

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. Д.А. ГУЛЯЕВ, А.А. ЗАГОРДАН, В.И. ШАЛАШИЛИН

НЕКОТОРЫЕ НЕТРАДИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ БРУСА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОПЕРЕЧНЫХ НАГРУЗОК

В отличие от классической задачи Л. Эйлера об устойчивости балки под действием продольных сжимающих нагрузок, здесь рассматривается устойчивость бруса при действии поперечных нагрузок, которые при возмущениях от равновесного состояния сохраняют первоначальное направление. Исследованы изгибные и крутильные формы потери устойчивости. Для выявления сдвиговой формы потери устойчивости использована модель Тимошенко [1].

1. Изгибная форма потери устойчивости при действии равномерных поперечных нагрузок. Рассмотрим прямолинейный брус длины l . Начало прямоугольной системы координат свяжем с левым торцом бруса. Ось x направим вдоль оси бруса, а ось y и z – по главным центральным осям сечения. Поперечное сечение бруса будем считать симметричным относительно оси z . Пусть брус нагружен в плоскости x, y равномерными сжимающими нагрузками интенсивности q , действующими нормально к оси x (фиг. 1, *a*). Прямолинейное состояние бруса является состоянием равновесия при любых значениях q . Следуя Эйлеру, будем искать смежные состояния равновесия. Сначала рассмотрим эти состояния при изгибе в плоскости x, y . При этом ограничимся моделью изгиба балки в рамках гипотез Бернулли–Эйлера (“плоских сечений”). Прогиб балки в плоскости x, y обозначим через $v(x)$. Будем считать, что при возмущениях нагрузка q сохраняет свое направление. Элемент бруса dx в возмущенном состоянии показан на фиг. 1, *b*. Через Q и M обозначены перерезывающая сила и изгибающий момент в брус: h – высота сечения бруса. Из условий равновесия элемента следует

$$dQ = 0, \quad dM - Qdx + qh\alpha dx = 0 \quad (\alpha \ll 1) \quad (1)$$

При малых прогибах $v(x)$ ($\alpha \ll 1$) и в пределах закона Гука

$$\alpha = dv/dx, \quad M = EJ_z d^2 v/dx^2 \quad (2)$$

Здесь EJ_z – изгибная жесткость бруса.

Из уравнений (1), (2) следует уравнение изгиба балки в возмущенном состоянии

$$v''' + k^2 v' = 0, \quad k^2 = qh/EJ_z, \quad (\cdot)' = d/dx(\cdot) \quad (3)$$

Его общее решение имеет вид

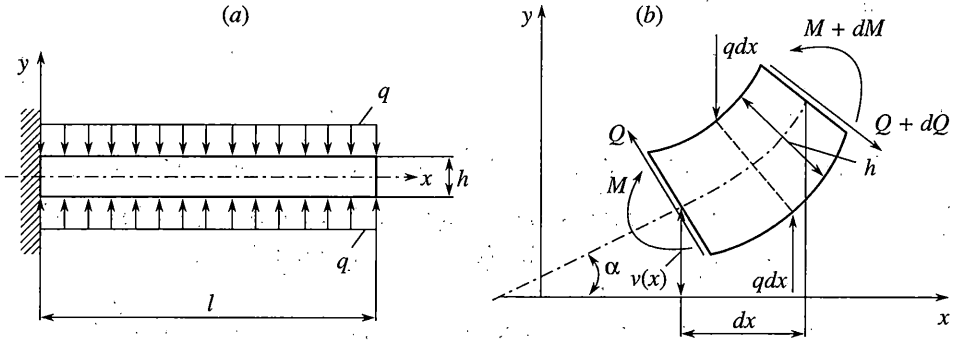
$$v(x) = C_1 + C_2 \sin kx + C_3 \cos kx \quad (4)$$

Для бруса, показанного на фиг. 1, из условия закрепления следует, что

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad M(l) = 0 \quad (5)$$

Из них, с учетом (2) следует уравнения

$$C_1 + C_3 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 \cos kl = 0 \quad (6)$$



Фиг. 1

Их нетривиальное решение $C_3 \neq 0$, т.е. существование смежных форм равновесия, возможно только, когда $kl = 1/2 (2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, \dots$). Отсюда получаем критические значения для нагрузки q :

$$q_{cr} = \frac{(2n + 1)^2 \pi^2 EJ_z}{4l^2 h} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Им соответствует форма потери устойчивости

$$v(x) = C_3 \left(1 - \cos \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} \right) \quad (8)$$

Для шарнирно опертого бруса из условий $v(0) = 0$, $v''(0) = 0$, $v''(l) = 0$ получим

$$q_{cr} = n^2 \pi^2 EJ_z / (l^2 h) \quad (9)$$

и форму потери устойчивости

$$v(x) = C_2 \sin(n\pi x / l) \quad (10)$$

2. Изгибная форма потери устойчивости при действии сосредоточенных поперечных нагрузок. Пусть брус нагружен с правого конца сосредоточенными силами величины P (фиг. 2, а). Прямолинейное состояние здесь является состоянием равновесия при любых значениях P . Будем искать смежные состояния равновесия при изгибе в плоскости x, y . Изгиб, по-прежнему, будем моделировать в рамках гипотез Бернулли-Эйлера. Силы P при возмущениях сохраняют свое направление. Ввиду отсутствия действия на брус распределенных нагрузок, в пределах закона Гука справедливо уравнение

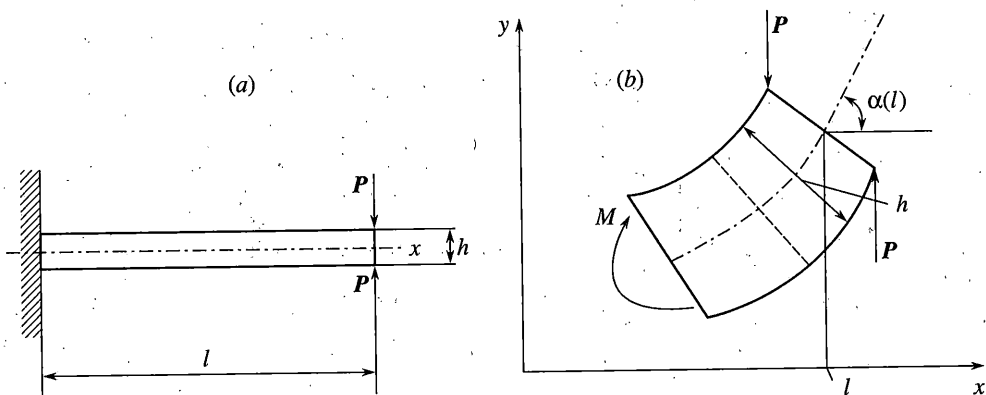
$$q = 0, \quad q = EJ_z d^4 v / dx^4 \quad (11)$$

Здесь EJ_z – изгибная жесткость. Отсюда следует

$$v^{IV} = 0 \quad (12)$$

Общее решение (12) имеет вид

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad (13)$$



Фиг. 2

Для бруса, показанного на фиг. 2, а из условий закрепления следует

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v'''(l) = 0 \quad (14)$$

Отсюда следует, что

$$v(x) = C_3 x^2 \quad (15)$$

Условие равновесия показанной на фиг. 2, б части бруса в возмущенном состоянии имеет вид при малых α ($\alpha \ll 1$):

$$M = Ph\alpha(l) \quad (16)$$

Отсюда, учитывая соотношения (2) и выражение (15), получаем

$$2EJ_z C_3 = 2PhlC_3 \quad (17)$$

Смежные формы равновесия возникают при $C_3 \neq 0$, что возможно когда

$$P = P_{cr} = EJ_z/hl \quad (18)$$

При этом форма потери устойчивости определяется выражением (15).

3. Крутильная форма потери устойчивости при действии распределенных нагрузок. Для бруса, показанного на фиг. 1, а, будем искать смежные формы равновесия при таких возмущениях, когда брус закручивается относительно оси x .

Кручения будем описывать в рамках традиционного для сопротивления материалов приближения. Тогда, если M_k крутящий момент, а φ – угол закручивания, соотношение закона Гука имеют вид

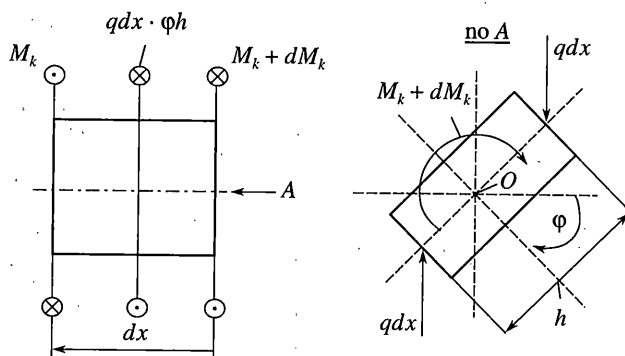
$$M_k = GJ_k \frac{d\varphi}{dx} \quad (19)$$

Здесь GJ_k – крутильная жесткость бруса.

Из равновесия элемента бруса, показанного на фиг. 3, следует при $\varphi \ll 1$:

$$dM_k + qh\varphi dx = 0 \quad (20)$$

где h – высота сечения. На фиг. 3 сечение условно взято в виде прямоугольника.



Фиг. 3

Из соотношений (20) и (21) следует уравнение кручения бруса в возмущенном состоянии

$$\varphi'' + k^2 \varphi = 0, \quad k^2 = qh/GJ_k, \quad \frac{d}{dx}(\cdot) = \varphi' \quad (21)$$

Общее решение уравнения (21):

$$\varphi(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (22)$$

Условия закрепления бруса таковы, что

$$\varphi(0) = 0, \quad M_k(l) = 0 \quad (23)$$

Из (22) и (23), учитывая (19), приходим к уравнениям

$$C_2 = 0, \quad C_1 \cos kl = 0 \quad (24)$$

Их тривиальное решение $C_1 \neq 0$ возможно, когда $kl = 1/2(2n + 1)\pi$ ($n = 0, 1, \dots$). Отсюда получаем критические значения нагрузки

$$q_{cr} = \frac{(2n + 1)^2 \pi^2 GJ_z}{4l^2 h} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (25)$$

Соответствующая им крутильная форма потери устойчивости

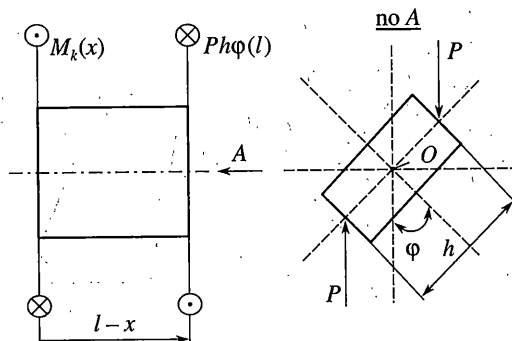
$$\varphi(x) = C_1 \sin \frac{(2n + 1)\pi x}{2l} \quad (26)$$

4. Крутильная форма потери устойчивости при действии сосредоточенных поперечных нагрузок. Для бруса, показанного на фиг. 2, а, будем искать смежные формы равновесия при его кручении. Тогда из равновесия отсеченной части бруса, показанной на фиг. 4, следует

$$M_k(x) = Ph\varphi(l) \quad (27)$$

Поэтому $M_k' = 0$ и, учитывая закон Гука (19):

$$\varphi'' = 0 \quad (28)$$



Фиг. 4

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 x \quad (29)$$

Брус закреплен так, что

$$\varphi(0) = 0, \quad M_k(l) = Ph\varphi(l) \quad (30)$$

Из (19), (29) и (30) следует

$$C_1 = 0, \quad GJ_k C_2 = PhlC_2 \quad (31)$$

Смежные формы равновесия возможны при $C_2 \neq 0$, т.е. тогда, когда

$$P = P_{cr} = GJ_k/hl \quad (32)$$

При этом форма потери устойчивости имеет вид

$$\varphi(x) = C_2 x$$

5. Сдвиговая форма потери устойчивости. Такая форма потери устойчивости была исследована при анализе устойчивости трехслойного кольца [3]. Для ее выявления используем модель Тимошенко [1], в которой поперечные сечения балки полагаются плоскими, но, в отличие от гипотезы Бернулли–Эйлера, они перестают быть нормальными к оси. Тогда деформацию элемента dx бруса можно представить как суперпозицию двух деформаций, представленных на фиг. 5, *a*, *b*. Первое слагаемое соответствует гипотезе Бернулли (фиг. 5, *a*) и деформация волокна AB , расположенного на расстоянии y от нейтрального слоя, равна

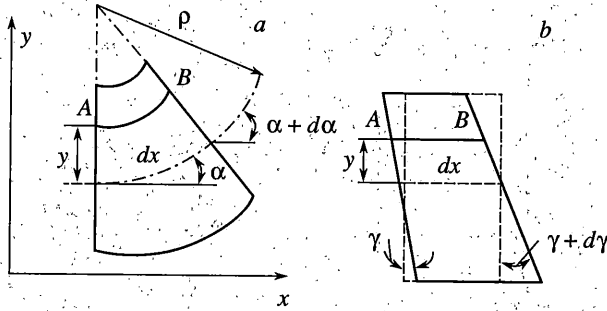
$$\varepsilon(\alpha) = -y\alpha' = -y\nu'' \quad (33)$$

Второе слагаемое соответствует сдвиговым деформациям (фиг. 5, *b*). Если через y обозначить угол сдвига, то удлинение волокна AB равно

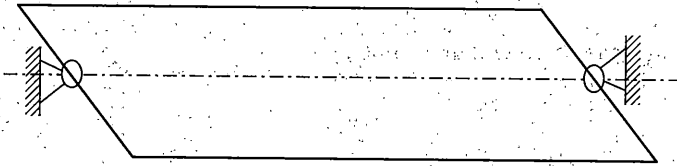
$$\varepsilon(\gamma) = -y\gamma' \quad (34)$$

Таким образом, суммарное удлинение волокна AB равно

$$\varepsilon(\alpha) = -y(\alpha' + \gamma') = -y(\nu'' + \gamma') \quad (35)$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Примем традиционную для модели бруса гипотезу о том, что продольные волокна бруса испытывают одноосное растяжение. Тогда при выполнении закона Гука в поперечных сечениях бруса возникают нормальные напряжения

$$\sigma = E\varepsilon \quad (36)$$

где E – модуль упругости при растяжении. Введем перерезывающую силу Q и изгибающий момент M , положительные направления которых показаны на фиг. 1, b . Тогда

$$M = -\int_F \sigma y dF \quad (37)$$

Здесь F – площадь поперечного сечения. Отсюда, с учетом зависимостей (35), (36), следует

$$M = EI(\alpha' + \gamma') = EI(v'' + \gamma') \quad (38)$$

Соотношение упругости, связывающее перерезывающую силу Q с углом сдвига γ , примем в форме [1]:

$$Q = GF\gamma/k \quad (39)$$

Здесь G – модуль упругости при сдвиге; k – коэффициент, учитывающий форму сечения. С учетом выражений (38), (39), уравнения равновесия в возмущенном состоянии (1) сводятся к виду

$$EJ_2\alpha'' + qh\alpha + (qh - GF/k)\gamma = 0, \quad \gamma' = 0 \quad (40)$$

Отсюда видно, что возможны две формы потери устойчивости: бессдвиговая ($\gamma = 0, \alpha \neq 0$) и сдвиговая ($\gamma \neq 0, \alpha \equiv 0$).

Бессдвигаемая форма описывается уравнением (3) и ей, в зависимости от условия закрепления концов бруса, соответствуют критические нагрузки вида (7), (9) и формы потери устойчивости (8), (10).

Если на концах балки нет стеснения на деформацию сдвига γ , то возможна сдвигаемая форма потери устойчивости, когда сдвиг возникает без изгибных деформаций, т.е. когда ($\alpha \equiv 0, \gamma \neq 0$). Ей соответствует критическая нагрузка

$$q_{cr} = GF/kh \quad (41)$$

Форма потери устойчивости показана на фиг. 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наук. думка, 1972. 507 с.
2. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 544 с.
3. Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. Уточненные уравнения среднего изгиба трехслойных оболочек и сдвиговые формы потери устойчивости. Докл. АН. 2003. Т. 392. № 2. С. 195–200.

Москва

Поступила в редакцию
17.03.2005