

УДК 539.3

© 2006 г. Г.В. КОСТИН, В.В. САУРИН

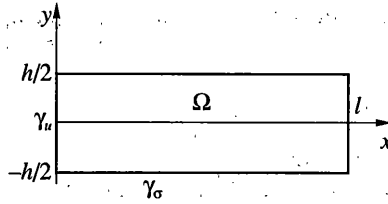
ВАРИАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ В ТЕОРИИ БАЛОК

Получены уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние упругой балки на основе классических вариационных принципов и метода интегродифференциальных соотношений. Исследовано влияние коэффициента Пуассона на жесткостные характеристики упругого стержня прямоугольного сечения. Представлены в явном виде поля напряжений для произвольного вида нагружения и система дифференциальных уравнений, определяющая поля перемещений для изотропной и анизотропной балки. Приведены примеры решения задач изгиба однородного стержня при различных краевых условиях.

1. Введение. Для нахождения приближенных решений краевых задач механики деформированного твердого тела используются различные упрощенные модели, позволяющие достаточно эффективно и точно получать поля напряжений и перемещений. Среди этих моделей особое место занимает теория балок, основанная на интуитивных гипотезах, предложенных Я. Бернули в конце 17 века [1]. Несмотря на то, что эта теория показала свою применимость для широкого класса задач в различных областях науки и техники, она не учитывает такие важные механические характеристики упругих конструкций как влияние сдвиговых и анизотропных свойств материала на напряженно-деформированное состояние. Уточняющие формулы, позволяющие учесть влияние коэффициента Пуассона, были предложены как для статических (балка Тимошенко [2]), так и для динамических задач (поправка Релея [3]). Однако, уравнения балки и соответствующие поправки напрямую не следуют из уравнений линейной теории упругости [4, 5] или вариационных принципов [6].

В данной статье для вывода уравнений балки применяется подход, основанный на разложении неизвестных функций напряжений и перемещений по малому параметру (отношению строительной высоты балки к ее длине) [7]. На основе классических вариационных принципов [6] и метода интегродифференциальных соотношений [8, 9] получены различные уравнения, описывающие напряженно-деформированное состояние упругой балки. Исследовано влияние коэффициента Пуассона на жесткостные характеристики однородного стержня прямоугольного сечения, полученные для различных приближенных подходов. Проведен сравнительный анализ балочных решений с решениями задачи линейной теории упругости, найденными на основе принципа минимума потенциальной энергии и метода интегродифференциальных соотношений [8, 9]. В рамках гипотезы плоских сечений получены в явном виде поля напряжений для произвольного вида нагружения и система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, определяющая поля перемещений как для изотропной, так и анизотропной балки. Приведены аналитические решения задач изгиба однородного стержня прямоугольного сечения при различных краевых условиях.

2. Формулировка краевой задачи упругости. Рассмотрим плоское упругое тело, занимающее прямоугольную область Ω с границей γ (фиг. 1). Введем декартову систему координат Oxy , связанную с областью Ω следующим образом. Начало координат O расположено в середине левой вертикальной стороны пластины, а ось Ox перпендику-



Фиг. 1

лярна этой стороне. Высота пластины равна h , а длина – l . Толщина пластины постоянна и для определенности равна единице. Считается, что на части границы γ_u заданы перемещения \mathbf{u} , а на части границы γ_σ заданы напряжения σ , причем, $\gamma_u \cap \gamma_\sigma = \emptyset$ и $\gamma_u \cup \gamma_\sigma = \gamma$. Напряженно-деформированное состояние изотропного тела описывается двумерной системой дифференциальных уравнений линейной теории упругости (плоское напряженное состояние):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{2.3}$$

Граничные условия запишем в следующем виде:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = p_x \tag{2.4}$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = p_y, \quad (x, y) \in \gamma_\sigma$$

$$u = u_\gamma, \quad v = v_\gamma, \quad (x, y) \in \gamma_u \tag{2.5}$$

Здесь σ_x , σ_y и τ_{xy} – компоненты тензора напряжений σ ; ε_x^0 , ε_y^0 и ε_{xy}^0 – компоненты тензора деформаций ε^0 , u , v – компоненты вектора перемещений \mathbf{u} ; f_x , f_y и n_x , n_y – компоненты вектора объемных сил \mathbf{f} и единичного вектора нормали к границе \mathbf{n} соответственно; p_x , p_y и u_γ , v_γ – компоненты заданных на границе вектор-функций \mathbf{p} и \mathbf{u} . Константы E , G и μ являются модулем упругости, модулем сдвига и коэффициентом Пуассона соответственно.

В случае, когда длина пластины l много больше ее высоты h , напряженно-деформированное состояние тела описывается приближенными уравнениями классической теории балок. Уравнение поперечного изгиба балки [1, 2] имеет следующий вид:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) \tag{2.6}$$

где EI ($I = h^3/12$) – изгибная жесткость балки, $q(x)$ – распределенная поперечная нагрузка. Продольное напряжение при $f_x = 0$ определяется следующим образом

$$\sigma_x = p_x + M(x)y/I \quad (2.7)$$

где $M(x)$ – изгибный момент в сечении балки.

3. Принцип минимума потенциальной энергии. Система уравнений теории упругости и граничные условия (2.1)–(2.5) представляют собой уравнения Эйлера и граничные условия вариационной задачи (принцип минимума потенциальной энергии [6]):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma_x \epsilon_x^0 + \sigma_y \epsilon_y^0 + 2\tau_{xy} \epsilon_{xy}^0] d\Omega - \quad (3.1)$$

$$- \int_{\Omega} [f_x u + f_y v] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} [p_x u + p_y v] d\Gamma_{\sigma} \rightarrow \min_{u, v}$$

Для получения уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние узкой пластины (балки), $h/l \ll 1$, из вариационного принципа рассмотрим следующую краевую задачу. Перемещения на левой стороне пластины равны нулю ($u(0, y) = v(0, y) = 0$), горизонтальные стороны пластины свободны от нагрузок ($p_x(x, \pm h/2) = p_y(x, \pm h/2) = 0$), объемные силы отсутствуют. Тогда выражение для первой вариации полной потенциальной энергии Π пластины после соответствующего интегрирования по частям с учетом краевых условий имеет следующий вид:

$$\delta \Pi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u + \tau_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v + \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right] dy dx + \quad (3.2)$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} [(\sigma_x(l, y) - p_x(y)) \delta u + (\tau_{xy}(l, y) - p_y(y)) \delta v] dy$$

Представляя функции перемещений $u(x, y)$, $v(x, y)$ в виде бесконечных рядов относительно переменной y

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} y^i u_i(x), \quad v = \sum_{i=0}^{\infty} y^i v_i(x) \quad (3.3)$$

условие равенства нулю первой вариации полной потенциальной энергии (3.2) можно представить в следующем виде:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \sum_{i=0}^{\infty} y^i \delta u_i(x) - \tau_{xy} \sum_{i=1}^{\infty} i y^{i-1} \delta u_i(x) \right] dy = 0 \quad (3.4)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \sum_{i=0}^{\infty} y^i \delta v_i(x) - \sigma_y \sum_{i=1}^{\infty} i y^{i-1} \delta v_i(x) \right] dy = 0$$

Выражая из закона Гука (2.2) компоненты тензора напряжений σ через соответствующие компоненты тензора деформаций ϵ^0 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \sum_{i=0}^{\infty} y^i \frac{du_i(x)}{dx}, \quad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{\infty} iy^{i-1} v_i(x) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} iy^{i-1} u_i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} y^i \frac{dv_i(x)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

подставим полученные функции σ_x , σ_y и τ_{xy} в уравнения (3.4). Интегрируя соотношения (3.4) по переменной y и приравнявая нулю коэффициенты при соответствующих вариациях функций перемещений δu_i и δv_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), получаем счетную систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка для нахождения перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$, определенных в (3.3):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-h/2}^{h/2} y^{i+j-2} \left[Ey^2 \frac{d^2 u_j}{dx^2} - \left(j\mu E + \frac{iG}{2} \right) y \frac{dv_j}{dx} - \frac{ijG}{2} u_j \right] dy &= 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \int_{-h/2}^{h/2} y^{i+j-2} \left[\frac{Gy^2}{2} \frac{d^2 v_j}{dx^2} + \left(i\mu E + \frac{jG}{2} \right) y \frac{du_j}{dx} - ijE v_j \right] dy &= 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для построения приближенных решений ограничимся рассмотрением конечномерных по степеням y представлений функций перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$u^{(N)} = \sum_{i=0}^N y^i u_i(x), \quad v^{(N)} = \sum_{i=0}^N y^i v_i(x) \quad (3.7)$$

В качестве примера выберем следующие условия на правом конце пластины: изгибающий момент $M(l)$ и продольная сила $P_x(l)$ равны нулю, а перерезывающая сила равна P_y .

3.1. Уравнения упругой балки (нулевое приближение). При $N = 0$ функции перемещений u и v зависят только от переменной x

$$u^{(0)} = u_0(x), \quad v^{(0)} = v_0(x) \quad (3.8)$$

Система уравнений (3.6) в этом случае имеет простой вид

$$d^2 u/dx^2 = 0, \quad d^2 v/dx^2 = 0 \quad (3.9)$$

С учетом краевых условий получаем решение системы (3.9)

$$u = 0, \quad v = \frac{2P_y}{Gh} x \quad (3.10)$$

Решение (3.10) соответствует чистому сдвигу под действием постоянных касательных напряжений $\tau_{xy} = P_y/h$, при этом граничные условия на горизонтальных сторонах пластины не выполняются.

3.2. Уравнения упругой балки (линейное приближение). При $N = 1$ функции перемещений u и v линейно зависят от переменной y :

$$u = u_0(x) + y u_1(x), \quad v = v_0(x) + y v_1(x) \quad (3.11)$$

При этом уравнения (3.6) могут быть разделены на две независимые подсистемы

$$\begin{aligned} d^2 u_0 / dx^2 - \mu d v_1 / dx &= 0 \\ (1 - \mu) h^2 \frac{d^2 v_1}{dx^2} - 48 \mu \frac{d u_0}{dx} - 48 v_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} d^2 v_0 / dx^2 + d u_1 / dx &= 0 \\ h^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} - 3(1 - \mu) \frac{d v_0}{dx} - 3(1 - \mu) u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Система (3.12) описывает сжатие и растяжение пластины, а уравнения (3.13) отвечают за поперечный изгиб. Отметим, что систему (3.13) можно свести к одному линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно неизвестной функции v_0 , т.е. система (3.13) и уравнение изгиба балки (2.6) имеют одинаковый порядок дифференцирования.

Рассмотрим более детально систему уравнений (3.13). С учетом краевых условий

$$u(0) = v(0) = 0, \quad \sigma_x(l) = 0, \quad \tau_{xy}(l) = P_y / h \quad (3.14)$$

поперечные перемещения $v_0(x)$ имеют вид

$$v_0(x) = \frac{P_y(1 - \mu^2)}{EI} \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} + \frac{h^2 x}{3(1 - \mu)} \right] \quad (3.15)$$

Решение уравнения изгиба балки (2.6) при таких же граничных условиях дает следующее распределение прогибов по длине:

$$v_c(x) = \frac{P_y}{EI} \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{lx^2}{2} \right] \quad (3.16)$$

В отличие от классического балочного решения функции прогибов (3.15) в явном виде зависит от коэффициента Пуассона μ . Важно отметить, что производная от функции $v_0(x)$ на левом конце пластины не равна нулю

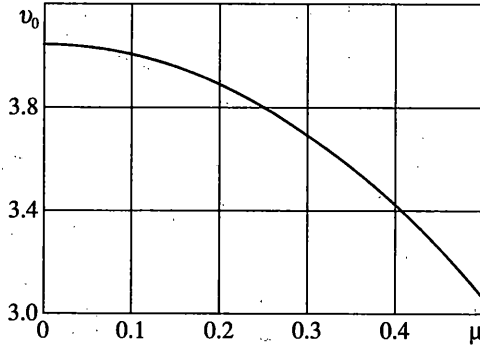
$$\left. \frac{d v_0}{dx} \right|_{x=0} = \frac{P_y h^2}{6GI} \quad (3.17)$$

В качестве геометрических и упругих параметров пластины и величины перерезывающей силы выберем следующие численные значения: $E = 2 \times 10^5$ МПа, $P_y = 2 \times 10^5$ Н, $l = 10$ м, $h = 1$ м.

При $\mu = 0.3$ жесткостные характеристики пластины для линейного приближения (3.15) и классического балочного решения будут равны:

$$v_0(l) = 3.692 \times 10^{-3} \text{ м}, \quad \left. \frac{d v_0}{dx} \right|_{x=0} = 5.2 \times 10^{-6}, \quad v_c(l) = 4 \times 10^{-3} \text{ м}, \quad \left. \frac{d v_c}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

На фиг. 2 представлена зависимость вертикальных отклонений середины правого конца пластины $v_0(l)$ [мм] от величины коэффициента Пуассона μ . Прогиб $v_0(l)$ является квадратичной функцией μ и монотонно убывает с увеличением коэффициента Пуассона.



Фиг. 2

3.3. Уравнения упругой балки (квадратичное приближение). При $N = 2$ функции перемещений u и v имеют вид

$$\begin{aligned} u &= u_0(x) + u u_1(x) + u^2 u_2(x) \\ v &= v_0(x) + u v_1(x) + u^2 v_2(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Как и в случае линейного приближения уравнения (3.6) разделяются на две независимые подсистемы, одна из которых отвечает за растяжение и сжатие пластины, а другая за изгиб. В работе [7] показано, что такое разделение характерно для любой степени аппроксимации функций перемещений u и v . При этом неизвестные функции $u_0, v_1, u_2, v_3, \dots$ описывают растяжение и сжатие, а функции $v_0, u_1, v_2, u_3, \dots$ – изгиб пластины (т.е. функции u_i с четными индексами i связаны только с функциями v_j с нечетными индексами j и наоборот).

В этом случае уравнения изгиба пластины запишутся в виде

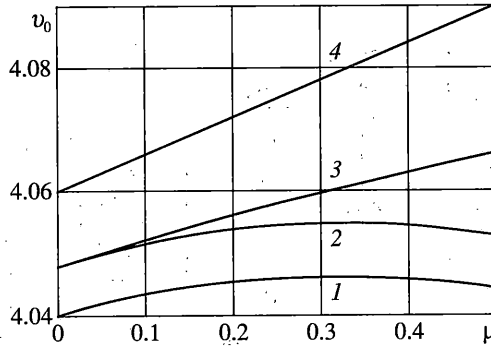
$$\begin{aligned} 12 \frac{d^2 v_0}{dx^2} + h^2 \frac{d^2 v_2}{dx^2} + 12 \frac{du_1}{dx} &= 0 \\ 4h^2 \frac{d^2 u_1}{dx^2} + (9\mu - 1)h^2 \frac{d^2 v_2}{dx^2} - 12(1 - \mu) \left(\frac{dv_0}{dx} + u_1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$20(1 - \mu) \frac{d^2 v_0}{dx^2} + 3(1 - \mu)h^2 \frac{d^2 v_2}{dx^2} - 20(9\mu - 1) \frac{du_1}{dx} - 320v_2 = 0$$

Систему (3.19) можно свести к одному линейному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно неизвестной функции v_0 . Отметим, что порядок системы дифференциальных уравнений (3.6) растет с увеличением степени аппроксимации функций перемещений. Например, при кубичном приближении изгиб пластины описывается уравнением восьмого порядка.

Решение системы (3.19) с учетом граничных условий (3.14) не приводится ввиду его громоздкости, обусловленной присутствием в нем экспоненциальных членов, вида

$$\exp\left(\frac{4x\sqrt{15(1+\mu)}}{h}\right) \sim \exp\left(\frac{16l}{h}\right)$$



Фиг. 3

Отметим также вычислительные трудности, связанные с их большими значениями. Так при $l/h = 10$ приходится выполнять вычисления с величинами порядка 10^{67} .

При заданных параметрах пластины и $\mu = 0.3$ жесткостные характеристики для квадратичного приближения (3.19) и классического балочного решения имеют следующие значения: $v_0(l) = 4.046 \times 10^{-3}$ м, $dv_0/dx|_{x=0} = 7.8 \times 10^{-6}$, $v_c(l) = 4 \times 10^{-3}$ м, $dv_c/dx|_{x=0} = 0$.

На фиг. 3 (кривая 1) показана зависимость вертикальных отклонений середины правого конца пластины $v_0(l)$ [мм] от величины коэффициента Пуассона μ . В сравнении с линейным приближением значение прогиба $v_0(l)$ увеличивается при фиксированном μ , при этом меняется характер зависимости $v_0(l)$ от μ . Функция $v_0(\mu)$ имеет максимум при $\mu \approx 0.33$.

4. Метод интегриродифференциальных соотношений. В работах [8, 9] изложены основные принципы решения задач линейной теории упругости на основе метода интегриродифференциальных соотношений. В этом подходе управляющие уравнения упругости имеют вид

$$\Phi = \int_{\Omega} (C^{-1} \cdot \sigma - \epsilon^0) \cdot (C^{-1} \cdot \sigma - \epsilon^0) d\Omega = 0 \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \tag{4.2}$$

$$\epsilon_{ij}^0 = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{4.3}$$

где σ – тензор напряжений; ϵ_{ji}^0, u_k – соответственно компоненты тензора деформаций ϵ^0 и вектора перемещений u ; C – тензор модулей упругости ($C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{klij}$); f – вектор объемных сил; точкой обозначен оператор скалярного произведения. В отличие от классической формулировки (2.1)–(2.3) в данном случае неизвестными функциями являются компоненты тензора напряжений σ и вектора перемещений u . Для решения задач упругости вводится эквивалентная вариационная формулировка

$$\Phi[\sigma, u] \rightarrow \min_{\sigma, u} \tag{4.4}$$

при строгом выполнении дифференциальных соотношений (4.2), (4.3) и граничных условий (2.4), (2.5).

Представим неизвестные функции компонентов тензора напряжений σ и вектора перемещений u в виде бесконечных рядов по степеням y/l :

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_x^{(n)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n, & \sigma_y(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_y^{(n)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{xy}^{(n)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n \\ u(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n, & v(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n \end{aligned} \quad (4.5)$$

Выбор разложения неизвестных функций по степеням y/l обусловлен двумя причинами: коэффициенты при соответствующих степенях y/l имеют размерности напряжений или перемещений, в случае узкой пластины ($h \ll l$) разложение производится по малому параметру, так как $|y| < h$.

Чтобы найти приближенное решение задачи (4.4) с ограничениями (4.2), (4.3), (2.4), (2.5), рассмотрим конечномерное представление функций напряжений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0)}(x) + \sigma_x^{(1)}(x) \frac{y}{l} \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)}(x) + \tau_{xy}^{(1)}(x) \frac{y}{l} + \tau_{xy}^{(2)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^2 \\ \sigma_y &= \sigma_y^{(0)}(x) + \sigma_y^{(1)}(x) \frac{y}{l} + \sigma_y^{(2)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^2 + \sigma_y^{(3)}(x) \left(\frac{y}{l}\right)^3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

В этом разложении σ_x линейная функция по y . Выбор степени аппроксимации функции τ_{xy} и σ_y обусловлен тем обстоятельством, что в уравнениях равновесия (2.1) соответствующие производные от функций напряжений должны иметь одинаковый порядок разложения по малому параметру y/l для существования нетривиальных решений.

Подставляя разложения (4.6) в уравнения равновесия (2.1) и приравнявая нулю выражения при соответствующих степенях y/l , получаем в отсутствие объемных сил систему пяти линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_x^{(0)}}{dx} + \tau_{xy}^{(1)} &= 0, & \frac{d\sigma_x^{(1)}}{dx} + 2\tau_{xy}^{(2)} &= 0 \\ \frac{d\tau_{xy}^{(0)}}{dx} + \sigma_y^{(1)} &= 0, & \frac{d\tau_{xy}^{(1)}}{dx} + 2\sigma_y^{(2)} &= 0, & \frac{d\tau_{xy}^{(2)}}{dx} + 3\sigma_y^{(3)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

В данном разделе ограничимся рассмотрением граничных условий следующего вида

$$\sigma_y(x, \pm h/2) = \tau_{xy}(x, \pm h/2) = 0 \quad (4.8)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(l, y) dy = P_x, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(l, y) dy = P_y, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(l, y) y dy = M \quad (4.9)$$

$$u(0, y) = v(0, y) = 0 \quad (4.10)$$

Эти граничные условия соответствуют задаче изгиба консоли, нагруженной на свободном конце сосредоточенными силами P_x , P_y и моментом M .

После удовлетворения граничных условий (4.8) соотношения (4.6) упрощаются

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(1)} \frac{y}{l}, \quad \tau_{xy} = \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \tau_{xy}^{(0)} \quad (4.11)$$

$$\sigma_y = \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \left(\sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(1)} \frac{y}{l}\right)$$

Решая систему уравнений (4.7) с учетом (4.11) и удовлетворяя граничные условия на правом конце пластины (4.9), получаем равновесное поле напряжений

$$\sigma_x = \frac{P_x}{h} + \frac{12y}{h^3} [P_y(x-l) + M], \quad \tau_{xy} = \frac{6P_y}{h} \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{h^2}\right), \quad \sigma_y = 0 \quad (4.12)$$

Для того, чтобы согласовать разложения функций напряжений и перемещений по малому параметру h/l , представим перемещения в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^3 u_n(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n, \quad v(x, y) = \sum_{n=0}^4 v_n(x) \left(\frac{y}{l}\right)^n \quad (4.13)$$

Тогда функционал (4.1) запишется следующим образом:

$$\Phi = \int_{\Omega} [H_1^2 + H_2^2 + 2H_3^2] d\Omega \quad (4.14)$$

$$H_1 = \frac{du_3 y^3}{dx l^3} + \frac{du_2 y^2}{dx l^2} + \left(\frac{du_1}{dx} - \frac{P_y(x-l) + M}{EI} l\right) \frac{y}{l} + \frac{du_0}{dx} - \frac{P_x}{Eh}$$

$$H_2 = \frac{4v_4 y^3}{l l^3} + \frac{3v_3 y^2}{l l^2} + \left(\frac{2v_2}{l} + \mu \frac{P_y(x-l) + M}{EI} l\right) \frac{y}{l} + \frac{v_1}{l} - \frac{\mu P_x}{Eh}$$

$$H_3 = \frac{dv_4 y^4}{dx 2l^4} + \frac{dv_3 y^3}{dx 2l^3} + \left(\frac{3u_3}{2l} + \frac{1}{2} \frac{dv_2}{dx} + \frac{(1+\mu)P_y}{EI} l^2\right) \frac{y^2}{l^2} + \quad (4.15)$$

$$+ \left(\frac{u_2}{l} + \frac{1}{2} \frac{dv_1}{dx}\right) \frac{y}{l} + \frac{u_1}{2l} + \frac{1}{2} \frac{dv_0}{dx} - \frac{3(1+\mu)P_y}{Eh}$$

Минимизация функционала (4.14) сводится к решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (уравнения Эйлера) относительно девяти неизвестных функций перемещений. Данная система может быть решена аналитически, однако, анализ полученного решения затруднен.

Перепишем выражения для H_1 , H_2 , H_3 в (4.15) следующим образом:

$$H_1 = g_1 \frac{y^3}{l^3} + g_2 \frac{y^2}{l^2} + g_3 \frac{y}{l} + g_4$$

$$H_2 = g_5 \frac{y^3}{l^3} + g_6 \frac{y^2}{l^2} + g_7 \frac{y}{l} + g_8 \quad (4.16)$$

$$H_4 = g_9 \frac{y^4}{l^4} + g_{10} \frac{y^3}{l^3} + g_{11} \frac{y^2}{l^2} + g_{12} \frac{y}{l} + g_{13}$$

Заметим, что если все коэффициенты g_i ($i = 1, \dots, 13$) равны нулю, то функционал Φ достигает своего абсолютного минимума ($\Phi \equiv 0$). Добиться этого не удастся из-за того, что количество этих коэффициентов превышает число неизвестных функций. Введем в рассмотрения квадратичный функционал

$$J = \sum_{i=10}^{13} \int_0^l g_i^2 dx \quad (4.17)$$

который определяет невязку по этим условиям.

Можно показать, что минимизация функционала J сводится к нахождению минимумов следующих интегралов:

$$J_1[u_0] = \int_0^l g_4^2 dx, \quad J_2[v_0, u_1] = \int_0^l (g_3^2 + g_{13}^2) dx \quad (4.18)$$

$$J_3[v_1, u_2] = \int_0^l (g_2^2 + g_8^2 + g_{12}^2) dx$$

$$J_4[v_2, u_3] = \int_0^l (g_1^2 + g_7^2 + g_{11}^2) dx \quad (4.19)$$

$$J_5[v_3] = \int_0^l (g_6^2 + g_{10}^2) dx, \quad J_6[v_4] = \int_0^l (g_5^2 + g_9^2) dx$$

Отметим также, что функционалы J_1 и J_2 могут достигать своего абсолютного минимума. Для этого необходимо решить систему трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$g_4 = \frac{du_0}{dx} - \frac{P_x}{Eh} = 0$$

$$g_3 = \frac{du_1}{dx} - \frac{P_y(x-l) + M}{EI} l = 0 \quad (4.20)$$

$$g_{13} = \frac{1}{2} \frac{dv_0}{dx} + \frac{u_1}{2l} - \frac{3(1+\mu)P_y}{Eh} = 0$$

относительно трех неизвестных функций перемещений u_0 , u_1 и v_0 . Граничные условия для системы (4.20) вытекают из (4.10):

$$u_0(0) = u_1(0) = v_0(0) = 0 \quad (4.21)$$

Функция u_0 определяет растяжение или сжатие вдоль оси Ox центральной линии пластины, а функции v_0 и u_1 описывают ее поперечный изгиб. Систему уравнений

(4.20) можно рассматривать, как уравнения упругой балки. Согласно гипотезам, предложенным Я. Бернулли [1]: "... прямые линии, нормальные к срединной поверхности до деформации, остаются прямыми и нормальными к срединной поверхности и после деформации не изменяют своей длины". Действительно, решение системы уравнений (4.20) удовлетворяет всем предположениям Бернулли, за исключением утверждения, что прямые линии, нормальные к срединной поверхности до деформации, будут нормальными к этой поверхности и после деформации. Неучтенные функции g_i в функционале J отвечают за искривление и изменение длины прямых линий, нормальных к срединной поверхности до деформации и не влияют на решение системы (4.20) при заданном поле напряжений (4.12).

Решение системы (4.20) при удовлетворении граничных условий (4.21) определяет поле перемещений пластины

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{Mxy}{EI} - \frac{P_y xy(2l-x)}{2EI} + \frac{P_x x}{Eh} \\ v(x, y) &= \frac{Mx^2}{2EI} + \frac{P_y x^2(3l-x)}{6EI} + \frac{3P_y x}{Gh} \end{aligned} \quad (4.22)$$

В отличие от классического балочного решения (3.16) функция прогибов из (4.22) при $M = 0$ линейно зависит от коэффициента Пуассона μ и производная от функции v на левом конце пластины равна

$$\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \frac{3P_y}{Gh}$$

Для заданных в п. 3.2 параметрах пластины, величине перерезывающей силы P_y и коэффициенте Пуассона $\mu = 0.3$ жесткостные характеристики пластины для приближения (4.22) и классического балочного решения имеют следующие значения: $v(l) = 4.078 \times 10^{-3}$ м, $dv/dx|_{x=0} = 7.8 \times 10^{-6}$, $v_c(l) = 4 \times 10^{-3}$ м, $dv_c/dx|_{x=0} = 0$.

Для сравнения различных подходов к решению задачи об изгибе упругой балки рассмотрим более детально зависимость вертикального смещения $v(l, 0)$ от значения коэффициента Пуассона μ . На фиг. 3 представлены графики изменения величины $v(l, 0)$ от μ полученные четырьмя различными способами. Кривая 1 на этой фигуре соответствует квадратичной аппроксимации функций перемещений, полученной в п. 3 с помощью вариационного принципа. Этот же принцип применялся для получения решения задачи линейной теории упругости на основе полиномиальных аппроксимаций функций перемещений. В работах [8, 9] детально описан численный алгоритм построения решения, в котором функции u и v задавались в виде полного полинома заданной степени n от переменных x и y :

$$u = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k u_{kl} x^l y^{k-l}, \quad v = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^k v_{kl} x^l y^{k-l} \quad (4.23)$$

Линия 2 на фиг. 3 получена этим методом для значения $n = 20$. На основе метода интегриродифференциальных соотношений построена зависимость $v(l, 0)$ от μ (кривая 3) для тех же параметров задачи. В этом подходе неизвестные функции напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и перемещений u, v задавались в виде полных полиномов от переменных x и y аналогично (4.23). Решение находилось из условия минимума функционала (4.1) при строгом выполнении дифференциальных ограничений (4.2), (4.3) и граничных условий (4.8)–(4.10). Представленная зависимость соответствует степени полиномов $n = 16$ для

аппроксимации напряжений и $n = 17$ для перемещений. Решение (4.22) показано на фиг. 3 в виде кривой 4.

Анализируя приведенные зависимости, можно отметить следующие особенности. Относительная ошибка вычисления прогиба $v(l, 0)$, полученного различными методами для произвольного $\mu \in [0, 1/2]$, не превосходит 1%. Максимальный разброс значений $v(l, 0)$ реализуется при $\mu = 1/2$ (несжимаемый материал). При этом можно рассматривать кривую 1 как оценку снизу, а кривую 4 как оценку сверху точного значения $v(l, 0)$. Кривые 3, 4 – монотонно возрастающие функции аргумента μ , в то время как функции 1, 2 имеют максимум при некотором значении коэффициента Пуассона.

5. Уравнения упругой балки прямоугольного сечения (общий случай нагружения). Рассмотрим балку прямоугольного сечения, описываемую уравнениями (2.1)–(2.3) и защемленную на левом конце (см. фиг. 1):

$$u(0, y) = v(0, y) = 0 \tag{5.1}$$

На горизонтальных сторонах балки приложены силы

$$\sigma_y(x, \pm h/2) = Q^\pm(x), \quad \tau_{xy}(x, \pm h/2) = T^\pm(x) \tag{5.2}$$

где $Q^\pm(x)$ и $T^\pm(x)$ – заданные функции. Линейные комбинации $Q^\pm(x)$ и $T^\pm(x)$ могут рассматриваться как распределенные по длине балки нагрузки различного типа. Так функция $Q_r = Q^+ - Q^-$ является распределенной перерезывающей нагрузкой, $Q_s = Q^+ + Q^-$ – распределенное вертикальное поджатие или растяжение, $T_s = T^+ + T^-$ создает распределенный изгибающий момент, а $T_r = T^+ - T^-$ определяет горизонтальное поджатие или растяжение.

На правом конце балки рассматриваются два типа граничных условий. В случае, если на правом конце задаются силы и момент (4.9), то задача является статически определимой и поля напряжений могут быть определены из уравнений равновесия (2.1). Если граничные условия заданы в виде

$$u(l, y) = v(l, y) = 0 \tag{5.3}$$

тогда задача три раза статически неопределима и поля напряжений могут быть найдены с точностью до трех неизвестных констант.

Используя аппроксимацию полей напряжений, заданную в (4.6), разрешая уравнения равновесия в виде (4.7) и удовлетворяя крайним условиям (5.2), находим функции напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= -\frac{1}{h} \int T_r dx + c_3, & \sigma_x^{(1)} &= -\frac{12l}{h^3} \iint Q_r dx dx - \frac{6l}{h^2} \int T_s dx + \frac{8lc_2}{h^2} x + c_1 \\ \tau_{xy}^{(0)} &= -\frac{3}{2h} \int Q_r dx - \frac{T_s}{4} + c_2, & \tau_{xy}^{(1)} &= \frac{l}{h} T_r, & \tau_{xy}^{(2)} &= -\frac{4l^2}{h^2} \tau_{xy}^{(0)} + \frac{2l^2}{h^2} T_s \\ \sigma_y^{(0)} &= \frac{Q_s}{2} + \frac{hdT_r}{8 dx}, & \sigma_y^{(1)} &= \frac{3lQ_r}{2h} + \frac{l dT_s}{4 dx} \\ \sigma_y^{(2)} &= -\frac{4l^2}{h^2} \sigma_y^{(0)} + \frac{2l^2}{h^2} Q_s, & \sigma_y^{(3)} &= -\frac{4l^2}{h^2} \sigma_y^{(1)} + \frac{4l^3}{h^3} Q_r \end{aligned} \tag{5.4}$$

Используя аппроксимации перемещений (4.13), выражения для функций H_1, H_2, H_3 можно представить в виде

$$\begin{aligned}
H_1 &= \frac{du_0}{dx} - \frac{\sigma_x^{(0)} - \mu\sigma_y^{(0)}}{E} + \left(\frac{du_1}{dx} - \frac{\sigma_x^{(1)} - \mu\sigma_y^{(1)}}{E}\right)\frac{y}{l} + \\
&+ \left(\frac{du_2}{dx} + \frac{\mu\sigma_y^{(2)}}{E}\right)\frac{y^2}{l^2} + \left(\frac{du_3}{dx} + \frac{\mu\sigma_y^{(3)}}{E}\right)\frac{y^3}{l^3} \\
H_2 &= \frac{v_1}{l} - \frac{\sigma_y^{(0)} - \mu\sigma_x^{(0)}}{E} + \left(\frac{2v_2}{l} - \frac{\sigma_y^{(1)} - \mu\sigma_x^{(1)}}{E}\right)\frac{y}{l} + \\
&+ \left(\frac{3v_3}{l} - \frac{\sigma_y^{(2)}}{E}\right)\frac{y^2}{l^2} + \left(\frac{4v_4}{l} - \frac{\sigma_y^{(3)}}{E}\right)\frac{y^3}{l^3} \\
H_3 &= \frac{u_1}{2l} + \frac{1}{2}\frac{dv_0}{dx} - \frac{\tau_{xy}^{(0)}}{G} + \left(\frac{u_2}{l} + \frac{1}{2}\frac{dv_1}{dx} - \frac{\tau_{xy}^{(1)}}{G}\right)\frac{y}{l} + \\
&+ \left(\frac{3u_3}{2l} + \frac{1}{2}\frac{dv_2}{dx} - \frac{\tau_{xy}^{(2)}}{G}\right)\frac{y^2}{l^2} + \frac{dv_3}{dx}\frac{y^3}{2l^3} + \frac{dv_4}{dx}\frac{y^4}{2l^4}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Принимая гипотезу плоских поперечных сечений, обсуждавшуюся в п. 4, запишем уравнения балки следующим образом:

$$\begin{aligned}
\frac{du_0}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(0)}(x) - \mu\sigma_y^{(0)}(x)}{E} \\
\frac{du_1}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(1)}(x) - \mu\sigma_y^{(1)}(x)}{E}, \quad \frac{dv_0}{dx} + \frac{u_1}{l} = \frac{2\tau_{xy}^{(0)}(x)}{G}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Из (5.6) видно, что уравнения балки представляют из себя соотношения закона Гука (2.2), записанного для соответствующих компонент в аппроксимациях функций перемещений (4.13) и напряжений (4.6). Поэтому данные уравнения легко обобщаются на случай анизотропной балки. Например, для ортотропного материала, ориентированного вдоль оси Ox , система дифференциальных уравнений (5.6) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
\frac{du_0}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(0)}(x)}{E_1} - \frac{\mu_{12}\sigma_y^{(0)}(x)}{E_2} \\
\frac{du_1}{dx} &= \frac{\sigma_x^{(1)}(x)}{E_1} - \frac{\mu_{12}\sigma_y^{(1)}(x)}{E_2} \\
\frac{dv_0}{dx} + \frac{u_1}{l} &= \frac{2\tau_{xy}^{(0)}(x)}{G_{12}}, \quad E_2\mu_{21} = E_1\mu_{12}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

где E_1 и E_2 – модули Юнга соответственно по главным направлениям упругости x и y ; G_{12} – модуль сдвига; μ_{12} и μ_{21} – коэффициенты Пуассона.

6. Примеры. Общие данные для всех примеров за исключением последнего: длина балки $l = 10$ м, высота балки $h = 1$ м, толщина балки равна ее высоте (балка имеет квадратное сечение), модуль упругости $E = 200$ ГПа.

Пример 1: консольная балка под действием распределенной нагрузки. Рассмотрим защемленную на одном конце балку ($u(0, y) = v(0, y) = 0$), нагруженную распреде-

ленными перерезывающими силами $Q_r(x) = q = \text{const}$. Остальные функции и константы, определяющие граничные условия, равны нулю: $P_x = P_y = M = T_s = T_r = Q_s = 0$.

Равновесное поле напряжений однозначно задается выражениями (4.5) и (5.4). Функция вертикальных смещений балки $v_0(x)$ находится из решения системы уравнений (5.6) для этих краевых условий

$$v_0 = v_c + \Delta v_0, \quad v_c = \frac{qx^2}{24EI}(x^2 - 4lx + 6l^2), \quad \Delta v_0 = \frac{3ql}{Gh}x - \frac{3q(4 + 3\mu)}{4Eh}x^2$$

где v_c – функция поперечных смещений, полученная из классического уравнения изгиба балки (2.6). Если $q > 0$, тогда добавка Δv_0 положительна для всех $x > 0$. Для заданных значений параметров и $q = 200$ КН/м перемещение конца балки $v_c(l) = 1.5 \times 10^{-2}$ м, а дополнительное смещение определяется формулой $\Delta v_0(l) = (300 + 375\mu) \times 10^{-6}$ м. Отметим линейный рост прогиба конца консоли с увеличением коэффициента Пуассона. Относительная величина дополнительного смещения $\Delta v_0(l)$ при $\mu = 0.3$ равна

$$\left. \frac{\Delta v_0 100\%}{v_c + \Delta v_0} \right|_{\mu = 0.3} \approx 2.67\%$$

Пример 2: защемленная балка под действием распределенной нагрузки. Рассмотрим защемленную на обоих концах балку ($u(0, y) = v(0, y) = y(l, y) = v(l, y) = 0$), нагруженную распределенными перерезывающими силами $Q_r(x) = q = \text{const}$. Остальные функции, определяющие граничные условия, равны нулю: $T_s = T_r = Q_s = 0$.

Функция вертикальных смещений балки $v_0(x)$ для этих краевых условий имеет вид

$$v_0 = v_c + \Delta v_0, \quad v_c = \frac{qx^2(l-x)^2}{24EI}, \quad \Delta v_0 = \frac{3qx(l-x)}{2Gh}$$

Как и в примере 1, при $q > 0$ добавка Δv_0 положительна для всех $x > 0$. Для заданных значений параметров и $q = 200$ КН/м перемещение конца балки $v_c(l) = 3.125 \times 10^{-4}$ м, а дополнительное смещение определяется как $\Delta v_0(l) = 75(1 + \mu) \times 10^{-6}$ м. Относительная величина дополнительного смещения $\Delta v_0(l)$ при $\mu = 0.3$ равна

$$\left. \frac{\Delta v_0 100\%}{v_c + \Delta v_0} \right|_{\mu = 0.3} \approx 23.78\%$$

Отметим, что вид граничных условий оказывает существенное влияние на точность получаемых балочных решений.

Пример 3: консольная ортотропная балка под действием распределенной нагрузки. Рассмотрим защемленную на одном конце балку квадратного сечения ($u(0, y) = v(0, y) = 0$), нагруженную распределенными перерезывающими силами $Q_r(x) = q = \text{const}$. Остальные функции и константы, определяющие граничные условия, как и в примере 1 равны нулю. Выбраны следующие параметры ортотропного материала: $E_1 = 200$ ГПа, $E_2 = 80$ ГПа, $G_{12} = 40$ ГПа, $\mu_{12} = 0.12$. Ориентация главного модуля Юнга E_1 совпадает с осью Ox . Геометрические размеры балки такие же как и в примере 1.

Функция вертикальных смещений балки $v_0(x)$ находится из решения системы уравнений (5.7):

$$v_0 = v_c + \Delta v_0, \quad v_c = \frac{qx^2}{24E_1I}(x^2 - 4lx + 6l^2), \quad \Delta v_0 = \frac{3q(2l-x)}{2G_{12}h}x + \frac{3q\mu_{12}}{4E_2h}x^2$$

где v_c – функция поперечных смещений, полученная из классического уравнения изгиба балки (2.6); когда $E = E_1$. Если $q > 0$, добавка Δv_0 положительна для всех $x > 0$. Для

заданных значений параметров и $q = 200$ КН/м перемещение конца балки $v_c(l) = 1.5 \times 10^{-2}$ м, а дополнительное смещение $\Delta v_0(l) = 7.725 \times 10^{-4}$ м. Относительная величина дополнительного смещения $\Delta v_0(l)$ равна

$$\frac{\Delta v_0 100\%}{v_c + \Delta v_0} \approx 4.89\%$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 03-01-96586, 05-01-00563, 05-08-18094) и программы “Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-1627.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 379 с.
3. Стрэтт Дж.В. (Лорд Релей). Теория звука. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1940. 500 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
5. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. М.: Мир, 1988. 344 с.
6. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
7. Kienzler R. On consistent plate theories // Archive of Appl. Mech. 2002. V. 72. P. 229–247.
8. Костин Г.В., Саурин В.В. Интегро-дифференциальный подход к решению задач линейной теории упругости // Докл. АН. 2005. Т. 404. № 5. С. 628–631.
9. Костин Г.В., Саурин В.В. Интегро-дифференциальная постановка и вариационный метод решения задач линейной теории упругости // ППП. 2005. Вып. 67. С. 190–198.

Москва

Поступила в редакцию
7.06.2005