МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2006

УДК 539.375

© 2006 г. А.В. АНДРЕЕВ

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПОЛНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ СТЕПЕННОГО ТИПА

Разработан метод прямого численного решения полных сингулярных интегральных уравнений (СИУ) первого и второго рода в случае, когда решение имеет комплексную асимптотику степенного типа на концах промежутка интегрирования, в частности, произвольные (интегрируемые) комплексные особенности. На основе разложения решения по собственным функциям задачи и с использованием аппарата теории специальных функций решение СИУ сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений. Представлены результаты численных расчетов, проведено их сравнение с аналитическими решениями.

1. Предварительные замечания. Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение второго рода в форме

$$A\phi(\eta) + B\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \int_{-1}^{1}k(\xi,\eta)\phi(\xi)d\xi = p(\eta), \quad -1<\eta<1 \tag{1.1}$$

Здесь $\phi(\xi)$ – неизвестная функция, а $p(\eta)$ – заданная на отрезке $[-1, 1]$ ограниченная непрерывная функция. Ядро $k(\xi, \eta)$ может быть ограниченным и непрерывным, т.е. удовлетворять условию Гельдера по обоим переменным (см., например, [1]), либо иметь неподвижные особенности на концах промежутка интегрирования, т.е. становится неограниченным, когда ξ и η одновременно стремятся к одному из концов отрезка $[-1, 1]$ ($\xi = \eta \to \pm1$). В первом случае будем называть ядро $k(\xi, \eta)$ фредгольмовским ядром, а во втором полагать, что его особенности имеют форму ρ^{-1} ($\rho \to 0$), и называть обобщенным ядром типа Коши [2]. Постоянные A и B (при определенных ограничениях они могут быть и функциями η [1]), а также функции $k(\xi, \eta)$ и $p(\eta)$ являются в общем случае комплексными, причем, если $A \equiv 0$, то уравнение (1.1) обращается в СИУ первого рода. Отметим, что изложенный ниже метод позволяет решать как уравнения первого, так и второго рода. Кроме того, очевидным представляется обобщение предлагаемого метода на случай системы СИУ типа (1.1).

Рассматриваемое СИУ (1.1) возникает при формулировке многих важных прикладных задач физики и механики, в частности, при решении контактных задач плоской теории упругости, а также в двумерных задачах механики разрушения [1, 2]. Отметим, что граничные интегральные уравнения на криволинейных контурах, которые могут возникать в двумерных задачах, сводятся к СИУ (1.1) с помощью вещественной параметризации этих контуров и аддитивного расщеплении ядер уравнения для выделения интеграла типа Коши (см., например, [3]).

В некоторых случаях СИУ (1.1) для получения единственного его решения следует дополнять условием вида [1]:

$$\int_{-1}^{1} \phi(\xi)d\xi = H \tag{1.2}$$

где H – известная постоянная, которая может быть равна нулю. По своей физической природе данное условие является либо условием равновесия или непрерывности (если $\phi(\xi)$ – компонента величины типа потока, например, напряжение), либо условием однозначности или совместности (если $\phi(\xi)$ – производная от величины типа потенциала, например, производная от смещения).

В других случаях решение должно удовлетворять дополнительному условию [1]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{F(\eta)}{X(\eta)} d\eta = 0 \tag{1.3}$$

которое обеспечивает разрешимость (1.1) ($F(\eta)$ – главная часть уравнения (1.1), $X(\eta)$ – каноническая функция). В частности, для фредгольмовского ядра $k(\xi, \eta)$ главная часть уравнения (1.1) имеет вид

$$F(\eta) = A\phi(\eta) + B\int_{-1}^{1} \frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi - \eta} \tag{1.4}$$

Для обобщенного ядра $k(\xi, \eta)$ условие вида (1.3) вырождается, поскольку главной частью СИУ (1.1) в этом случае оказывается вся его левая часть, которая в свою очередь равна правой части – заданной функции. Условия разрешимости СИУ (1.1) с обобщенным ядром $k(\xi, \eta)$ для различных классов функций подробно исследовались в [4].

Асимптотика решения СИУ (1.1) на концах промежутка интегрирования, связанная как с подвижной особенностью типа Коши (первый интеграл (1.1)), так и с неподвижными особенностями ядра $k(\xi, \eta)$, если таковые имеются, может быть учтена на основе введения специальной весовой (фундаментальной) функции [1]. В соответствии с этим, далее будем полагать, что неизвестная функцию имеет комплексную степенную асимптотику на концах промежутка интегрирования и представима в форме

$$\phi(\xi) = u(\xi)w(\xi) \tag{1.5}$$

$$w(\xi) = (1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}, \quad \mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta > -1 \tag{1.6}$$

Здесь $u(\xi)$ – ограниченная непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ функция, $w(\xi)$ – весовая функция, причем ветвь последней для удобства определим условием $w(0) = 1$, поскольку при комплексных A и B величины α и β также оказываются комплексными.

В случае фредгольмовского ядра $k(\xi, \eta)$ конкретный вид весовой функции (т.е. значения α и β) можно определить на основе сведения (1.4) к задаче сопряжения [1]. Отметим, что целое число $\kappa = -(\alpha + \beta)$ (как правило, $\kappa = -1$, 0 или 1 [2]), которое в этом случае совпадает с индексом СИУ (1.1), является важной его характеристикой, определяющей класс решения [1]. В частности, при $\kappa = 1$ решение СИУ (1.1) неограниченно на концах промежутка интегрирования, и именно в этом случае последнее следует дополнить условием (1.2). Напротив, как $\kappa = -1$, когда решение стремится к нулю на концах интервала, необходимо выполнение условия (1.3).

Если же ядро $k(\xi, \eta)$ является обобщенным, то следует использовать иной функциональный метод [1], позволяющий сводить определение величин α и β к двум независимым трансцендентным уравнениям относительно этих величин [2, 5]. Отметим, что в этом случае величина $\alpha + \beta$ уже может не являться целым числом. Вопрос об индексе таких уравнений рассматривался в [4], где теория СИУ с обобщенными ядрами получила существенное развитие.

Отметим, что альтернативой этим методам определения весовой функции (1.6) служит встречающийся в приложениях подход [6–8], основанный на асимптотическом анализе рассматриваемой краевой задачи до построения СИУ, ее описывающего.

Перейдем к анализу численных методов, использовавшихся ранее для решения СИУ типа (1.1).

В [9] решение СИУ (1.1) с фредгольмовским ядром $k(\xi, \eta)$ посредством разложения последнего в конечный ряд по полиномам Якоби сводилось к решению линейной алгебраической системы уравнений, для определения коэффициентов которой необходимо было вычислять интегралы вида

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{d\eta}{w(\eta)} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta) w(\xi) d\xi \tag{1.7}$$

Построение такой алгебраической системы требовало вычисления приблизительно $n(n + 1)$ интегралов (1.7), где n – порядок аппроксимации ядра $k(\xi, \eta)$. Для вычисления интегралов (1.7) при вещественных α и β предлагалось использовать квадратурную формулу Гаусса – Якоби ($P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ – полином Якоби, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, см., например, [2]):

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1} f(\xi)(1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta} d\xi = \sum_{k=1}^{s} W_k f(\xi_k), \quad \mathrm{Re}\,\alpha, \mathrm{Re}\,\beta > -1 \\ P_s^{(\alpha, \beta)}(\xi_k) = 0 \ (k = 1, 2, \dots, s), \quad W_k = -\frac{\Gamma(s+\alpha+1)\Gamma(s+\beta+1)}{(s+1)!\Gamma(s+\alpha+\beta+2)} \frac{2^{\alpha+\beta}(2s+\alpha+\beta+2)}{P_s'^{(\alpha, \beta)}(\xi_k) P_{s+1}^{(\alpha, \beta)}(\xi_k)}\end{gathered} \tag{1.8}$$

которая является точной, если $f(\xi) \in P_{2s-1}$, то есть $f(\xi)$ представляет собой полином степени, не превышающий $2s - 1$. Случай комплексных α и β в [9] не обсуждался. Отметим также, что по ходу решения полагалось, что величина $\alpha + \beta$ является целым числом, что вполне справедливо для фредгольмовского ядра $k(\xi, \eta)$ [1]. Однако такое ограничение не позволяет использовать предложенный в [9] метод для решения СИУ (1.1) с обобщенным ядром $k(\xi, \eta)$ в общем случае (либо требует существенной его модификации, в том числе в части аппроксимации ядра $k(\xi, \eta)$).

В [2] для решения СИУ (1.1) (при $A \neq 0$) с фредгольмовским ядром $k(\xi, \eta)$ предлагалось использовать близкий метод, основанный на разложении ограниченной составляющей решения (1.5) в конечный ряд по полиномам Якоби, и сведении СИУ к линейной алгебраической системе относительно неизвестных коэффициентов аппроксимации. Для формирования алгебраической системы таким методом требовалось вычисление n^2 интегралов (1.7) и n аналогичных однократных интегралов (n – порядок аппроксимации решения).

Для решения СИУ первого рода ($A \equiv 0$ в (1.1)) как с фредгольмовским, так и с обобщенным ядром $k(\xi, \eta)$, в [2] предлагалось использовать иной метод, основанный на численной аппроксимации интегралов в (1.1) с помощью квадратурной формулы Гаусса – Якоби (1.8) и аналогичной формулы для сингулярного интеграла с ядром Коши [10] ($Q_n^{(\alpha, \beta)}(\eta)$ – функции Якоби второго рода):

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi = \sum_{k=1}^{s}W_k\frac{f(\xi_k)}{\xi_k-\eta}+f(\eta)w(\eta)\frac{Q_s^{(\alpha,\beta)}(\eta)}{P_s^{(\alpha,\beta)}(\eta)} \tag{1.9}$$
$$|\eta|<1,\quad \eta\neq\xi_k,\quad \mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta>-1$$

которая точна, если $f(\xi)\in P_{2s}$. Таким образом, по сути, использовалась полиномиальная аппроксимация неизвестной функции, и далее с помощью метода коллокации формировалась алгебраическая система относительно неизвестных коэффициентов этой аппроксимации [2]. Однако, как показано в [11], изложенная в [2] методика выбора точек коллокации в большинстве случаев (фактически, только лишь за исключением случая α, $\beta=\pm 1/2$) оказывается неадекватной, что может привести к существенному искажению решения. Кроме того, при комплексных α и β такой подход повлечет за собой использование комплексных, т.е. не принадлежащих отрезку $(-1, 1)$ точек аппроксимации (узлов квадратурной формулы (1.8)) и коллокации (в [2] эти точки также являются корнями полинома Якоби), поскольку при $\mathrm{Im}\alpha\neq 0$ или $\mathrm{Im}\beta\neq 0$ корни полинома Якоби оказываются комплексными ($\mathrm{Im}\xi_k\neq 0$).

В [12] для решения СИУ (1.1) с фредгольмовским ядром $k(\xi, \eta)$ использовался метод, основанный на разложении весовой функции (1.6) в бесконечный, но достаточно быстро сходящийся ряд по ξ. Аппроксимация ограниченной составляющей неизвестной функции $u(\xi)$ (см. (1.5)) и произведения $k(\xi, \eta)\phi(\xi)$ в виде квадратичных полиномов Лагранжа на n подинтервалах отрезка $[-1, 1]$ позволила представить в форме аналогичных сумм интегралы в (1.1), а система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов аппроксимации была сформирована на основе метода коллокации. Такой подход позволил получить точное (в рамках численных вычислений) решение для квадратичных по ξ решений $u(\xi)$ (при $k(\xi, \eta)\equiv 0$), однако уже при кубических $u(\xi)$ погрешность такого метода оказалась существенно большей [12]. Отметим также, что для СИУ (1.1) с обобщенным ядром $k(\xi, \eta)$ такой метод малопригоден, поскольку квадратичная аппроксимация функции $k(\xi, \eta)\phi(\xi)$ на подинтервалах, примыкающих к концам отрезка $[-1, 1]$ (две точки аппроксимации совпадают с концами этого отрезка) совместно с выбором точек коллокации в этих же подинтервалах [12], может привести к существенному искажению решения.

Для решения СИУ (1.1) с фредгольмовским [13] и обобщенным [14] ядром $k(\xi, \eta)$ в указанных работах использовался метод, основанный на численной аппроксимации интегралов в (1.1) с помощью квадратурных формул Лобатто – Якоби [14, 15]:

$$\int_{-1}^{1}f(\xi)(1-\xi)^{\alpha}(1+\xi)^{\beta}d\xi = W_0^{(\alpha,\beta)}f(-1)+W_{s+1}^{(\alpha,\beta)}f(1)+\sum_{k=1}^{s}W_k^{(\alpha,\beta)}f(\xi_k) \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi &= W_0^{(\alpha,\beta)}f(-1)+W_{s+1}^{(\alpha,\beta)}f(1)+\\ &+\sum_{k=1}^{s}W_k^{(\alpha,\beta)}\frac{f(\xi_k)}{\xi_k-\eta}+f(\eta)\frac{w(\eta)Q_s^{(\alpha+1,\beta+1)}(\eta)}{P_s^{(\alpha+1,\beta+1)}(\eta)}\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\mathrm{Re}\alpha, \mathrm{Re}\beta>-1,\quad |\eta|<1,\quad \eta\neq\xi_k,\quad P_s^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_k) = 0\ (k=1,2,\ldots,s)$$

$$W_k^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(\psi-\xi_k^2)(s+1)^2}\frac{\Gamma(s+\alpha+2)\Gamma(s+\beta+2)}{s!\Gamma(s+\alpha+\beta+3)}\frac{1-\xi_k^2}{[P_{s+1}^{(\alpha,\beta)}(\xi_k)]^2}$$

$$\psi = \frac{4(s+\alpha+1)(s+\beta+1)+(\alpha-\beta)^2}{(2s+\alpha+\beta+2)^2}$$

$$W_0^{(\alpha,\beta)} = 2^{\alpha+\beta+1}\frac{s!\Gamma(\beta+1)\Gamma(s+\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(s+\beta+2)\Gamma(s+\alpha+\beta+3)}, \quad W_{s+1}^{(\alpha,\beta)} = W_0^{(\beta,\alpha)}$$

которые являются точными, если в (1.10) $f(\xi) \in P_{2s-3}$, а в (1.11) $f(\xi) \in P_{2s-2}$. Как видно, основным отличием данных квадратурных формул от формул Гаусса – Якоби (1.8) является использованием конца отрезка [–1, 1] в качестве узлов (точек аппроксимации неизвестной функции для СИУ). Это дает возможность определять главные члены асимптотического разложения подынтегральной функции СИУ вблизи этих концов без использования экстраполяции [13, 14]. Отметим, что эти члены с точностью до постоянной величины совпадают с коэффициентами интенсивности напряжений (КИН), играющими ключевую роль в механике хрупкого разрушения.

После аппроксимации интегралов СИУ (1.1) в соответствии с (1.10) и (1.11) для формирования линейной алгебраической системы уравнений относительно подлежащих определению коэффициентов этой аппроксимации в [13, 14] применялся метод коллокации. При этом точки аппроксимации (как узлы комплексных квадратурных формул (1.10) и (1.11) и точки коллокации в силу специфики их выбора в [13, 14]) также оказывались комплексными. Первое приводило к тому, что неизвестная функция отыскивалась вне области своего определения по (1.1) а второе – к удовлетворению уравнения (1.1) в точках η, лежащих вне отрезка (–1, 1). Несмотря на то, что примеры применения метода [13, 14] приводили к удовлетворительным результатам в части определения КИН, он требует надлежащего математического обоснования для выявления условий его применимости. Кроме того, для такого численного метода очень сложно выявить условия сходимости и построить оценку погрешности.

Отметим также, что аналогичная проблема обоснования аналитического продолжения заданных на отрезке [–1, 1] функций $k(\xi, \eta)$ и $p(\eta)$ в некоторую его окрестность стоит и для метода, предложенного в [2] для решения СИУ (1.1) при $A \neq 0$ (см. выше). Связано это с тем, что для формирования алгебраической системы этого метода требуется вычисление интегралов вида (1.7), в состав функции $f(\xi, \eta)$ которых входит либо ядро $k(\xi, \eta)$, либо правая часть СИУ (1.1) $p(\eta)$ [2].

Перейдем к изложению предлагаемого в данной работе метода решения СИУ (1.1).

2. Численный метод решения СИУ. Подобно [2], представим решение (1.5) в форме

$$\phi(\xi) = w(\xi)\sum_{k=0}^{n} c_k P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi) \tag{2.1}$$

где c_k – комплексные постоянные, подлежащие определению, а $P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi)$ – полином Якоби вещественного аргумента ξ с комплексными параметрами α и β.

Для вычисления интеграла типа Коши в (1.1) используем интегральное представление функции Якоби второго рода в виде [16, 17]:

$$Q_k^{(\alpha,\beta)}(\eta) = \frac{1}{w(\eta)}\int_{-1}^{1}\frac{w(\xi)P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi)}{\xi-\eta}d\xi, \quad -1<\eta<1 \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) в (1.1), с использованием (2.2) получим

$$w(\eta)\sum_{k=0}^{n} c_k[AP_k^{(\alpha,\beta)}(\eta)+BQ_k^{(\alpha,\beta)}(\eta)+h_k(\eta)] = p(\eta), \quad -1<\eta<1 \tag{2.3}$$

$$h_k(\eta) \equiv \frac{1}{w(\eta)} \int_{-1}^{1} k(\xi, \eta) w(\xi) P_k^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi, \quad -1 < \eta < 1 \tag{2.4}$$

Дополнительное условие (1.2) с использованием (2.1) перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \int_{-1}^{1} w(\xi) P_k^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi = H \tag{2.5}$$

Из условия ортогональности полиномов Якоби на отрезке $\xi \in [-1, 1]$ с весом $w(\xi)$ имеем [17]:

$$\int_{-1}^{1} w(\xi) P_k^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi = \begin{cases} 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1), & k = 0 \\ 0, \quad k > 0 \end{cases}$$

где $B(z, \zeta) = \Gamma(z)\Gamma(\zeta)/\Gamma(z+\zeta)$ – бета-функция. Следовательно, условие (2.5) позволяет непосредственно определить одну из неизвестных постоянных

$$c_0 = \frac{2^{-1-\alpha-\beta}}{B(\alpha+1, \beta+1)} H \tag{2.6}$$

Условие (1.3) с использованием (2.1) и (2.2) перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{n} c_k G_k = 0, \quad G_k = A \int_{-1}^{1} P_k^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi + B \int_{-1}^{1} Q_k^{(\alpha, \beta)}(\xi) d\xi \tag{2.7}$$

Ниже показано, что это условие, необходимое для разрешимости СИУ (1.1) с фредгольмовским ядром $k(\xi, \eta)$ при $\kappa = -1$ [1], выполняется тождественно, поскольку $G_k \equiv 0$.

Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов c_k ($k = 0, 1, \ldots, n$) можно записать выражение (2.3) в соответствующем количестве точек коллокации η_r ($-1 < \eta_r < 1$):

$$w(\eta_r) \sum_{k=0}^{n} c_k [A P_k^{(\alpha, \beta)}(\eta_r) + B Q_k^{(\alpha, \beta)}(\eta_r) + h_k(\eta_r)] = p(\eta_r) \ (r = 0, 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

В случае если на решение СИУ (1.1) следует налагать дополнительное условие (1.2), необходимое положить в нижнем пределе суммы (2.8) $k = 1$, число точек η_r взять на единицу меньшим, а неизвестную константу c_0 определять из (2.6).

Таким образом, задача формирования алгебраической системы (2.8) сведена к вычислению интеграла (2.4) в дискретном наборе точек η_r ($r = 0, 1, \ldots, n$, $|\eta_r| < 1$).

Если ядро $k(\xi, \eta)$ остается аналитической функцией при вынесении переменной ξ в некоторую окрестность отрезка $\xi \in [-1, 1]$ комплексной плоскости, то прямой и наиболее точный способ численного вычисления интегралов (2.4) предоставляют квадратурные формулы Гаусса – Якоби (1.8). Отметим, что такая методика требует вычисления приблизительно n^2 интегралов вида (2.4), что значительно менее трудоемко, нежели вычисление интегралов, необходимых для реализации методов, предложенных в [2, 9] (см. выше). Кроме того, существенно, что аналитическое продолжение осуществляется только по переменной ξ, в то время как переменная η остается принадлежащей отрезку (–1, 1). Это, как правило, упрощает задачу такого аналитического продолжения.

Если же функцию $k(\xi, \eta)$ не удается аналитически продолжить в некоторую окрестность отрезка $\xi \in [-1, 1]$ комплексной плоскости, либо такое продолжение сопряжено со значительными вычислительными трудностями, можно использовать следующую методику.

Аппроксимируем ядро $k(\xi, \eta)$ полиномом степени N во внутренних точках отрезка $\eta \in (-1, 1)$:

$$k(\xi, \eta) = \sum_{s=0}^{N} a_s(\eta)\xi^s, \quad -1+\delta \le \eta \le 1-\delta, \quad 0<\delta<1 \tag{2.9}$$

что допустимо как для фредгольмовского, так и для обобщенного ядра $k(\xi, \eta)$, поскольку для построения системы (2.8) требуется адекватность аппроксимации (2.9) только лишь на отрезке $\eta \in [\min\eta_r, \max\eta_r]$. Отметим, что местоположение минимальной и максимальной точек η_r, которое может варьироваться в определенных пределах, можно выбирать в целях улучшения точности аппроксимации (2.9), в частности, для снижения ее максимальной погрешности. Коэффициенты $a_s(\eta)$ зависят от способа аппроксимации, который в свою очередь должен определяться конкретным видом ядра $k(\xi, \eta)$. Предварительный анализ погрешности, связанный с заменой в (1.1) точного выражения для ядра приближенным, можно в каждом конкретном случае проводить на основе изложенной в [9] методики. Отметим также, что неподвижные особенности ядра (2.9), неявно отраженные в весовой функции (1.6), учитываются ниже при аналитическом вычислении интегралов вида (2.4).

Очевидно, что полиномы Якоби представимы в виде

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi) = \sum_{l=0}^{k} b_l^{(k)}\xi^l \tag{2.10}$$

Здесь верхний индекс у коэффициентов $b_l^{(k)}$ указывает на старшую степень полинома. Используя (2.9) и (2.10), получим следующее выражение для интеграла (2.4)

$$h_k(\eta_r) = \frac{1}{w(\eta_r)}\sum_{j=0}^{N+k} d_j^{(k)}(\eta_r)\int_{-1}^{1}\xi^j w(\xi)d\xi \tag{2.11}$$

Здесь коэффициенты $d_j^{(k)}(\eta_r)$ можно записать в форме

$$d_j^{(k)}(\eta_r) = \sum_{s=0}^{j} a_s(\eta_r)b_{j-s}^{(k)} \tag{2.12}$$

которая получена на основе умножения рядов (2.9) и (2.10) [18]. Отметим, что в сумме (2.12) следует полагать $a_s(\eta_r) = 0$ при $s > N$ и $d_{j-s}^{(k)}$ при $j - s > k$.

Для вычисления интегралов, фигурирующих в (2.11), используем следующее тождество:

$$\int_{-1}^{1}\xi^j w(\xi)d\xi = \int_{-1}^{1}\frac{\xi^{j+1}w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi - \eta\int_{-1}^{1}\frac{\xi^j w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi, \quad -1<\eta<1 \tag{2.13}$$

Интегралы в правой части этого тождества вычислим с помощью выражения (2.2), которое на основе (2.10) представим в форме

$$Q_m^{(\alpha,\beta)}(\eta) = \frac{1}{w(\eta)}\sum_{l=0}^{m} b_l^{(m)} \int_{-1}^{1}\frac{\xi^l w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi =$$

$$= \frac{1}{w(\eta)}\left[b_0^{(m)}\int_{-1}^{1}\frac{w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi + b_1^{(m)}\int_{-1}^{1}\frac{\xi w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi + \ldots + b_m^{(m)}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^m w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi\right], \quad -1<\eta<1$$

Из последнего выражения следует, что интегралы вида

$$I_m(\eta) \equiv \int_{-1}^{1}\frac{\xi^m w(\xi)}{\xi-\eta}d\xi = \frac{1}{b_m^{(m)}}\left[w(\eta)Q_m^{(\alpha,\beta)}(\eta) - \sum_{p=0}^{m-1} b_p^{(m)} I_p(\eta)\right], \quad I_0(\eta) = w(\eta)Q_0^{(\alpha,\beta)}(\eta) \tag{2.14}$$

можно вычислять по указанному рекуррентному соотношению (отметим, что $b_0^{(0)} = 1$).

Введем функцию

$$S_m(\eta) \equiv \frac{I_m(\eta)}{w(\eta)} = \frac{1}{b_m^{(m)}}\left[Q_m^{(\alpha,\beta)}(\eta) - \sum_{p=0}^{m-1} b_p^{(m)} S_p(\eta)\right], \quad S_0(\eta) = Q_0^{(\alpha,\beta)}(\eta) \tag{2.15}$$

вычисляемую по аналогичному рекуррентному соотношению. Подставляя выражение (2.13) в (2.11) и используя (2.14) и (2.15), получим

$$h_k(\eta_r) = \frac{w(\eta)}{w(\eta_r)}\sum_{j=0}^{N+k} d_j^{(k)}(\eta_r)[S_{j+1}(\eta) - \eta S_j(\eta)], \quad -1<\eta<1 \tag{2.16}$$

В последнем выражении удобно выбирать произвольную точку $\eta \in (-1, 1)$, совпадающей с одной из точек η_r (обозначим последнюю η_r^{aux}). Это позволит сократить количество вычислений за счет использования в (2.15) значений $Q_k^{(\alpha,\beta)}(\eta_r^{aux})$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), полученных на этапе вычислений второго члена под знаком суммы (2.8). Как показывают численные эксперименты, точность решения очень слабо зависит от того, какая из точек η_r выбирается в качестве η_r^{aux}. Следовательно, окончательно получим выражение для третьего искомого члена суммы (2.8) в форме

$$h_k(\eta_r) = \frac{w(\eta_r^{aux})}{w(\eta_r)}\sum_{j=0}^{N+k} d_j^{(k)}(\eta_r)[S_{j+1}(\eta_r^{aux}) - \eta_r^{aux} S_j(\eta_r^{aux})] \tag{2.17}$$

Отметим, что такая методика вычисления интегралов (2.4), основанная на разложении регулярного ядра в степенной ряд (2.9), может оказаться удобной в случаях, когда ядро $k(\xi, \eta)$ не удается выразить явно и используется его представление в виде некоторого интеграла (см., например, [19]). В такой ситуации для получения представления (2.9) можно использовать разложение подынтегральной функции в ряд по ξ с последующим почленным аналитическим интегрированием этого ряда.

Таким образом, решение СИУ (1.1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (2.8), которая позволяет определить коэффициенты аппроксимации неизвестной функции (2.1).

3. Некоторые вопросы вычисление специальных функций. Для вычисления полиномов Якоби удобно использовать рекуррентное соотношение [17]:

$$a_n P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (b_n + c_n x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - d_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \ge 1 \tag{3.1}$$

$$\begin{gathered} a_n = 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta), \quad b_n = (2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2-\beta^2) \\ c_n = (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2), \quad d_n = 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2) \end{gathered} \tag{3.2}$$

в качестве стартовых значений в котором можно использовать полиномы нулевого $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ и первого $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = (\alpha - \beta + (2 + \alpha + \beta)x)/2$ порядка.

Найти комплексные корни полинома с заданной точностью можно в итерационном процессе, основанном на методе Лагерра [20] (m – номер итерации):

$$\begin{gathered} \xi_k^{(m+1)} = \xi_k^{(m)} - \frac{s}{G \pm \sqrt{(s-1)(sH - G^2)}} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots) \\ G \equiv \frac{P_s'^{(\alpha,\beta)}(\xi_k^{(m)})}{P_s^{(\alpha,\beta)}(\xi_k^{(m)})}, \quad H \equiv G^2 - \frac{P_s''^{(\alpha,\beta)}(\xi_k^{(m)})}{P_s^{(\alpha,\beta)}(\xi_k^{(m)})} \end{gathered} \tag{3.3}$$

В выражении (3.3) знак в знаменателе поправки к текущему значению корня выбирается так, чтобы модуль этого знаменателя был максимален. В качестве начального приближения в (3.3) удобно использовать корни вещественного полинома Якоби $P_s^{(\mathrm{Re}\alpha,\,\mathrm{Re}\beta)}(\xi)$ ($P_s^{(\mathrm{Re}\alpha,\,\mathrm{Re}\beta)}(\xi_k^{(0)}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$), один из методов поиска которых изложен, например, в [16]. Существенно, что для заданных комплексных α и β все корни полинома Якоби находятся либо в верхней, либо в нижней полуплоскости и приближаются к отрезку $\xi \in [-1, 1]$ с ростом s. Отметим также, что в некоторых случаях эти корни лежат вне полосы $|\mathrm{Re}\,\xi| < 1$ (например, при $\alpha = \beta = -0.7-1.9i$). В таких случаях, как правило, итерационный процесс (3.3) при указанном выборе начального приближения не позволяет найти корни, лежащие вне полосы $|\mathrm{Re}\,\xi| < 1$, и для их отыскания требуется применение метода Ньютона (см., например, [20]).

Производные от полинома Якоби, необходимые для построения итерационных процессов Лагерра и Ньютона, нетрудно выразить через сами полиномы с использованием соответствующих формул дифференцирования [17].

Для коэффициентов полинома (2.10) $b_l^{(k)}$ можно построить рекуррентные соотношения, позволяющие определять коэффициенты полинома степени $n + 1$ через коэффициенты полиномов меньших (n и $n - 1$) степеней. Так, подставляя (2.10) в (3.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ξ, получим

$$\begin{gathered} a_n b_l^{(n+1)} = b_n b_l^{(n)} + c_n b_{l-1}^{(n)} - d_n b_l^{(n-1)} \quad (l = 0, 1, \ldots, n), \quad (b_n^{(n-1)} = b_{-1}^{(n)} \equiv 0), \\ a_n b_{n+1}^{(n+1)} = c_n b_n^{(n)} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Для вычисления функции Якоби второго рода можно использовать ее представления через гипергеометрическую функцию $F(a, b, c, t)$ [16]:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\frac{\pi P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\mathrm{tg}(\pi\beta)} + \frac{(-1)^n 2^{\alpha+\beta}}{w(x)} B(n+\alpha+1,\beta) F\left(n+1,-n-\alpha-\beta,1-\beta,\frac{1+x}{2}\right) =$$
$$= \frac{\pi P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\mathrm{tg}(\pi\alpha)} - \frac{2^{\alpha+\beta}}{w(x)} B(n+\beta+1,\alpha) F\left(n+1,-n-\alpha-\beta,1-\alpha,\frac{1-x}{2}\right), \quad -1<x<1 \tag{3.5}$$

Первую форму (3.5) можно использовать при $\beta \neq 0$, а вторую – при $\alpha \neq 0$. Отметим, что в [16] выражение (3.5) получено для вещественных α и β, однако такая форма представления $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, очевидно, допускает его использование и для комплексных α и β.

Для вычисления гипергеометрической функции $F(a, b, c, t)$ при $-1 < t = (1 \pm x)/2 < 1$ можно использовать ее представление в виде ряда Гаусса [17]:

$$F(a,b,c,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i i!} t^i, \quad (\lambda)_i = \prod_{j=1}^{i} (\lambda + j - 1) \tag{3.6}$$

Как следует из представления (3.5), при целом $\kappa = -(\alpha + \beta)$ функция второго рода, ему соответствующая, является полиномом, поскольку гипергеометрический ряд (3.6) обрывается [17]. В этом случае, используя соотношение, связывающее полиномы Якоби и гипергеометрическую функцию [17], получим более простые и удобные для вычислений выражения для функции Якоби второго рода

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -\pi \mathrm{ctg}(\pi\beta) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \pi \frac{(-1)^{-\kappa} 2^{-\kappa}}{w(x)\sin(\pi\beta)} P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(x) =$$
$$= \pi \mathrm{ctg}(\pi\alpha) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \pi \frac{2^{-\kappa}}{w(x)\sin(\pi\alpha)} P_{n-\kappa}^{(-\alpha,-\beta)}(x), \quad \kappa = -(\alpha+\beta) \in Z \tag{3.7}$$

Используя последнее выражение для функции Якоби второго рода и правила дифференцирования полиномов Якоби, можно показать, что при $\kappa = -1$ коэффициенты уравнения (2.7) принимают вид

$$G_k = 2\frac{A - \pi B \mathrm{ctg}(\pi\beta)}{n+1} [P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)]_{x=-1}^{x=+1} = 2\frac{A + \pi B \mathrm{ctg}(\pi\alpha)}{n+1} [P_{n+1}^{(\alpha-1,\beta-1)}(x)]_{x=-1}^{x=+1}$$

Числители дробей данного выражения тождественно обращаются в нуль, поскольку они воспроизводят взаимосвязь α и β с коэффициентами СИУ (1.1) A и B (см., например, [1]), как следствие, $G_k \equiv 0$.

Как отмечалось в [16], формулы (3.5) следует использовать для численного расчета функции Якоби второго рода при не слишком больших значениях n ($n \lesssim 20$). Если же n велико, двойная внутренняя точность вычислений в (3.6) оказывается недостаточной, и ряд сходится к ложному значению гипергеометрической функции. В такой ситуации функцию Якоби второго рода следует вычислять используя то обстоятельство, что эта функция удовлетворяет на отрезке $-1 < x < 1$ тому же рекуррентному соотношению, что и полиномы Якоби [17], т.е.

$$a_n Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (b_n + c_n x) Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) - d_n Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{3.8}$$

где a_n, b_n, c_n и d_n имеют вид (3.2). При $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ стартовые значения для вычисления по данному рекуррентному соотношению можно получить, полагая в (3.5) $n = -1$

($F(0, b, c, t) = 1$) и $n = 0$. Если же $\alpha = 0$ или $\beta = 0$, то стартовые значения следует выбирать, полагая в (3.5) $n = 0$ и $n = 1$. В вырожденных случаях $\kappa = -(\alpha + \beta) \in Z$ стартовые значения следует аналогичным образом определять из (3.7).

Отметим, что идентичность формы (3.1) и (3.8) дает возможность вычислять полиномы Якоби и соответствующие им функции второго рода в одном рекуррентном процессе, что позволяет сократить количество вычислений.

Гамма-функцию можно достаточно быстро и точно вычислять методом Ланцоша [21, 22]:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\frac{(z + C_1 - 1/2)^{z-1/2}}{e^{z + C_1 - 1/2}}\left[s_1 + \sum_{k=2}^{m}\frac{s_k}{z + k - 2}\right] \quad (z \neq 0, -1, -2, \ldots) \tag{3.9}$$

Для $m = 15$ коэффициенты аппроксимации Ланцоша имеют вид:

$C_1 = 607/128$, $s_1 = 0.999999999999997$

$s_2 = 57.15623566586292$, $s_3 = -59.59796035547549$

$s_4 = 14.13609797474174$, $s_5 = -0.491913816097620$

$s_6 = 0.339946499848118 \times 10^{-4}$, $s_7 = 0.465236289270485 \times 10^{-4}$

$s_8 = -0.983744753048795 \times 10^{-4}$, $s_9 = 0.158088703224912 \times 10^{-3}$

$s_{10} = -0.210264441724104 \times 10^{-3}$, $s_{11} = 0.217439618115212 \times 10^{-3}$

$s_{12} = -0.164318106536763 \times 10^{-3}$, $s_{13} = 0.844182239838527 \times 10^{-4}$

$s_{14} = -0.261908384015814 \times 10^{-4}$, $s_{15} = 0.368991826595316 \times 10^{-5}$

4. Результаты расчетов. Рассмотрим СИУ второго рода, описывающее производную от скачка смещений в двумерной задаче о трещине на границе раздела двух упругих полуплоскостей [2]:

$$-\gamma\phi(\eta) + \frac{1}{i\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi - \eta} = p(\eta), \quad -1 < \eta < 1, \quad i^2 = -1, \quad \gamma = \frac{\mu_2 + \kappa_2\mu_1 - \mu_1 - \kappa_1\mu_2}{\mu_2 + \kappa_2\mu_1 + \mu_1 + \kappa_1\mu_2} \tag{4.1}$$

Здесь $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ при плоской деформации и $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ при плоском напряженном состоянии, ν_j – коэффициент Пуассона, μ_j – модуль сдвига ($j = 1, 2$). Весовая функция уравнения (4.1) представима в форме (1.6) (см., например, [2]), где

$$\alpha = -\frac{1}{2} - i\omega, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\omega, \quad \omega = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \tag{4.2}$$

Как отмечалось выше, при таких α и β СИУ (4.1) следует дополнять условием [1]:

$$\int_{-1}^{1}\phi(\xi)d\xi = 0 \tag{4.3}$$

которое выражает равенство нулю скачка смещений на концах трещины.

При постоянной правой части

$$p(\eta)\equiv p = -i\frac{1+\kappa_2}{\mu_2}\lambda\sigma, \quad \sigma = \text{const}, \quad \lambda = \frac{(\mu_2+\kappa_2\mu_1)(\mu_1+\kappa_1\mu_2)}{(1+\kappa_2)\mu_1(\mu_2+\kappa_2\mu_1+\mu_1+\kappa_1\mu_2)}$$

решение СИУ (4.1) (при дополнительном условии (4.3)) можно представить в явной замкнутой форме [1]:

$$\phi(\xi) = \frac{2\lambda\sigma(1+\kappa_2)}{\mu_2\sqrt{1-\gamma^2}}w(\xi)P_1^{(\alpha,\,\beta)}(\xi) \tag{4.4}$$

Численное решение СИУ (4.1) (при условии (4.3)) было построено на основе предлагаемого метода для значений параметров $\sigma = 1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_1/\mu_2 = 10$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.2$ (плоская деформация) при $n = 1$ ($\eta_1 = 0$). Сравнение с точным решением (4.4) показало, что во всем промежутке $\xi \in (-1, 1)$ в численном решении верны по крайней мере четырнадцать значащих цифр. Аналогичная ситуация имеет место и при других значениях параметров. Таким образом, поскольку двойная точность оперирует с шестнадцатью значащими цифрами, предлагаемый численный метод позволяет достигать точности решения СИУ типа (1.1) при $k(\xi, \eta) = 0$, близкой к максимально возможной в рамках численных расчетов. Для квадратичной по η правой части СИУ (4.1) ограниченная составляющая точного решения (2.1) представляет собой полином третьей степени по ξ [12]. Аналогичная точность численного решения (не менее 14 верных цифр), построенного для такой правой части при $n = 3$, подтверждает этот вывод. Отметим, что метод, предложенный в [12], дает для последней задачи значительно меньшую точность.

Рассмотрим также СИУ Бюкнера первого рода [23]:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + D\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\xi)d\xi}{\xi+\eta+2} = p(\eta), \quad -1 < D \neq 0 < 1, \quad -1 < \eta < 1 \tag{4.5}$$

которое возникает при решении антиплоской задачи теории упругости о трещине, достигающей границы раздела двух сред. Как видно, ядро (4.5) является обобщенным в указанном выше смысле, поскольку ведет себя как ρ^{-1} ($\rho \to 0$) при $\xi = \eta \to -1$. Отметим, что если ξ лежит в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрезка $[-1, 1]$, то это ядро является аналитической функцией своих аргументов, поскольку $\eta \in (-1, 1)$. Это служит обоснованием возможности использования первого из указанных выше способов вычисления интегралов (2.4).

Для рассматриваемых величин D уравнение (4.5) также необходимо дополнять условием вида [23]:

$$\int_{-1}^{1}\phi(\xi)d\xi = 0 \tag{4.6}$$

смысл которого аналогичен указанному для (4.3).

При $p(\eta) \equiv q = \text{const}$ решение уравнения (4.5), полученное в [23] в квадратурах, может быть записано в явной замкнутой форме [24]:

$$\phi(x(\xi)) = \frac{q}{\pi\sqrt{2(1+D)}}\left\{\left[\frac{\theta}{\sqrt{1-x^2}}+1\right]\left[\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right]^{\theta} + \left[\frac{\theta}{\sqrt{1-x^2}}-1\right]\left[\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right]^{-\theta}\right\} \tag{4.7}$$

$$x = x(\xi) = (1+\xi)/2, \quad \theta \equiv \arccos(-D)/\pi, \quad 0 < \theta < 1$$

ξ	(4.7)	(4.9)	(4.10)	(4.11)
−0.875	$-0.62953-0.00548i$	$-0.62870-0.00542i$	$-0.62785-0.00758i$	$-0.62870-0.00541i$
−0.750	$-0.36772+0.03491i$	$-0.36747+0.03498i$	$-0.36711+0.03354i$	$-0.36747+0.03498i$
−0.625	$-0.24804+0.04166i$	$-0.24791+0.04172i$	$-0.24765+0.04101i$	$-0.24791+0.04172i$
−0.500	$-0.17148+0.04234i$	$-0.17139+0.04239i$	$-1.17118+0.04198i$	$-0.17139+0.04239i$
−0.375	$-0.11389+0.04151i$	$-0.11383+0.04155i$	$-0.11365+0.04125i$	$-0.11383+0.04155i$
−0.250	$-0.06598+0.04038i$	$-0.06592+0.04042i$	$-0.06577+0.04018i$	$-0.06592+0.04042i$
−0.125	$-0.02311+0.03937i$	$-0.02306+0.03940i$	$-0.02292+0.03921i$	$-0.02306+0.03940i$
0.000	$0.01755+0.03865i$	$0.01759+0.03868i$	$0.01771+0.03851i$	$0.01759+0.03868i$
0.125	$0.05818+0.03832i$	$0.05821+0.03834i$	$0.05833+0.03819i$	$0.05821+0.03834i$
0.250	$0.10088+0.03848i$	$0.10091+0.03851i$	$0.10102+0.03837i$	$0.10091+0.03851i$
0.375	$0.14831+0.03930i$	$0.14834+0.03933i$	$0.14845+0.03920i$	$0.14834+0.03933i$
0.500	$0.20461+0.04108i$	$0.20464+0.04111i$	$0.20475+0.04098i$	$0.20464+0.04111i$
0.625	$0.27778+0.04447i$	$0.27781+0.04450i$	$0.27792+0.04436i$	$0.27781+0.04450i$
0.750	$0.38768+0.05118i$	$0.38771+0.05122i$	$0.38783+0.05104i$	$0.38771+0.05122i$
0.875	$0.61138+0.06818i$	$0.61140+0.06824i$	$0.61151+0.06794i$	$0.61140+0.06824i$

Как видно, решение (4.7) имеет главную асимптотику вида $\rho^{-\theta}$ ($\rho \to 0$) на левом конце промежутка интегрирования и корневую особенность на правом. Это соответствует весовой функции

$$w(\xi) = (1-\xi)^{-1/2}(1+\xi)^{-\theta}, \quad \theta \equiv \arccos(-D)/\pi \tag{4.8}$$

для уравнения (4.5).

В [23] уравнение (4.5) рассматривалось в предположении, что D является вещественным числом. В то же время, как показывает построение весовой функции на основе упоминавшегося выше метода (см., например, [2]), адекватного в том числе и для комплексных особенностей, весовая функция уравнения (4.5) при комплексном D также имеет вид (4.8). Кроме того, решение однородного уравнения (4.5), построенное в [4] для комплексного D, совпадает по форме с соответствующим решением, полученным в [23]. Это дает основания предполагать, что решение (4.7) СИУ (4.5) при $p(\eta) \equiv q = \text{const}$ справедливо и в том случае, когда D является комплексным числом (см. также [14]). Результаты численных экспериментов, приведенные ниже, это подтверждают, что дает возможность провести тестирование предлагаемого метода на основе численного решения СИУ (4.5) (при дополнительном условии (4.6)).

При построении численного решения СИУ (4.5) используем как методику вычисления интегралов (2.4) в соответствии с квадратурными формулами Гаусса – Якоби (1.8):

$$h_k(\eta) = \frac{1}{w(\eta)}\sum_{j=1}^{s} W_j k(\xi_j, \eta) P_k^{(\alpha,\beta)}(\xi_j), \quad k(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi+\eta+2} \tag{4.9}$$

обоснованную выше для обобщенного ядра (4.5), так и методику, основанную на разложении этого ядра в ряд (2.9).

В последнем случае используем два типа полиномиальной аппроксимации: разложение в ряд Маклорена

$$k(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi+\eta+2} = \sum_{s=0}^{N} a_s(\eta)\xi^s, \quad a_s(\eta) = \frac{(-1)^s}{(\eta+2)^{s+1}} \tag{4.10}$$

и разложение по полиномам Чебышева первого рода $T_n(\xi)$ [20]:

$$k(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi+\eta+2} = -\frac{g_0(\eta)}{2} + \sum_{m=0}^{N} g_m(\eta)T_m(\xi)$$
$$g_j(\eta) = \frac{2}{N+1}\sum_{k=1}^{N+1} k(\xi_k,\eta)T_j(\xi_k), \quad \xi_k = \cos\left[\frac{2k-1}{N+1}\frac{\pi}{2}\right], \quad T_j(\xi_k) = \cos\left[\frac{2k-1}{N+1}\frac{\pi j}{2}\right] \tag{4.11}$$

Отметим, что коэффициенты $a_s(\eta)$ разложения (2.9) можно пересчитать из коэффициентов $g_m(\eta)$ (4.11) на основе методики, использовавшейся выше при получении выражения (2.12).

В качестве значений η_r ($r = 1, \ldots, n$) используем равномерную сетку в виде $\eta_r = (1-\delta)[2(r-1)/(n-1)-1]$, где $0 < \delta < 1$ – малый параметр, фиксирующий положение минимальной и максимальной точек коллокации η_r ($\min\eta_r = -1+\delta$, $\max\eta_r = 1-\delta$).

В таблице представлены расчетные значения решения СИУ (4.5) (при дополнительному условии (4.6)), полученные при следующих параметрах: $D = 0.5 + 0.5i$ в (4.5), $q = 1$ в (4.7) (аналитическое решение), $\delta = 0.2$, $n = 10$ в (2.1), $s = 10$ в (4.9), $N = 25$ в (4.10) и (4.11). Отметим, что при таком значении D $\theta = 0.644 + 0.169i$, т.е. решение имеет достаточно сильную особенность при $\xi = -1$ ($\mathrm{Re}\beta < -1/2$, (см. (4.8)).

Как видно, для всех трех методик расчета наблюдается достаточно хорошее согласование численного и аналитического решения.

Несколько меньшая точность (3–4 верных значащих цифры) достигается при аппроксимации обобщенного ядра (4.5) с помощью (4.10), в то время как аппроксимации (4.11) дает при тех же N на порядок меньшую относительную погрешность численного решения и 4–5 верных цифр. Связано это с более высокой точностью последней аппроксимации – она близка к многочлену наилучшего равномерного приближения (см., например, [25]). В частности, ее максимальная погрешность в прямоугольнике $\eta \in [\min\eta_r, \max\eta_r]$, $\xi \in [-1, 1]$ при указанных параметрах расчета составляет $\max\varepsilon_{\text{cheb}} = 0.09\%$, тогда как для аппроксимации (4.10) $\max\varepsilon_{\text{macl}} = 0.87\%$. В то же время, увеличение N при расчетах на основе (4.10) до величин, которые обеспечивают максимальную погрешность $\max\varepsilon_{\text{macl}} \approx 0.1\%$ ($N = 37$) позволяет построить решение, точность которого близка к указанной для (4.11) при $N = 25$. Это свидетельствует о том, что основное влияние на погрешность численного решения при вычислениях (2.4) с помощью (2.17) оказывает не способ, а точность (максимальная погрешность) аппроксимации ядра $k(\xi, \eta)$.

Отметим также некоторое увеличение погрешности численных решений при приближении к левому концу отрезка $\xi \in [-1, 1]$, причем погрешность эта при увеличении параметров n и s (или N) сокращается достаточно медленно. Последнее, по всей вероятности, связано с наличием второго члена асимптотического разложения решения (4.7), стремящегося к нулю вблизи левого конца отрезка [11, 24].

Анализ зависимости точности численного решения от других параметров расчета показывает следующее.

С ростом n и s (или N) точность численного решения СИУ (4.5) предсказуемо увеличивается, однако рост точности на определенном этапе начинает ограничиваться накоплением ошибок вычислений, усугубляемым необходимостью проведения расчетов в комплексных переменных. Оценку интенсивности накопления вычислительной погрешности при численной реализации предлагаемого метода в рамках двойной точности можно получить на основе сравнения погрешности численных решений уравнения (4.1) при различных значениях n. Как отмечалось выше, при $n = 1$ имеем от 14 до 16 верных цифр в численном решении, причем аналогичная точность наблюдается вплоть до $n = 10$. Отметим в то же время, что при $n = 25$ имеем уже 10–12 верных цифр, а при $n = 35$ – 7–10 верных цифр. Однако, коль скоро численные решения, приведенные в таблице, получены при $n = 10$ и имеют от 3 до 5 верных значащих цифр, можно сделать вывод, что основной вклад в погрешность решения СИУ (4.5) вносит погрешность вычисления интегралов (2.4), а ограниченную составляющую решения $u(\xi)$ (см. (1.5) и (2.1)) при решении СИУ (1.1) можно аппроксимировать полиномом достаточно высокой степени n.

Как и следовало ожидать, при вычислениях на основе (2.17) существенное влияние на точность оказывает величина δ, поскольку именно она регламентирует положение минимальной и максимальной точек коллокации, а от положения этих точек зависит максимальная погрешность аппроксимаций (4.10) и (4.11) в промежутке $\eta_r \in [\min\eta_r, \max\eta_r]$. В то же время отметим, что сильное увеличение параметра δ может привести к плохой обусловленности формируемой алгебраической системы (2.8).

Отметим также, что точность численных решений в некоторой степени зависит от величины D. Так, с увеличением (уменьшением) $|D|$ наблюдается незначительное увеличение (уменьшение) погрешности решения, которое обусловлено соответствующим ростом (сокращением) мнимой части показателя асимптотики θ (см. (4.8)).

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (гранты МК-878.2003.01 и НШ-1849.2003.01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
2. *Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S.* The numerical solutions of singular integral equations // Mechanics of Fracture. V. 1. Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. P. 368–425.
3. *Саврук М.П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323 с.
4. *Дудучава Р.В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тбилиси: Мецниереба, 1979. 135 с. (Тр. Тбил. мат. ин-та. Т. 60.)
5. *Erdogan F.E.* Complex function technique // Continuum Physics (Ed. A.C. Eringen). N. Y. etc.: Acad. Press, 1975. V. 2. P. 523–603.
6. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. App. Mech. 1952. V. 19. № 4. P. 526–528.
7. *Каландия А.И.* Замечания об особенности упругих решений вблизи углов // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 132–135.
8. *Андреев А.В., Гольдштейн Р.В., Житников Ю.В.* Асимптотический анализ решения в окрестности точки излома трещины на границе раздела двух сред // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 865–870.
9. *Карпенко Л.Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 3. С. 564–569.
10. *Chawla M.M., Ramacrishnan T.R.* Modified Gauss–Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals // BIT. 1974. V. 14. № 1. P. 14–21.
11. *Андреев А.В.* Об одном методе численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с обобщенным ядром типа Коши. Препринт № 743. М.: ИПМ РАН, 2003. 60 с.
12. *Miller G.R., Keer L.M.* A numerical technique for the solution of singular integral equations of the second kind // Quart. Appl. Math. 1985. V. 42. № 4. P. 455–465.

13. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* On the numerical solution of Cauchy type singular integral equations and the determination of stress intensity factors in case of complex singularities // ZAMP. 1977. V. 28. № 6. P. 1085–1098.
14. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* A method of numerical solution of Cauchy-type singular integral equations with generalized kernels and arbitrary complex singularities // J. Comp. Phys. 1979. V. 30. № 3. P. 309–323.
15. *Gautschi W.* High-Order Gauss–Lobatto formulae // Numer. Algorithms. 2000.V. 25. № 1–4. P. 213–222.
16. *Андреев А.В.* Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 126–146.
17. *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.
18. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
19. *Erdogan F., Gupta C.* The stress analysis of multi-layered composites with a flaw // Intern. J. Solids Structures. 1971. V. 7. № 1. P. 39–61.
20. *Weisstein E.W.* The CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2003. 3242 p.
21. *Lanczos C.J.* A precision approximation of the gamma function // SIAM J. Numer. Anal. Ser. B. 1964. V. 1. P. 86–96.
22. *Luke Y.L.* The Special Functions and their Approximations. V. 1. N. Y.: Acad. Press, 1969. 349 p.
23. *Bueckner H.F.* On a class of singular integral equation // J. Math. Analysis and Appl. 1966. V. 14. № 3. P. 392–426.
24. *Theocaris P.S., Ioakimidis N.I.* Stress intensity factors at the tips of an antiplane shear crack terminating at a bimaterial interface // Intern. J. Fracture. 1977. V. 13. № 4. P. 549–552.
25. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.01.2004