмерности вблизи вершины трещины в тонкой пластине // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 500–510.
2. *Морозов Е.М.* Вариационный принцип в механике разрушения // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 6. С. 1308–1311.

3. *Nemat-Nasser S., Sumi Y., Keer L.M.* Unstable growth of tension craks in brittle solids: stable and unstable bifurcations, snap-through and imperfection sensitivity // Intern. J. Solids Structures. 1980. V. 16. № 11. P. 1017–1035.
4. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
5. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Об эквивалентности критериев разрушения для трещины отрыва в упругом пространстве // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 2. С. 101–113.
6. *Новожилов В.В.* К основам теории равновесных трещин в упругих телах // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5. С. 797–812.
7. *Морозов Н.Ф.* Исследование разрушающей нагрузки для области, ослабленной вырезом в виде лунки // ДАН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1336–1338.
8. *Морозов Н.Ф., Новожилов В.В.* Некоторые проблемы структурной механики разрушения // Физ.-хим. механика материалов. 1988. Т. 24. № 1. С. 21–26.
9. *Морозов Н.Ф., Петров Ю.В.* Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. 129 с.
10. *Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Уткин А.А.* О направлении роста трещины в условиях асимметричного ударного воздействия // Докл. РАН. 1996. Т. 351. № 6. С. 763–765.
11. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1976. 573 с.
12. *Bueckner H.F.* Weight functions and fundamental fields for the penny-shaped and the halfplane crack in three dimensional space // Inter. J. Solids Structures. 1987. V. 23. № 1. P. 57–93.
13. *Bach M., Nazarov S.A., Wendland W.L.* Propagation of a penny shaped crack under the Irwin criterion // Analysis, numerics and applications of differential and intergral equations. Pitman Research Notes in Math. Ser. 379. Harlow, Essex: Longman, 1998. P. 17–21.
14. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1. 448 с.; Т. 2. С. 249–1013.
15. *Назаров С.А.* Взаимодействие трещин при хрупком разрушении. Силовой и энергетический подходы // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 484–496.
16. *Назаров С.А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124–129.
17. *Колтон Л.Г.* Медленный рост системы трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 5. С. 95–100.
18. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.
19. *Захаревич И.С.* О вариации решений интегродифференциальных уравнений смешанных задач теории упругости при вариации области // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 961–968.
20. *Gao H., Rice J.R.* Somewhat circular tensile cracks // Intern. J. Fractire. 1987. V. 33. № 3. P. 155–174.
21. *Rice J.R.* First-order variation in elastic fields due to variation in location of a planar crack front // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1985. V. 52. № 3. P. 571–579.
22. *Leblond J.-B., Lazarus V.S.-E., Mouchrif S.* Crack paths in three-dimensional elastic solids. II: three-term expansion of the stress intensity factors – applications and perspectives // Intern. J. Solids Structures. 1999. V. 36. № 1. P. 105–142.
23. *Колтон Л.Г., Назаров С.А.* Вариация формы ребра плоской локально неравновесной трещины нормального отрыва // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 125–133.
24. *Bach M., Nazarov S.A.* Smoothness properties of solutions to variational inequalities describing propagation of mode-1 cracks // Mathematical aspects of boundary element method (Palaiseau, 1998). London: CRC; / Chapman & Hall, 2000. P. 23–32.
25. *Bach M., Nazarov S.A., Wendland W.L.* Stable propagation of a mode-1 crack in an isotropic elastic space. Comparison of the Irwin and the Griffith approaches // Problemi Attuali dell'Analisi e della Fisica Matematica / Ed. P.E. Ricci, MM, Aracne Editrice, Roma, 2000. P. 167–189.

С.-Петербург

Поступила в редакцию
9.03.2004