

УДК 539.3:534.1

© 2006 г. С.А. АГАФОНОВ, Г.А. ЩЕГЛОВ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ВЯЗКОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Устойчивость упругих тел и элементов конструкций под действием неконсервативных нагрузок – один из разделов механики деформируемого тела и теории устойчивости, вызывавший интерес на протяжении всего минувшего столетия [1, 2, 3].

В литературе по динамической устойчивости хорошо известно явление “парадокса Циглера”. При действии исчезающе малой вязкости в линейных неконсервативных системах происходит понижение границы устойчивости на конечную величину. Подобные явления подробно обсуждаются, например в обзоре [4]. В работе [5] исследуется динамическая устойчивость стержня с нелинейной внутренней вязкостью. Один конец стержня жестко закреплен, а на другой конец действует постоянная по величине следящая сила. Показано, что имеет место эффект снижения границы устойчивости при наличии нелинейной вязкости.

В настоящей работе рассматривается свободный прямолинейный стержень с нелинейной внутренней вязкостью, на один из свободных концов которого действует следящая сила. Показано, что и в этом случае происходит снижение границы устойчивости на конечную величину.

1. Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается свободный прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения длиной l , погонной массой ρ с определяющим соотношением:

$$\sigma = E\varepsilon + k_1\dot{\varepsilon}^3 + k_2\varepsilon^2\dot{\varepsilon} \quad (1.1)$$

где E – модуль Юнга, а k_1, k_2 – коэффициенты нелинейной вязкости. Точкой обозначена производная по времени.

Заметим, что такая модель не является моделью Кельвина – Фойгта, так как не содержит слагаемого, линейно зависящего от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$. Модель (1.1) можно назвать вязкоупругой моделью с нефойгтовой вязкостью [5].

На один из свободных концов действует постоянная по величине следящая сила P . Упругий стержень совершает равноускоренное движение под действием следящей силы.

Рассматриваются малые поперечные перемещения стержня $w = w(x, t)$. Уравнение поперечных колебаний стержня, приведенное к безразмерной форме, имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left[p(1-x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right] + a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right)^3 \right] = 0 \quad (1.2)$$

В уравнении (1.2) с первого по пятый члены являются соответственно погонными силами упругости, инерции поперечных колебаний, силой, вызванной действием следящей

силы и продольной силой инерции, и, наконец, силами, вызываемыми нелинейной внутренней вязкостью. Длина, погонная масса и изгибная жесткость безразмерного стержня единичны. Безразмерная сжимающая следящая сила, безразмерные коэффициенты нелинейного демпфирования и безразмерное время соответственно равны

$$p = Pl^2/(EJ), \quad a_1 = k_1Il/(l^4\sqrt{EJ\rho}), \quad a_2 = k_2I\sqrt{EJ}/(l^2\sqrt{\rho^3}), \quad t = \tau\sqrt{EJ}/(\rho l^4)$$

где J, I – соответствующие моменты инерции сечения стержня. Граничные условия на свободных краях стержня

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=1} = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=1} = 0 \quad (1.3)$$

Необходимо указать, что для случая $a_1 = 0, a_2 = 0$ (упругий стержень) критическое значение следящей силы $p \cong 109.7$ было найдено в работе [6].

Рассматривается задача о влиянии нелинейной внутренней вязкости ($a_1 > 0, a_2 > 0$) на значение критической нагрузки p . Задача решается в строгой нелинейной постановке.

Рассматриваются три моды колебаний стержня

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^3 Y_i(x)u_i(t) \quad (1.4)$$

где формы колебаний $Y_i(x)$ взяты в виде балочных функций Крылова для граничных условий (1.3)

$$Y_i(x) = \cos \delta_i x + \operatorname{ch} \delta_i x - \lambda_i [\sin \delta_i x + \operatorname{sh} \delta_i x] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.5)$$

$$\delta_1 \cong 4.730, \quad \delta_2 \cong 7.853, \quad \delta_3 \cong 10.996, \quad \lambda_1 \cong 0.983, \quad \lambda_2 \cong 1.001, \quad \lambda_3 \cong 1.000$$

Необходимо отметить: ограничение тремя модами связано с тем, что при этом числе критическое значение следящей силы p для случая $a_1 = 0, a_2 = 0$ совпадает с результатом [6], где собственные формы искались в виде ряда.

После применения метода Бубнова – Галеркина получена система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат $u_i(t)$

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} + a_1\mathbf{U} + a_2\mathbf{V} = 0 \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^T, \quad \mathbf{U} = \{U_1, U_2, U_3\}^T, \quad \mathbf{V} = \{V_1, V_2, V_3\}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_1 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & B_2 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & B_3 \end{bmatrix}$$

$$U_k = 3g_{k1}u_1^2\dot{u}_1 + g_{k2}u_2^2\dot{u}_1 + g_{k3}u_3^2\dot{u}_1 + 2(g_{k4}u_1u_2\dot{u}_1 + g_{k5}u_1u_3\dot{u}_1 + g_{k6}u_2u_3\dot{u}_1) + \\ + g_{k4}u_1^2\dot{u}_2 + 3g_{k8}u_2^2\dot{u}_2 + g_{k9}u_3^2\dot{u}_2 + 2(g_{k2}u_1u_2\dot{u}_2 + g_{k11}u_2u_3\dot{u}_2 + g_{k6}u_1u_3\dot{u}_2) + \\ + g_{k5}u_1^2\dot{u}_3 + g_{k11}u_2^2\dot{u}_3 + 3g_{k15}u_3^2\dot{u}_3 + 2(g_{k6}u_1u_2\dot{u}_3 + g_{k3}u_1u_3\dot{u}_3 + g_{k9}u_2u_3\dot{u}_3)$$

$$V_k = g_{k1}\dot{u}_1^3 + g_{k8}\dot{u}_2^3 + g_{k15}\dot{u}_3^3 + 2g_{k6}\dot{u}_1\dot{u}_2\dot{u}_3 + g_{k2}\dot{u}_1\dot{u}_2^2 + g_{k3}\dot{u}_1\dot{u}_3^2 + g_{k4}\dot{u}_2\dot{u}_1^2 + \\ + g_{k5}\dot{u}_3\dot{u}_1^2 + g_{k9}\dot{u}_2\dot{u}_3^2 + g_{k11}\dot{u}_3\dot{u}_2^2$$

$$\Psi_k = \int_0^1 Y_k^2 dx, \quad e_{kj} = \frac{1}{\Psi_k} \int_0^1 (1-x) \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} Y_k dx, \quad f_{kj} = \frac{1}{\Psi_k} \int_0^1 \frac{\partial Y_j}{\partial x} Y_k dx$$

$$S_{kj} = p(e_{kj} - f_{kj}), \quad B_k = \delta_k^4 + S_{kk}$$

$$N_{kj} = \frac{1}{\Psi_k} \int_0^1 \left[2 \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} \right)^2 + \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \right)^2 \right] Y_k dx$$

$$M_{kjm} = \frac{1}{\Psi_k} \int_0^1 Y_k \left[2 \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} \right)^2 + \frac{\partial^4 Y_m}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x^2} \left(2 \frac{\partial^3 Y_m}{\partial x^3} \frac{\partial^3 Y_j}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 Y_m}{\partial x^2} \frac{\partial^4 Y_j}{\partial x^4} \right) \right] dx$$

$$g_{k1} = N_{k1}, \quad g_{k2} = M_{k21}, \quad g_{k3} = M_{k31}, \quad g_{k4} = M_{k12}, \quad g_{k5} = M_{k13}$$

$$g_{k6} = \frac{1}{\Psi_k} \int_0^1 Y_k \left[\frac{\partial^4 Y_1}{\partial x^4} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \frac{\partial^4 Y_2}{\partial x^4} \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} \frac{\partial^4 Y_3}{\partial x^4} + \right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{\partial^3 Y_1}{\partial x^3} \frac{\partial^3 Y_2}{\partial x^3} \frac{\partial^2 Y_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 Y_1}{\partial x^3} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} \frac{\partial^3 Y_3}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} \frac{\partial^3 Y_2}{\partial x^3} \frac{\partial^3 Y_3}{\partial x^3} \right) \right] dx$$

$$g_{k8} = N_{k2}, \quad g_{k9} = M_{k32}, \quad g_{k11} = M_{k23}, \quad g_{k15} = N_{k3} \quad (k = 1, 2, 3)$$

2. Нормализация уравнений движения. Уравнение частот, полученное из $\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\mathbf{u} = 0$ подстановкой $u_k(t) = C_k \exp(i\omega t)$ ($k = 1, 2, 3$), приводит к характеристическому уравнению

$$\omega^6 + b_2 \omega^4 + b_1 \omega^2 + b_0 = 0 \tag{2.1}$$

$$b_0 = -B_1 B_2 B_3 - [S_{12} S_{23} S_{31} + S_{21} S_{32} S_{13}] + [B_2 S_{13} S_{31} + B_3 S_{12} S_{21} + B_1 S_{32} S_{23}]$$

$$b_1 = B_1 B_2 + B_1 B_3 + B_2 B_3 - [S_{13} S_{31} + S_{12} S_{21} + S_{32} S_{23}], \quad b_2 = -[B_1 + B_2 + B_3]$$

Из решения уравнения (2.1) находятся собственные частоты $\omega_k(p)$ ($k = 1, 2, 3$), зависящие от следящей силы p . В частности, при $p = 0$ имеем $\omega_k = \delta_k^2$. На фиг. 1 представлен график изменения частот $\omega_k(p)$ в зависимости от величины следящей силы. Видно, что при $p \approx 109.7$, найденном в работе [6], происходит совпадение частот $\omega_1 = \omega_2$.

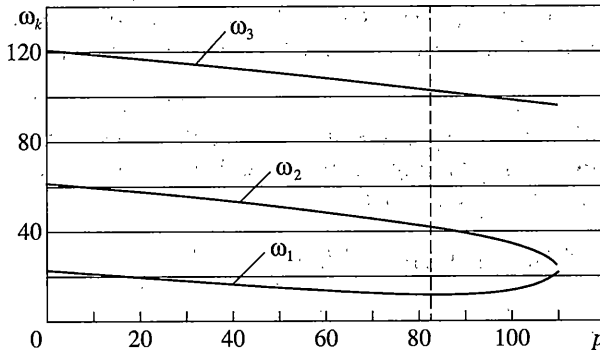
Матрица собственных форм имеет вид

$$\mathbf{L} = [l_{ij}], \quad l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$$

$$l_{12} = \frac{p^2 S_{23} S_{31} - p S_{21} (B_{33} - \omega_1^2)}{(B_{22} - \omega_1^2)(B_{33} - \omega_1^2) - p^2 S_{32} S_{23}}, \quad l_{13} = \frac{p^2 S_{21} S_{32} - p S_{31} (B_{22} - \omega_1^2)}{(B_{22} - \omega_1^2)(B_{33} - \omega_1^2) - p^2 S_{32} S_{23}}$$

$$l_{21} = \frac{p^2 S_{13} S_{32} - p S_{12} (B_{33} - \omega_2^2)}{(B_{11} - \omega_2^2)(B_{33} - \omega_2^2) - p^2 S_{13} S_{31}}, \quad l_{23} = \frac{p^2 S_{12} S_{31} - p S_{32} (B_{11} - \omega_2^2)}{(B_{11} - \omega_2^2)(B_{33} - \omega_2^2) - p^2 S_{13} S_{31}} \tag{2.2}$$

$$l_{31} = \frac{p^2 S_{12} S_{23} - p S_{13} (B_{22} - \omega_3^2)}{(B_{11} - \omega_3^2)(B_{22} - \omega_3^2) - p^2 S_{12} S_{21}}, \quad l_{32} = \frac{p^2 S_{13} S_{21} - p S_{23} (B_{11} - \omega_3^2)}{(B_{11} - \omega_3^2)(B_{22} - \omega_3^2) - p^2 S_{12} S_{21}}$$



Фиг. 1

Поскольку рассматривается неконсервативная задача, то для перехода к главным нормальным координатам требуется провести анализ сопряженной системы $\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}^T \mathbf{u} = 0$ и найти сопряженную матрицу собственных форм $\mathbf{L}^* = [l_{ij}^*]$, где l_{ij}^* определяются по формулам, аналогичным (2.2). После перехода к главным нормальным координатам $\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{x}$ система (1.6) примет вид

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{x} + a_1 \mathbf{U}^* + a_2 \mathbf{V}^* = 0 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2) = \mathbf{L}^* \mathbf{A} \mathbf{L}, \quad \mathbf{U}^* = \mathbf{L}^* \mathbf{U}, \quad \mathbf{V}^* = \mathbf{L}^* \mathbf{V}$$

Линейным преобразованием $x_k = (y_k + \bar{y}_k)/2$, $\dot{x}_k = i\omega_k(y_k - \bar{y}_k)/2$ ($k = 1, 2, 3$) (черта означает комплексное сопряжение) система (2.3) приводится к виду

$$\dot{y}_k = i\omega_k y_k + Y_k(y_1, y_2, y_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

Здесь Y_k – совокупность членов третьего порядка относительно y_k, \bar{y}_k ($k = 1, 2, 3$).

Уравнения для комплексно сопряженных переменных \bar{y}_k в (2.4) не выписаны.

Далее в системе (2.4) проводится нелинейная нормализация до членов третьего порядка включительно. Предполагая, что в системе отсутствуют внутренние резонансы четвертого порядка и кратности, равной 1 или 2, с помощью полиномиального преобразования

$$y_k = z_k + Z_k(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.5}$$

где Z_k – однородные формы третьего порядка относительно переменных z_k, \bar{z}_k , система (2.4) приводится к нормальной форме до членов третьего порядка включительно

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= i\omega_1 z_1 - A_{11} z_1^2 \bar{z}_1 - A_{12} z_1 z_2 \bar{z}_2 - A_{13} z_1 z_3 \bar{z}_3 \\ \dot{z}_2 &= i\omega_2 z_2 - A_{21} z_2 z_1 \bar{z}_1 - A_{22} z_2^2 \bar{z}_2 - A_{23} z_2 z_3 \bar{z}_3 \\ \dot{z}_3 &= i\omega_3 z_3 - A_{31} z_3 z_1 \bar{z}_1 - A_{32} z_3 z_2 \bar{z}_2 - A_{33} z_3^2 \bar{z}_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Полагая $z_k = \sqrt{\rho_k} \exp(i\varphi_k)$, $\bar{z}_k = \sqrt{\rho_k} \exp(-i\varphi_k)$ ($k = 1, 2, 3$), получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -2A_{11}\rho_1^2 - 2A_{12}\rho_1\rho_2 - 2A_{13}\rho_1\rho_3 \\ \dot{\rho}_2 &= -2A_{21}\rho_2\rho_1 - 2A_{22}\rho_2^2 - 2A_{23}\rho_2\rho_3 \\ \dot{\rho}_3 &= -2A_{31}\rho_3\rho_1 - 2A_{32}\rho_3\rho_2 - 2A_{33}\rho_3^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Если хотя бы один из коэффициентов A_{11}, A_{22}, A_{33} будет отрицательным, то равновесное положение стержня будет неустойчивым [7]. Например, пусть $A_{11} < 0$. Тогда, полагая $\rho_2(t) = \rho_3(t) \equiv 0$, получим уравнение $\dot{\rho}_1 = -2A_{11}\rho_1^2$, имеющее растущее решение. Заметим, что вывод о неустойчивости сохраняется и для полной нелинейной системы [7].

3. Анализ устойчивости и численные расчеты. Аналитические выражения для коэффициентов A_{11}, A_{22}, A_{33} приведены ниже

$$\begin{aligned} A_{11} &= \Omega_1(l_{21}^3 K_{1,8} + l_{31}^3 K_{1,15} + l_{21}^2 K_{1,2} + l_{31}^2 K_{1,3} + l_{21} l_{31}^2 K_{1,9} + \\ &+ l_{31} l_{21}^2 K_{1,11} + l_{21} K_{1,4} + l_{31} K_{1,5} + 2l_{21} l_{31} K_{1,6} + K_{1,1}) \\ A_{22} &= \Omega_2(l_{12}^3 K_{2,1} + l_{32}^3 K_{2,15} + l_{12}^2 K_{2,4} + l_{32}^2 K_{2,9} + l_{12} l_{32}^2 K_{2,3} + \\ &+ l_{32} l_{12}^2 K_{2,5} + l_{12} K_{2,2} + l_{32} K_{2,11} + 2l_{12} l_{32} K_{2,6} + K_{2,8}) \\ A_{33} &= \Omega_3(l_{13}^3 K_{3,1} + l_{23}^3 K_{3,8} + l_{13}^2 K_{3,5} + l_{23}^2 K_{3,11} + \\ &+ l_{13} l_{23}^2 K_{3,2} + l_{23} l_{13}^2 K_{3,4} + l_{13} K_{3,3} + l_{23} K_{3,9} + 2l_{13} l_{23} K_{3,6} + K_{3,15}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$K_{i,j} = \sum_{m=1}^3 l_{im}^* g_{mj}, \quad \Omega_k = \frac{3}{8}(a_1 + 3a_2 \omega_k^2)$$

Поскольку $a_1 > 0, a_2 > 0$, то знак коэффициентов (3.1) определяется знаками выражений, стоящими в скобках, которые зависят только от p . Можно проверить, что при $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ и $p = 0$ коэффициенты $A_{11} > 0, A_{22} > 0, A_{33} > 0$.

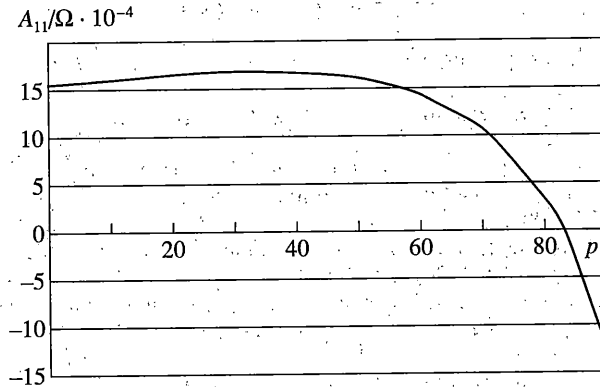
После вычисления коэффициентов g_{ij}, l_{ij}, l_{ij}^* установлено, что выражения для A_{22}, A_{33} в интервале $0 < p_K < 109,7$ не меняют своего знака. Они остаются практически постоянными: $A_{22} \cong 8 \cdot 10^6, A_{33} \cong 1,6 \cdot 10^8$. На исследуемом интервале p отрицательным становится только коэффициент A_{11} .

Проведенное исследование позволило найти критическое значение следящей силы в диапазоне $0 < p_K < 109,7$, при которой происходит потеря устойчивости прямолинейной формы стержня. Зависимость A_{11}/Ω_1 от следящей силы p представлена на фиг. 2. Критическое значение следящей силы, полученное путем численного решения уравнения $A_{11}(p)/\Omega_1 = 0$, оказалось равным $p_K \approx 82,985$. Это критическое значение оказалось меньшим, чем критическое значение при отсутствии внутренней вязкости.

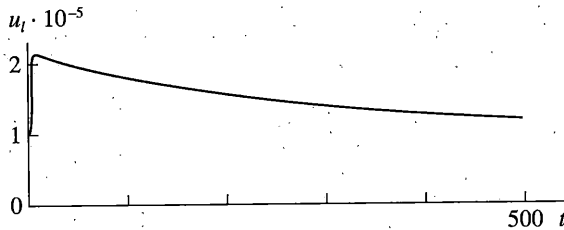
Было проведено численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.6) относительно обобщенных координат $u_i(t)$ для различных p . Были использованы начальные условия $u_i(0) = 10^{-5}, \dot{u}_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$). Коэффициенты вязкости брались в пределах $a_1 = 0,2-0,8, a_2 = 0,2-0,8$.

На фиг. 3 показан график изменения амплитуды $u_1(t)$ при $p = 80$, что меньше критического значения. Видно, что имеет место асимптотическая устойчивость прямолинейного положения равновесия стержня $w(x, t) = 0$.

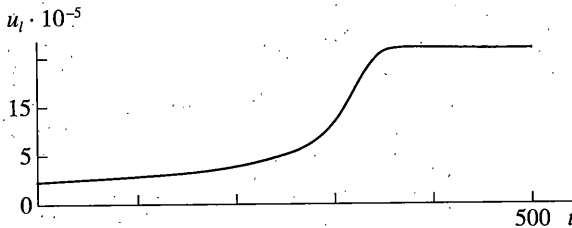
Численное интегрирование системы (1.6) при $p > 82,985$ показало, что имеет место неустойчивость. На фиг. 4 показан график изменения амплитуды $u_1(t)$ при $p = 84$, что больше критического значения. Здесь положение равновесия $w(x, t) = 0$ неустойчиво, поскольку колебания со временем нарастают с возможным рождением предельного цикла. Устойчивость этого предельного цикла представляет собой отдельную задачу и в данной работе не рассматривается.



Фиг. 2.



Фиг. 3



Фиг. 4

Путем численного интегрирования системы (1.6) было получено критическое значение следящей силы $p_K \approx 82.990$. Численное интегрирование системы (1.6) при различных значениях $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ показало, что в исследованном диапазоне значение p_K остается постоянным, и не зависит от величины коэффициентов a_1 , a_2 . Такой результат имеет место, поскольку, как показано выше аналитически, знаки коэффициентов (3.1), определяющие устойчивость положения равновесия $w(\dot{x}, t) = 0$, зависят только от величины p .

Таким образом, показано, что действие нефойгтовой вязкости вызывает снижение границы устойчивости на конечную величину $p_* < 109.7$. Показано, что при переходе через критическое значение $p_* \approx 82.985$ прямолинейное положение равновесия стержня становится неустойчивым с возможным рождением предельного цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961, 339 с.
2. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 3. М.: Наука, 1981. 480 с.
3. *Арутюнян Н.Х., Дроздов А.Д., Колмановский В.Б.* Устойчивость вязкоупругих тел и элементов конструкций // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ 1987. Т. 19. С. 3–77.
4. *Сейранян А.П.* Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики. 1990. Т. 13. № 2. С. 89–124.
5. *Агафонов С.А., Георгиевский Д.В.* Динамическая устойчивость стержня с нелинейной внутренней вязкостью под действием следящей силы // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 3. С. 339–342.
6. *Феодосьев В.И.* Об одной задаче устойчивости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 391–392.
7. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пушкино: Центр биологических исследований АН СССР. 1985. 215 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.02.2005