МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2006

УДК 539.374

© 2006 г. С.Е. ОМАРОВ, Б.Е. ПОБЕДРЯ

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ПОЛЯРНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

Обсуждаются способы структурных изменений в композитах с вязкоупругими компонентами. Эти компоненты описываются достаточно общей физически нелинейной теорией вязкоупругости, в которой учитывается эволюционная деструкция и моментные напряжения.

1. Введение. При деформировании композита его компоненты физико-химически взаимодействуют между собой. В частности, в них могут протекать химические реакции и происходить фазовые переходы.

Моделирование микроструктуры материала средствами механики сплошной среды (МСС) требует введения дополнительных феноменологических параметров и пересмотра основных постулатов МСС [1], а иногда и использования двухуровневого описания континуума [2].

Один из возможных способов учета структурных изменений, которые могут происходить в композитах, описан в работе [3]. В ней предложены схемы экспериментального нахождения ядер релаксации и ползучести для линейно-вязкоупругих композитов с учетом возможных фазовых переходов. Нахождению эффективных ядер релаксации и ползучести для вязкоупругих композитов с учетом эволюционной деструкции посвящена работа [4].

2. Общая постановка задачи. Рассмотрим одну из возможных постановок квазистатической задачи механики композитов с учетом структурных изменений.

Пусть композит характеризуется не только регулярной структурой, но и неоднородностями, связанными с наличием дефектов, примесей, трещиноватости, раковин и шероховатостью поверхностей, разделяющих компоненты композита и границы всего тела [5]. Тогда будем рассматривать кроме классического тензора напряжений σ_{ij} еще и моментные напряжения μ_{ij}. Примем определяющие соотношения в виде [3, 4]:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x}) \tag{2.1}$$

$$\mu_{ij} = K_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x}) \tag{2.2}$$

Здесь F_{ij}, K_{ij} – операторы, зависящие от указанных аргументов: тензора дисторсии $\operatorname{grad}\mathbf{u}$, тензора искривлений $\boldsymbol{\kappa}$, тензора структуры $\boldsymbol{\chi}$, температуры T и координат $\mathbf{x}$.

Деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ будем для простоты считать малыми:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \equiv \epsilon_{kij}\omega_k \tag{2.3}$$

Будем также считать малыми и искривления κ_{ij}, которые выражаются в таком случае линейно через вектор спина $\boldsymbol{\omega}$ (спинвектор) [1]

$$\kappa_{Ij} = \omega_{i,j} \tag{2.4}$$

Равновесие тела будет соблюдаться, если кроме уравнений равновесия

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \tag{2.5}$$

выполняются еще и следствия постулата об изменении кинетического момента механики сплошной среды [1, 2]:

$$\mu_{ij,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \gamma M_i = 0 \tag{2.6}$$

где $\mathbf{M}$ – вектор массовых моментов, γ – плотность моментов инерции.

Для тензора структуры $\boldsymbol{\chi}$ примем операторные соотношения

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, T, \mathbf{x}) \tag{2.7}$$

Как следствие законов термодинамики мы имеем также уравнение притока тепла

$$\begin{gathered}\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = (\Lambda_{ij}T_{,j})_{,i} - T\frac{d}{dt}[\alpha_{ij}F_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x}) + \\ + \beta_{ij}K_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x})] + \rho q + w^*\end{gathered} \tag{2.8}$$

причем функция рассеивания после конкретизации рассматриваемой модели считается известным оператором

$$w^* = w^*(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x}) \tag{2.9}$$

Подставим теперь значения операторов (2.1), (2.2), (2.7), (2.9), предварительно выразив в них кинематические характеристики $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ через $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ согласно (2.3), (2.4), в уравнения (2.5), (2.6), (2.8). Получим систему семи операторных уравнений относительно семи неизвестных u_i, ω_i, T:

$$F_{ij,j}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x}) + \rho F_i = 0 \tag{2.10}$$

$$K_{ij,j}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x}) + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x}) + \gamma M_i = 0 \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = (\Lambda_{ij}T_{,j})_{,i} - T\frac{d}{dt}[\alpha_{ij}\sigma_{ij}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x}) + \\ + \beta_{ij}\mu_{ij}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x})] + \rho q + w^*(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x})\end{gathered} \tag{2.12}$$

Сюда требуется добавить граничные условия, например

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x})n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0 \tag{2.13}$$

$$\omega_i|_{\Sigma_1} = \omega_i^0, \quad \mu_{ij}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}, T, \mathbf{x})n_j|_{\Sigma_2} = M_i^0 \tag{2.14}$$

$$\Lambda_{ij}T_{,j}n_i|_{\Sigma} = \eta(T|_{\Sigma} - T_c^0) \tag{2.15}$$

где η – коэффициент теплоотдачи, а u_i^0, ω_i^0, S_i^0, M_i^0, T_c^0 – заданные на границе тела “входные данные”.

Для уравнения теплопроводности необходимо еще задать начальные условия:

$$t = t_0: T = T^0 \tag{2.16}$$

Поставленная задача (2.10)–(2.16) является физически нелинейной и неоднородной, т.е. материальные функции операторных определяющих соотношений (2.1), (2.2), (2.7) являются разрывными функциями координат. Поэтому речь может идти только об обобщенном решении. Используя подход, развитый в [6], можно записать условия, накладываемые на упомянутые материальные функции, чтобы обеспечить существование, единственность и возможность осуществления сходящихся итерационных процессов для решения задачи (2.10)–(2.16).

Методами, описанными в [7], можно свести задачу (2.10)–(2.16) к двум системам рекуррентных последовательностей. Одна из них предназначена для определения локальных операторов, отражающих неоднородность композитов, а другая – для решения краевых задач с эффективными характеристиками, т.е. для однородной приведенной среды.

Такой подход предполагает, что нам известны все данные о каждом компоненте композита. В частности, известны операторные определяющие соотношения (2.7).

Пусть определяющие соотношения (2.1), (2.2) можно обратить в виде

$$\varepsilon_{ij} = G_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x})$$

$$\kappa_{ij} = L_{ij}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x})$$

Пусть также операторы структуры (2.7) представимы в виде

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{Y}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, T, \mathbf{x})$$

а функция рассеивания (2.9) имеет вид

$$w^* = w^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\chi}, T, \mathbf{x})$$

Тогда к уравнениям равновесия (2.5), (2.6) следует добавить уравнения совместности

$$\eta_{ij}(\varepsilon) \equiv \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\varepsilon_{kn,\,lm} = 0 \tag{2.17}$$

$$\bar{\eta}_{ij}(\kappa^s) \equiv \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\overset{s}{\kappa}_{kn,\,lm} = 0 \tag{2.18}$$

Здесь $\boldsymbol{\kappa}^s$ – симметричная часть тензора искривлений $\boldsymbol{\kappa}$. Таким образом, получаем 12 уравнений (2.17), (2.18) относительно 12 неизвестных $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\kappa}^s$. Антисимметричные части тензоров $\mathrm{grad}\,\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\kappa}$, которые выражаются через векторы с компонентами ω_i, κ_i, находятся из тождеств, описанных в работе [8].

3. Нелинейные определяющие соотношения. Как частный случай общей постановки, данной в предыдущем пункте, в работе [5] рассмотрена линейная вязкоупругая полярная среда. Определяющие соотношения такой среды имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} = {} & \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t,\tau)u_{k,\,l}(\tau)d\tau + \int_0^t \gamma_{ijkl}(t,\tau)\kappa_{kl}(\tau)d\tau + \\ & + \int_0^t V_{ijkl}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau) + \int_0^t \nu_{ijkl}(t,\tau)\chi'_{kl}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\mu_{ij} = {} & \int_0^t \Gamma'_{ijkl}(t,\tau)\kappa_{kl}(\tau)d\tau + \int_0^t \gamma'_{ijkl}(t,\tau)u_{k,\,l}(\tau)d\tau + \\ & + \int_0^t V'_{ijkl}(t,\tau)\chi'_{kl}(\tau)d\tau + \int_0^t \nu'_{ijkl}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{3.2}$$

а тензоры повреждаемости χ и χ' связаны с кинематическими характеристиками соотношениями

$$\chi_{ij} = \int_0^t X_{ijkl}(t,\tau)u_{k,l}(\tau)d\tau + \int_0^t x_{ijkl}(t,\tau)\kappa_{kl}(\tau)d\tau \tag{3.3}$$

$$\chi'_{ij} = \int_0^t X'_{ijkl}(t,\tau)\kappa_{kl}(\tau)d\tau + \int_0^t x'_{ijkl}(t,\tau)u_{k,l}(\tau)d\tau \tag{3.4}$$

Определяющие соотношения (3.1), (3.2) можно легко обратить, т.е. выразить величины $u_{i,j}$ и κ_{ij} через σ_{ij}, μ_{ij}.

Гораздо сложнее обстоит дело с нелинейными определяющими соотношениями. Их обзор (для неполярных сред) дан, например, в работах [7, 9–11]. Самой общей формой записи физически нелинейных операторов вязкоупругой среды является кратно-интегральный ряд Вольтерры [9]. Эти соотношения являются достаточно сложными и не всегда адекватными, т.е. содержат больше неизвестных материальных функций, чем можно определить экспериментально.

Для того, чтобы сделать такие теории адекватными, пользуются известными упрощениями теории нелинейной вязкоупругости, подробно изложенными, например, в работах [9, 11] – главной нелинейной, квазилинейной и главной квазилинейной теориями вязкоупругости. Иногда в этих трех теориях можно дополнительно вводить следующие упрощения: из бесконечного ряда берется линейное и только одно нелинейное слагаемое, например, $n = 1$ и $n = 3$; объемные деформации считаются упругими; упругие деформации принимаются линейными. Можно сделать следующие выводы по сравнению данных теорий: кратно-интегральная запись учитывает взаимное влияние напряжений разных моментов времен на деформации, чего нет при использовании физически нелинейных соотношений в форме однократных интегралов. Следствием этого является то, что в случае кратно-интегральной записи теоретические кривые деформаций быстрее следуют за изменением напряжений по сравнению с записью однократными интегралами, что точнее описывает многие эксперименты. Кроме того, главные нелинейные теории релаксации и ползучести, вообще говоря, не являются взаимообратными [9].

Поэтому в работах [6, 7] было предложено новое представление нелинейной связи между напряжениями и деформациями в теории вязкоупругости. Такая теория является адекватной, а в работе [12] показано на примере одномерного случая, что определяющие соотношения теории релаксации и ползучести для нее являются взаимообратными.

Запишем эти определяющие соотношения для "общего" случая полярной среды:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \int_0^t \Gamma_{ijklmn}(t,\tau)u_{k,l}(\tau)p_{mn}(t,\tau)d\tau + \int_0^t \gamma_{ijklmn}(t,\tau)\kappa_{kl}(\tau)p'_{mn}(t,\tau)d\tau + \\ &+ \int_0^t V_{ijklmn}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)q_{mn}(t,\tau)d\tau + \int_0^t \upsilon_{ijklmn}(t,\tau)\chi'_{kl}(\tau)q'_{mn}(t,\tau)d\tau \\ \mu_{ij} &= \int_0^t \Gamma_{ijklmn}(t,\tau)\kappa_{k,l}(\tau)p'_{mn}(t,\tau)d\tau + \int_0^t \gamma'_{ijklmn}(t,\tau)u_{k,l}(\tau)p_{mn}(t,\tau)d\tau +\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$+\int_0^t V'_{ijklmn}(t,\tau)\chi'_{k,l}(\tau)q'_{mn}(t,\tau)d\tau+\int_0^t \upsilon'_{ijklmn}(t,\tau)\chi_{kl}(\tau)q_{mn}(t,\tau)d\tau \tag{3.6}$$

При этом

$$p_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [A_{mnpq}(t,\xi)u_{p,q}(\xi)+B_{mnpq}(t,\xi)\kappa_{p,q}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.7}$$

$$p'_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [B'_{mnpq}(t,\xi)\kappa_{p,q}(\xi)+A'_{mnpq}(t,\xi)u_{p,q}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.8}$$

$$q_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [C_{mnpq}(t,\xi)\chi_{pq}(\xi)+D_{mnpq}(t,\xi)\chi'_{p,q}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.9}$$

$$q'_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [D'_{mnpq}(t,\xi)\chi'_{p,q}(\xi)+C'_{mnpq}(t,\xi)\chi'_{pq}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.10}$$

Тензоры повреждаемости χ и χ' связаны с кинематическими характеристиками соотношениями

$$\chi_{ij} = \int_0^t X_{ijklmn}(t,\tau)u_{k,l}(\tau)r_{mn}(t,\tau)d\tau+\int_0^t x_{ijklmn}(t,\tau)\kappa_{kl}(\tau)r'_{mn}(t,\tau)d\tau \tag{3.11}$$

$$\chi'_{ij} = \int_0^t X'_{ijklmn}(t,\tau)\kappa_{kl}(\tau)s'_{mn}(t,\tau)d\tau+\int_0^t x'_{ijklmn}(t,\tau)u_{k,l}(\tau)s'_{mn}(t,\tau)d\tau \tag{3.12}$$

При этом

$$r_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [Y_{mnpq}(t,\xi)u_{p,q}(\xi)+Z_{mnpq}(t,\xi)\kappa_{pq}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.13}$$

$$r'_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [Z'_{mnpq}(t,\xi)\kappa_{pq}(\xi)+Y'_{mnpq}(t,\xi)u_{p,q}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.14}$$

$$s_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [y_{mnpq}(t,\xi)u_{p,q}(\xi)+z_{mnpq}(t,\xi)\kappa_{pq}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.15}$$

$$s'_{mn}(t,\tau) = \left\{\delta_{mn}-\alpha\int_0^\tau [z'_{mnpq}(t,\xi)\kappa_{pq}(\xi)+y'_{mnpq}(t,\xi)u_{p,q}(\xi)]d\xi\right\}^{-1} \tag{3.16}$$

Здесь $\{\,\}^{-1}$ обозначает тензор, обратный тензору, заключенному в квадратные скобки, Γ, Γ', γ, γ', V, V', υ, υ', X, X', x, x' – материальные тензоры шестого ранга, а A, A', B, B', C, C', D, D', Y, Y', Z, Z', y, y', z, z' – тензоры четвертого ранга. Все эти тензоры должны быть инвариантными относительно некоторой группы преобразований. Для изотропной среды тензоры шестого ранга имеют три независимые компоненты, а тензоры четвертого ранга две. В соотношениях (3.7)–(3.10), (3.13)–(3.16) α – некоторый малый параметр, который при выборе модели среды может находиться экспериментально. Раскладывая соотношения (3.5)–(3.16) в ряды по малому параметру α, можно построить кратно-интегральные ряды Вольтерры. Полагая в соотношениях $\alpha = 0$ получим соотношения (3.1)–(3.4) линейной теории. В работе [3] для нее в случае неполярной трансверсально-изотропной среды построены схемы экспериментального определения всех необходимых материальных функций.

4. Заключение. Используя проанализированные выше определяющие соотношения, квазистатическая задача механики композитов с вязкоупругими компонентами решается методом осреднения [7]. При этом только задача "нулевого приближения" является нелинейной. Все остальные приближения находятся из решения линейных задач. Ядра ползучести и релаксации, используемые при решении всех приближений, определяются экспериментально с помощью разработанного авторами метода "канонических операторов".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Моделирование структуры в механике сплошной среды // Изв. ВУЗов Сев.-Кавказ. рег. 2001. Спецвыпуск. С. 1–4.
2. *Победря Б.Е.* Элементы структурной механики деформируемого твердого тела // Математическое моделирование систем и процессов. 1996. № 4. С. 66–73.
3. *Победря Б.Е.* Об учете структурных изменений в механике композитов // Конструкции из композит. матер. 2000. Вып. 2. С. 19–25.
4. *Победря Б.Е., Родригес А.* О моделях повреждаемости реономных регулярных структур // Математическое моделирование систем и процессов. 2001. № 9. С. 136–146.
5. *Победря Б.Е., Родригес А.* Моделирование структуры в механике композитов // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37. № 5/6. С. 709–730.
6. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. 368 с.
7. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
8. *Победря Б.Е.* Статическая задача несимметричной теории упругости для изотропной среды // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. № 1. С. 54–59.
9. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
10. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1970. 328 с.
11. *Победря Б.Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 18–29.
12. *Вакулюк В.В., Победря Б.Е.* О нелинейной теории вязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 49–55.

Москва

Поступила в редакцию
2.10.2005