МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2006

УДК 539.3

 В.В. КЛИНДУХОВ

ВДАВЛИВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ШТАМПА В НЕОДНОРОДНЫЙ ПО ГЛУБИНЕ СЛОЙ

Рассматривается осесимметричная контактная задача для упругого слоя, лежащего на жестком основании, модули упругости которого изменяются по глубине по экспоненциальному закону. Задача сведена к интегральному уравнению первого рода относительно контактного давления под штампом. Решение интегрального уравнения искалось в виде ряда по полиномам Лежандра [1]. Приведены некоторые численные результаты.

1. Равновесие неоднородного слоя на жестком основании под действием осесимметричной распределенной нагрузки. Рассмотрим слой толщиной h, лежащий на упругом основании. Механические характеристики слоя меняются с глубиной по закону:

$$\lambda = \lambda_0 e^{\kappa z}, \quad \mu = \mu_0 e^{\kappa z} \tag{1.1}$$

Предполагая, что λ и μ связаны условием $\lambda = 2\mu\nu/(1-\nu)$, приходим к выводу, что экспоненциально с глубиной меняется лишь модуль сдвига μ при постоянном коэффициенте Пуассона ν. Пусть верхняя грань слоя нагружена в круге радиуса a осесимметричным распределенным давлением $q(r)$ (фиг. 1). Рассмотрим следующие две задачи о равновесии слоя под действием указанной нагрузки:

задача **A** (слой лежит свободно на гладком жестком основании):

$$w = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.2}$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad \sigma_z = -\tilde{q}(r) \text{ при } z = h \tag{1.3}$$

задача **B** (слой жестко сцеплен с основанием):

$$u = 0, \quad w = 0 \text{ при } z = 0 \tag{1.4}$$

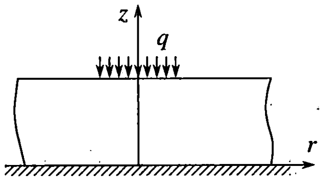
$$\tau_{rz} = 0, \quad \sigma_z = -\tilde{q}(r) \text{ при } z = h \tag{1.5}$$

Здесь τ_{rz}, σ_z – касательные и нормальные напряжения

$$\begin{gathered}\tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad \sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\vartheta \\ \vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z}\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\tilde{q}(r) = q(r) \; (r \le a), \quad \tilde{q}(r) = 0 \; (r > a) \tag{1.7}$$

где u, w – перемещения, соответственно, по осям r и z.



Фиг. 1

Как показано в [2], задача сводится к решению следующей системы уравнений Ламе:

$$\tilde{\nabla}^2 u + k_0\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \kappa\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0$$

$$\nabla^2 w + k_0\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \kappa\left[2\frac{\partial w}{\partial z} + (k_0 - 1)\vartheta\right] = 0 \tag{1.8}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad \tilde{\nabla}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{r^2},\quad k_0 = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_0}$$

В свою очередь, общее решение уравнений (1.8) можно выразить через одну функцию χ удовлетворяющую уравнению

$$\frac{(k_0+1)}{k_0}\nabla^4\chi + \frac{\kappa}{k_0}\left[\kappa(1-k_0) + 2(1+k_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]\nabla^2\chi + 2\kappa^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi = 0 \tag{1.9}$$

и представить в виде

$$u = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\kappa}{k_0}\right)\chi,\quad w = \left[\left(1 + \frac{1}{k_0}\right)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\kappa}{k_0}\frac{\partial}{\partial z}\right]\chi \tag{1.10}$$

Таким образом приходим к двум краевым задачам для упругого неоднородного слоя ($0 \le z \le h$): задаче **А** (1.2), (1.3), (1.9), (1.10) и задаче **В** (1.4), (1.5), (1.9), (1.10). Краевые задачи **А** и **В** для системы уравнений (1.8) относительно функции χ могут быть решены с помощью преобразования Ханкеля

$$\chi(r, z) = \int_0^\infty X(\alpha, z)\alpha J_0(\alpha r)d\alpha \tag{1.11}$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя. Подставляя (1.11) в уравнение (1.9) получим относительно функции $X(\alpha, z)$ обыкновенное дифференциальное уравнение из которого определим и саму функцию $X(\alpha, z)$:

$$X(\alpha, z) = e^{-\kappa z/2}[C_1(\alpha)e^{-a_\alpha z}\sin b_\alpha z + C_2(\alpha)e^{-a_\alpha z}\cos b_\alpha z +$$

$$+ C_3(\alpha)e^{a_\alpha z}\sin b_\alpha z + C_4(\alpha)e^{a_\alpha z}\cos b_\alpha z]$$

$$a_\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}+c}{8}},\quad b_\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{c^2+d^2}-c}{8}} \tag{1.12}$$

$$c = \kappa^2 + 4\alpha^2,\quad d = 4l\kappa\alpha,\quad l = \sqrt{\frac{k_0-1}{k_0+1}}$$

Применив к граничным условиям задач **А** (1.2), (1.3) или **В** (1.4), (1.5) интегральное преобразование Ханкеля, получим систему линейных уравнений (различных для задач **А** и **В**) относительно функций $C_i(\alpha)$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Определив $C_i(\alpha)$, для нормального перемещения верхней границы слоя получим выражение

$$w(r, H) = -\frac{1}{\theta h}\int_0^a q(\rho)\rho d\rho\int_0^\infty L(u)J_0\left(\frac{u\rho}{h}\right)J_0\left(\frac{ur}{h}\right)du, \quad \theta = \frac{\mu(h)}{1-\nu} \tag{1.13}$$

где функция $L(u)$ зависит от механических характеристик слоя, а также от условий контакта слоя с основанием, является непрерывной при всех $0 \le u \le \infty$ и для обеих задач **А** и **В** удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} L(u) &= 1 + \frac{2-\nu}{2(1-\nu)}\frac{\beta}{u} + \frac{5}{8(1-\nu)}\frac{\beta^2}{u^2} + O(u^{-3})\ (u \to \infty) \\ L(u) &= Au + O(u^3)\ (u \to 0, A = \text{const}), \quad \beta = \kappa h \end{aligned} \tag{1.14}$$

Само выражение для функции $L(u)$ очень громоздкое и в целях краткости не приводится.

2. Постановка контактной задачи. Рассмотрим осесимметричную задачу о вдавливании в неоднородный слой силой P гладкого жесткого штампа. Условие контакта штампа с поверхностью слоя имеет вид

$$w(r, h) = -[\delta - f(r)] \ (0 \le r \le a) \tag{2.1}$$

где δ – поступательное перемещение штампа по оси z под действием приложенной к нему вдавливающей силы P; $f(r)$ – функция, описывающая форму основания штампа.

Заменив вторые граничные условия в (1.3) и (1.5) условием (2.1), получим две краевые задачи (2.1), (1.2), (1.3), (1.9), (1.10) и (2.1), (1.4), (1.5), (1.9), (1.10) со смешанными граничными условиями, которые будем по-прежнему называть задачами **А** и **В** (контактными).

Удовлетворив условию контакта (2.1) с помощью соотношения (1.13), получим относительно контактного давления $q(r)$ интегральное уравнение первого рода с симметричным ядром

$$\begin{aligned} &\int_0^a q(\rho)K\left(\frac{\rho}{h}, \frac{r}{h}\right)\rho d\rho = \theta h[\delta - f(r)] \ (0 \le r \le a) \\ &K(\sigma, \tau) = \int_0^\infty L(u)J_0(\sigma u)J_0(\tau u)du \end{aligned} \tag{2.2}$$

К уравнению (2.2) необходимо добавить условие равновесия штампа

$$P = 2\pi\int_0^a q(\rho)\rho d\rho \tag{2.3}$$

которое дает связь между вдавливающей силой P и внедрением штампа δ. В тех случаях, когда радиус a области контакта заранее неизвестен, его можно определить из условия

$$q(a) = 0 \tag{2.4}$$

3. Метод решения и численные результаты. Из соотношений (1.14) следует, что ядро $K(\sigma, \tau)$ интегрального уравнения (2.2) имеет логарифмическую особенность при $\sigma \to \tau$ и, следовательно, интегральное уравнение первого рода (2.2) по известной схеме [3] можно свести к интегральному уравнению второго рода с разностным ядром

$$p(x) - \frac{1}{\pi h}\int_{-a}^{a} p(\xi) M\left(\frac{\xi - x}{h}\right) d\xi = \theta g(x) \quad (|x| \le a)$$
$$M(y) = \int_{-a}^{a} [1 - L(u)] \cos uy du \tag{3.1}$$

где функции $p(x)$ и $g(x)$ – четные и связаны с функциями $q(r)$ и $\delta(r) = \delta - f(r)$ соотношениями

$$q(r) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{p(a)}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \int_r^a \frac{p'(\xi) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\right], \quad g(x) = \delta(0) + |x| \int_0^{|x|} \frac{\delta'(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \tag{3.2}$$

Решение интегрального уравнения (3.1) будем искать в виде ряда по четным полиномам Лежандра

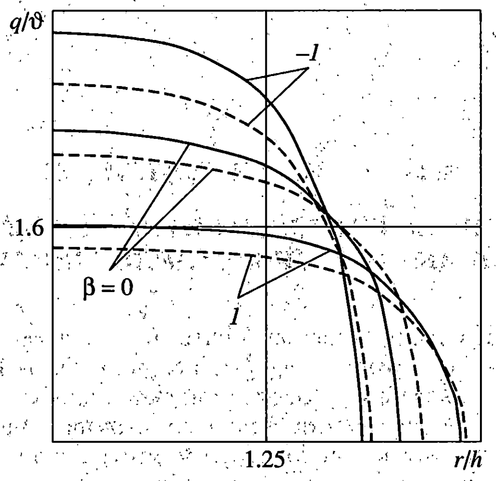
$$p(x) = \theta a \sum_{i=0}^{\infty} a_i P_{2i}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.1), умножая почленно на $P_{2k}(x/a)dx$ и интегрируя затем от $-a$ до a, с учетом ортогональности полиномов Лежандра получим [1] бесконечную алгебраическую систему

$$\frac{2}{4k+1} a_k - \frac{1}{\pi\lambda}\sum_{i=0}^{\infty} a_i I_{ik}(\lambda) = b_k \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$
$$I_{ik}(\lambda) = 2\pi\lambda(-1)^{i+k}\int_0^{\infty} [1 - L(u)] J_{2i+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2k+1/2}\left(\frac{u}{\lambda}\right)\frac{du}{u} \tag{3.4}$$
$$b_k = \frac{1}{a^2}\int_{-a}^{a} g(x) P_{2k}\left(\frac{x}{a}\right) dx, \quad \lambda = \frac{h}{a}$$

Система (3.4) при достаточной гладкости $\delta(r)$ квази–вполне регулярна при всех значениях безразмерного параметра $\lambda \in (0, \infty)$ и поэтому может решаться методом редукции [4]. После нахождения функции $p(x)$ из первого соотношения (3.2) получим

$$q(r) = \frac{2\theta a}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty} a_i \left\{\frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \frac{1}{a}\sum_{m=0}^{i-1} (-1)^{i-m-1} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(4i - 4m - 1)(2i - 2m - 2)!!}{(2i - 2m - 1)!!} P_{2i-2m-1}\left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\right)\right\} \tag{3.5}$$



Фиг. 2

Условия (2.3) и (2.4) примут вид

$$P = 4\theta a^2 a_0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0$$

В качестве примеров рассмотрены случаи внедрения в слой параболического штампа ($\delta(r) = \delta - r^2/(2R)$, R – радиус кривизны параболы в вершине, радиус a области контакта заранее неизвестен). На фиг. 2 представлены графики распределения контактного давления при одном и том же значении безразмерного параметра $\phi = P/(\theta h^2) = 3.098$ при различных значениях параметра $\beta = \kappa h$ для задачи **А** (штриховые кривые) и для задачи **В** (сплошные кривые).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00002), РФФИ и администрации Краснодарского края (грант 03-01-96551) и Минобразования (грант УР.04-03-060).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Клиндухов В.В.* Новый вариант метода ортогональных многочленов для осесимметричных контактных задач // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1998. № 4. С. 66–68.
2. *Попов Г.Я.* К теории изгиба плит на упругом неоднородном полупространстве // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1959. № 11–12. С. 11–19.
3. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
4. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 695 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.11.2004