

© 2006 г. Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

ЗАДАЧА ПРАНДТЛЯ ДЛЯ СЛАБОНЕОДНОРОДНОГО ПО ПРЕДЕЛУ ТЕКУЧЕСТИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Исследование чувствительности параметров деформирования к возмущениям материальных функций играет важную теоретическую и практическую роль в задачах механики сплошной среды особенно со смешанными граничными условиями [1].

Постановка задачи для неоднородной сплошной среды при эйлеровом описании движения помимо прочего включает в себя нахождение закона движения лагранжевых частиц вдоль своих траекторий и обращение этого закона. В случае, когда в начальный момент времени материальные функции в неоднородном материале мало отличаются от некоторых известных распределений (в частности, констант), можно применять асимптотический метод [2]. Этот метод апробируется на примере решения задачи о сдавливании жесткими плитами слабонеоднородного по пределу текучести тонкого идеально пластического слоя. В качестве основного процесса выбирается квазистатическое деформирование однородной среды, соответствующее решению Прандтля. Для возмущений формулируется линеаризованная начально-краевая задача, которая в некоторых частных случаях начальной неоднородности решается аналитически.

1. Замкнутые системы для неоднородного плоского идеально пластического течения. Пусть плоская область $\Omega, \subseteq R^2$ занята несжимаемым идеально пластическим материалом с пределом текучести σ_s , зависящим от эйлеровых координат $x \in \Omega$, и времени t . Массовые силы отсутствуют. Рассмотрим квазистатическое течение данного материала при $t > 0$; для удобства изложения будем использовать индексную запись в декартовых координатах x_i , причем большие латинские индексы меняются от 1 до 2.

В случае плоской деформации имеем [3–9] два уравнения квазистатического равновесия

$$-p_{,i} + s_{ij,j} = 0 \quad (1.1)$$

условие несжимаемости

$$v_{i,i} = 0 \quad (1.2)$$

квадратичное условие пластичности Мизеса–Генки

$$\sigma_u \equiv \sqrt{2(s_{11}^2 + s_{12}^2)} = \sigma_s \quad (1.3)$$

а также условие соосности девиатора s тензора напряжений σ и тензора скоростей деформации v , совпадающего в силу (1.2) со своим девиатором,

$$s_{11} = \sigma_s v_{11}/v_u, \quad v_u = \sqrt{2(v_{11}^2 + v_{12}^2)} \quad (1.4)$$

где p – давление, v – вектор скорости, v_u – интенсивность скоростей деформации.

Положим, что физико-механические свойства среды в каждой точке пространства x в момент t являются свойствами лагранжевой частицы, которая находится в этот момент времени в этой точке пространства. Так как закон движения или траектории частиц заранее неизвестны, то единственная материальная функция идеально пластического материала (предел текучести) неизвестным образом зависит от x и t :

$$\sigma_s(x, t) = \sigma_s(x_0, 0) \equiv \Sigma(x_0) \quad (1.5)$$

Тогда к равенствам (1.1)–(1.5) необходимо добавить два уравнения

$$dx_i/dt = v_i(x, t), \quad x_i(0) = x_{i0} \quad (1.6)$$

для определения закона движения частиц, обращая который, можно найти обратный закон движения

$$x_0 = x_0(x, t) \quad (1.7)$$

и подставить его в (1.5), так что функция $\sigma_s(x, t) = \Sigma(x_0(x, t))$ станет известной.

Замкнутая система в области Ω , будет насчитывать семь уравнений (1.1)–(1.6) относительно семи неизвестных функций $p, s_{11}, s_{12}, v_1, v_2, x_1(t), x_2(t)$. Заметим, что, вообще говоря, нельзя сначала решить подсистему пяти уравнений (1.1)–(1.5) относительно $p, s_{11}, s_{12}, v_1, v_2$, а затем, зная скорость, проинтегрировать подсистему обыкновенных уравнений (1.6) из-за того, что предел текучести σ_s , входящий в (1.3) и (1.4), неизвестен и находится только с привлечением обратного закона движения (1.7).

Уравнения в плоской области Ω , должны быть дополнены граничными условиями на контуре $\Gamma = \partial\Omega$, и, возможно, начальными условиями для формулировки начально-краевой задачи неоднородного плоского идеально пластического течения.

При отсутствующих массовых силах для описания напряженного состояния удобно использовать функцию напряжений $\Phi(x, t)$:

$$p = \Delta\Phi, \quad s_{11} = -s_{22} = \Phi_{,11} - \Phi_{,22} \equiv -L\Phi, \quad s_{12} = 2\Phi_{,12} \equiv M\Phi \quad (1.8)$$

а для описания картины течения функцию тока $\psi(x, t)$:

$$v_1 = \Psi_{,2}, \quad v_2 = -\Psi_{,1}, \quad v_{11} = -v_{22} \equiv M\Psi/2, \quad v_{12} = L\Psi/2 \quad (1.9)$$

где введены линейные дифференциальные операторы второго порядка [10]:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad M = 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L^2 + M^2 = \Delta^2 \quad (1.10)$$

При подстановке (1.8) в (1.1) и (1.9) в (1.2) три равенства (1.1) и (1.2) удовлетворяют тождественно. Из условия пластичности (1.3) следует нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка на Φ :

$$(L\Phi)^2 + (M\Phi)^2 = \sigma_s^2/2 \quad (1.11)$$

а из (1.4) имеем связь функций Φ и ψ :

$$L\Phi = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{2((L\psi)^2 + (M\psi)^2)}} M\psi \quad (1.12)$$

Уравнения (1.6) для определения закона движения сведутся к следующим:

$$dx_1/dt = \Psi_{,2}, \quad dx_2/dt = -\Psi_{,1}, \quad x_i(0) = x_{i0} \quad (1.13)$$

Математически уравнения (1.13) идентичны каноническим уравнениям Гамильтона для системы с одной степенью свободы, причем в качестве функции Гамильтона выступает функция тока (поэтому ее иногда называют "гамильтонианом"), а в качестве обобщенных координаты и импульса декартовы координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Уравнения (1.13) справедливы не только для идеально пластического, но и для любого плоского несжимаемого течения сплошной среды. Поэтому некоторые качественные выводы гамильтоновой механики приложимы в задачах о плоском деформировании сплошной среды [11].

Итак, в терминах функции напряжения и функции тока система уравнений в плоской области Ω , состоит из четырех уравнений (1.11)–(1.13), которые включают четыре неизвестные: $\Phi(x, t)$, $\Psi(x, t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$. Предел текучести $\sigma_s(x, t)$ в (1.11) и (1.12) определяется начальным распределением (1.5) и обратным законом движения (1.7).

Известна и другая параметризация напряженного состояния в плоском идеально пластическом течении, связанная с тождественным удовлетворением условия пластичности (1.3):

$$s_{11} = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi, \quad s_{12} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} \cos 2\varphi, \quad \varphi \in [0; \pi[\quad (1.14)$$

Тогда, дифференцируя по x_2 уравнение равновесия (1.1) при $I = 1$, вычитая из него продифференцированное по x_1 уравнение (1.1) при $I = 2$ и подставляя (1.14), приходим к нелинейному уравнению

$$L(\sigma_s \cos 2\varphi) = M(\sigma_s \sin 2\varphi) \quad (1.15)$$

Если материал однороден по пределу текучести, то (1.15) представляет собой единственное и не зависящее от σ_s уравнение относительно $\varphi(x, t)$. Его можно назвать универсальным уравнением плоской теории идеальной пластичности. Если к тому же граничные условия поставлены в напряжениях, то задача статически определима. После нахождения функции $\varphi(x, t)$ – угла между площадкой с максимальным касательным напряжением (или между линией скольжения, проходящей через данную точку) и одной из осей декартовой системы координат – кинематика течения описывается единственным уравнением относительно функции тока

$$M\Psi = -\sqrt{(L\Psi)^2 + (M\Psi)^2} \sin 2\varphi \quad (1.16)$$

Для неоднородного по пределу текучести материала задачи для определения напряженного состояния и кинематики не разделяются. В этом случае необходимо найти четыре функции φ , Ψ , $x_1(t)$, $x_2(t)$ из четырех уравнений (1.15), (1.16), (1.13), где опять же предел текучести в (1.15) задается начальным распределением (1.5) и обратным законом движения (1.7).

2. Линеаризованные замкнутые системы для слабонеоднородного плоского идеально пластического течения. Предел текучести σ_s является заранее неизвестной функцией эйлеровых координат и времени и находится на основании обратного закона движения. Это делает задачу о неоднородном идеально пластическом течении довольно сложной.

Если предел текучести $\Sigma(\mathbf{x}_0)$ в начальном распределении (1.5) мало отличается от некоторой функции $\Sigma^0(\mathbf{x}_0)$:

$$\Sigma(\mathbf{x}_0) = \Sigma^0(\mathbf{x}_0) + \alpha \Sigma^1(\mathbf{x}_0) + \dots$$

$$\alpha = \sup_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} \frac{\|\Sigma(\mathbf{x}_0) - \Sigma^0(\mathbf{x}_0)\|}{\|\Sigma^0(\mathbf{x}_0)\|} \ll 1 \quad (2.1)$$

где $\Sigma^0(\mathbf{x}_0)$, $\Sigma^1(\mathbf{x}_0)$, ... известны, то можно применить асимптотический подход, основанный на разложении в ряды по малому параметру α всех неизвестных величин [2]:

$$s_{IJ} = s_{IJ}^0 + \alpha s_{IJ}^1 + \dots, \quad p = p^0 + \alpha p^1 + \dots \quad (2.2)$$

$$v_I = v_I^0 + \alpha v_I^1 + \dots, \quad v_{IJ} = v_{IJ}^0 + \alpha v_{IJ}^1 + \dots$$

Прямой и обратный законы движения также представляются в виде рядов

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{X}^0(\mathbf{x}_0, t) + \alpha \mathbf{X}^1(\mathbf{x}_0, t) + \dots \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t) + \alpha \mathbf{X}_0^1(\mathbf{x}, t) + \dots$$

С учетом (2.3) каждый из известных коэффициентов ряда (2.1) разлагается в ряд Тейлора, например

$$\Sigma^n(\mathbf{x}_0) = \Sigma^n(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)) + \alpha \frac{\partial \Sigma^n}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) + O(\alpha^2) \quad (2.4)$$

Если в нулевом по α приближении функция $\Sigma^0(\mathbf{x}_0)$ является постоянной ($\Sigma^0(\mathbf{x}_0) \equiv \sigma_s$), то речь идет о слабонеоднородной в узком смысле среде. Для общности будем полагать, что $\Sigma^0(\mathbf{x}_0)$ может быть не равной тождественно константе, и называть такую среду слабонеоднородной в широком смысле.

Подставим разложения (2.1)–(2.4) во все уравнения (1.1)–(1.14), (1.6). Постановка задачи нулевого приближения (для величин с верхним нулевым индексом) совпадет с постановкой задачи, сформулированной в п. 1. Для величин же с верхним индексом 1 имеем линеаризованную систему уравнений в области Ω_1 :

$$-p_I^1 + s_{IJ,J}^1 = 0 \quad (2.5)$$

$$v_{I,I}^1 = 0 \quad (2.6)$$

$$2(s_{11}^0 s_{11}^1 + s_{12}^0 s_{12}^1) = \Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \quad (2.7)$$

$$s_{11}^1 = \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \frac{v_{11}^0}{v_u^0} + \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{v_u^0} v_{11}^1 - \frac{2\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{v_u^0} v_{11}^0 (v_{11}^0 v_{11}^1 + v_{12}^0 v_{12}^1) \quad (2.8)$$

$$\frac{dX_I^1}{dt} = v_I^1(\mathbf{X}^0, t) + \frac{\partial v_I^0}{\partial x_J}(\mathbf{X}^0, t) X_J^1(t), \quad X_I^1(0) = 0 \quad (2.9)$$

Эта система включает в себя семь уравнений относительно неизвестных p^1 , s_{11}^1 , s_{22}^1 , v_1^1 , v_2^1 , $X_1^1(t)$, $X_2^1(t)$. В случае слабой неоднородности в широком смысле от нее не отделяется подсистема (2.5)–(2.8), так как в (2.7) и (2.8) присутствует вектор $\mathbf{X}_0^1(t)$. Если

же $\Sigma^0(\mathbf{x}_0) \equiv \sigma_s^0 = \text{const}$ (слабая неоднородность в узком смысле), то последнее слагаемое в правой части (2.7) отсутствует, и можно решать подсистему (2.5)–(2.8) без нахождения поправок к закону движения, после чего проинтегрировать уравнения (2.9) с известными правыми частями [9].

Системе (1.11)–(1.13) относительно функции напряжения Φ , функции тока ψ и координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ соответствует линеаризованная система четырех уравнений

$$2(L\Phi^0 L\Phi^1 + M\Phi^0 M\Phi^1) = \Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} -L\Phi^1 &= \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \frac{M\psi^0}{2v_u^0} + \\ &+ \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{2v_u^0} M\psi^1 - \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{4v_u^{0^3}} M\psi^0 (L\psi^0 L\psi^1 + M\psi^0 M\psi^1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$v_u^0 = \sqrt{((L\psi^0)^2 + (M\psi^0)^2)/2}$$

$$\frac{dX_1^1}{dt} = \psi_{,2}^1(\mathbf{X}^0, t) + \frac{\partial \psi_{,2}^0}{\partial x_j}(\mathbf{X}^0, t) X_j^1(t) \quad (2.12)$$

$$\frac{dX_2^1}{dt} = -\psi_{,1}^1(\mathbf{X}^0, t) - \frac{\partial \psi_{,1}^0}{\partial x_j}(\mathbf{X}^0, t) X_j^1(t), \quad X_I^1(0) = 0$$

относительно четырех неизвестных Φ^1 , ψ^1 , $X_1^1(t)$, $X_2^1(t)$.

Из системы (1.15), (1.16), (1.13) относительно угла φ , функций тока ψ и координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ следует линеаризованная система, содержащая уравнения

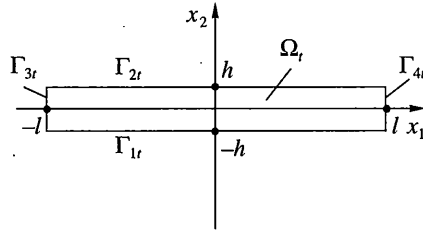
$$L \left[\left(\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right) \cos 2\varphi^0 - \right. \quad (2.13)$$

$$\left. - 2\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \varphi^1 \sin 2\varphi^0 \right] = M \left[\left(\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right) \sin 2\varphi^0 + 2\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \varphi^1 \cos 2\varphi^0 \right]$$

$$M\psi^1 = -2\sqrt{(L\psi^0)^2 + (M\psi^0)^2} \varphi^1 \cos 2\varphi^0 - \frac{L\psi^0 L\psi^1 + M\psi^0 M\psi^1}{\sqrt{(L\psi^0)^2 + (M\psi^0)^2}} \sin 2\varphi^0 \quad (2.14)$$

а также уравнения (2.12). В число неизвестных входят четыре функции: φ^1 , ψ^1 , $X_1^1(t)$, $X_2^1(t)$.

3. Классическое решение Прандтля и границы его применимости. Выберем в качестве основного невозмущенного процесса, параметры которого в п. 2 помечались верхним нулевым индексом, классическое решение задачи Прандтля о сдавливании тонкого однородного идеально пластического слоя с пределом текучести Σ^0 шероховатыми плитами, движущимися каждая с постоянной скоростью v_0 навстречу друг другу.



Фиг. 1

Квазистатическое течение происходит в плоской области $\Omega_t = \{-l(t) < x_1 < l(t), -h(t) < x_2 < h(t)\}$ с границей $\partial\Omega_t = \Gamma_t = \Gamma_{1t} \cup \Gamma_{2t} \cup \Gamma_{3t} \cup \Gamma_{4t}$ (фиг. 1), причем $h \ll l$. В начальный момент область, занятая материалом, имела вид $\Omega_0 = \{-l_0(t) < x_1 < l_0(t), -h_0(t) < x_2 < h_0(t)\}$, $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$, так что в силу несжимаемости $lh = l_0h_0$.

Кинематические условия в задаче Прандтля задаются на отрезках Γ_{1t} и Γ_{2t} :

$$v_2|_{\Gamma_{1t}} = v_0, \quad v_2|_{\Gamma_{2t}} = -v_0 \quad (3.1)$$

Одних условий (3.1) на каждой из границ Γ_{1t} и Γ_{2t} недостаточно, поэтому решение ищется в предположении о том, что касательное напряжение s_{12} достигает своего максимального по модулю значения на поверхностях шероховатых плит (гипотеза Прандтля). Из условия пластичности (1.3) следует, что это максимальное значение равно $\Sigma^0/\sqrt{2}$. Таким образом,

$$|s_{12}|_{\Gamma_{1t}} = |s_{12}|_{\Gamma_{2t}} = \Sigma^0/\sqrt{2} \quad (3.2)$$

Системе уравнений плоской идеальной пластичности (1.1)–(1.4) в области Ω_t с граничными условиями (3.1), (3.2) удовлетворяют следующие поля скоростей $v_i(x_1, x_2)$:

$$v_1 = \frac{v_0}{h}(x_1 + 2s\sqrt{h^2 - x_2^2}), \quad v_2 = -\frac{v_0}{h}x_2, \quad s = \text{sign} x_1 \quad (3.3)$$

скоростей деформаций $v_{ij}(x_1, x_2)$:

$$v_{11} = -v_{22} = \frac{v_0}{h}, \quad v_{12} = \frac{v_0}{h} \frac{sx_2}{\sqrt{h^2 - x_2^2}} \quad (3.4)$$

девиатора напряжений $s_{ij}(x_1, x_2)$:

$$s_{11} = -s_{22} = \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}h} \sqrt{h^2 - x_2^2}, \quad s_{12} = -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}h} sx_2 \quad (3.5)$$

и давления $p(x_1, x_2)$:

$$p = p_0 - \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}h}(sx_1 + \sqrt{h^2 - x_2^2}), \quad p_0 = \text{const} \quad (3.6)$$

Компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij} = -p_{ij} + s_{ij}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -p_0 + \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}h}(sx_1 + 2\sqrt{h^2 - x_2^2}) \\ \sigma_{22} &= -p_0 + \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}h}sx_1, \quad \sigma_{12} = -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}h}sx_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции (3.3)–(3.7) таковы, что наряду с пространственными переменными (x_1, x_2) удобно рассматривать и другую пару независимых переменных (x_1, θ) , где

$$\theta = \arcsin \frac{x_2}{h}, \quad (\cdot)_{,2} = \frac{(\cdot)_{,\theta}}{h \cos \theta} \quad (3.8)$$

Тогда границы плит Γ_{1t} и Γ_{2t} соответствуют значениям $\theta = -\pi/2$ и $\theta = \pi/2$. В переменных (x_1, θ) выражения (3.3)–(3.7) переписутся следующим образом (обозначения функций для простоты оставим теми же):

$$v_1 = v_0(x_1/h + 2s \cos \theta), \quad v_2 = -v_0 \sin \theta \quad (3.9)$$

$$v_{11} = -v_{22} = v_0/h, \quad v_{12} = -(v_0/h) \operatorname{stg} \theta \quad (3.10)$$

$$s_{11} = -s_{22} = \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \cos \theta, \quad s_{12} = -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} s \sin \theta \quad (3.11)$$

$$p = p_0 - \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \left(\frac{s x_1}{h} + \cos \theta \right) \quad (3.12)$$

$$\sigma_{11} = -p_0 + \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \left(\frac{s x_1}{h} + 2 \cos \theta \right), \quad \sigma_{12} = -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} s \sin \theta \quad (3.13)$$

$$\sigma_{22} = -p_0 + \frac{\Sigma^0 s x_1}{\sqrt{2} h}$$

Наличие сигнатуры s говорит о разрыве решения (3.3)–(3.7) (или (3.9)–(3.13)) в сечении $x_1 = 0$ и о его физической реализуемости лишь вдали от этого сечения. Кроме того, не удастся точно удовлетворить условиям свободной границы на отрезках Γ_3 и Γ_4 , даже заменяя эти прямолинейные отрезки произвольными кривыми. Области вблизи них образуют зоны краевого эффекта. Реальное же течение вблизи сечений $x_1 = 0$ и $x_1 = \pm l$, т.е. на расстояниях от них порядка нескольких $h(t)$, претерпевает перестройку и характеризуется более сложной, чем (3.3) и (3.4) кинематикой.

Помимо геометрических рамок применимости классического решения Прандтля (3.3)–(3.7) существуют и физико-механические, связанные с требованием квазистатичности процесса сжатия слоя. Пользуясь тем, что $h(t) = h_0 - v_0 t$, найдем из (3.3) ускорения частиц

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{2v_0^2}{h^2} (x_1 + s \sqrt{h^2 - x_2^2}), \quad \frac{dv_2}{dt} \equiv 0 \quad (3.14)$$

и подставим (3.14) в условие квазистатичности

$$\rho \max_{x \in \Omega_t} \left| \frac{dv_1}{dt} \right| \ll \min_{x \in \Omega_t} |\sigma_{11,1}| = \frac{\Sigma^0}{h \sqrt{2}} \quad (3.15)$$

где ρ – плотность. В итоге придем к неравенству, связывающему параметры задачи,

$$\rho v_0^2 / \Sigma^0 \ll h(t) / l(t) \quad (3.16)$$

Таким образом, отношение текущей ширины слоя к длине должно быть, с одной стороны, много меньше единицы для правомерности приближения тонкого слоя (а

следовательно, понятий "вблизи" и "вдали" от сечения $x_1 = \text{const}$, но с другой стороны, много больше отношения динамического напора к пределу текучести. В частности, решение (3.3)–(3.7) уже неприменимо при $h(t) \rightarrow 0$, т.е. при $t \rightarrow t_\infty = h_0/v_0$, либо для сред близких к идеальной жидкости, где инерционными эффектами пренебречь нельзя.

Приведем другие кинематические и силовые характеристики течения, нечасто упоминаемые в специальной и учебной литературе. Закон движения частиц получается интегрированием системы (1.6) после подстановки в нее поля скоростей (3.3):

$$x_1(t) = \frac{h_0}{h} x_{10} + s v_0 t \left(1 + \frac{h_0}{h} \right) \frac{\sqrt{h_0^2 - x_{20}^2}}{h_0}, \quad x_2(t) = \frac{h}{h_0} x_{20} \quad (3.17)$$

Обращая соотношения (3.17), можно записать обратный закон движения (1.7):

$$x_{10} = \frac{h}{h_0} x_1 - s v_0 t \left(1 + \frac{h}{h_0} \right) \frac{\sqrt{h^2 - x_2^2}}{h}, \quad x_{20} = \frac{h_0}{h} x_2 \quad (3.18)$$

Выразим из второго соотношения (3.17) $h = h_0 x_2 / x_{20}$ и $v_0 t = h_0 (1 - x_2 / x_{20})$, $x_{20} \neq 0$ и подставим в первое. Получим, что траектории частиц на плоскости $(x_1; x_2)$ описываются двухпараметрическим семейством $(x_{10}, x_{20}) \in \Omega_0$:

$$x_1 = a x_2 + \frac{b}{x_2}, \quad a = -s \frac{\sqrt{h_0^2 - x_{20}^2}}{h_{20}}, \quad b = x_{20} (x_{10} + s \sqrt{h_0^2 - x_{20}^2}) \quad (3.19)$$

и лучом $x_2 = 0$, если $x_{20} = 0$. Так, из (3.19) видно, что частицы, лежавшие при $t = 0$ на поверхностях плит, остаются на них при $t > 0$ и движутся по гиперболам $x_1 x_2 = x_{10} x_{20}$.

Функция тока ψ , функция напряжений Φ , а также угол φ после интегрирования определяются из (1.9), (1.8) и (1.14) соответственно

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{v_0}{h} x_2 (x_1 + s \sqrt{h^2 - x_2^2}) + s v_0 h \arcsin \frac{x_2}{h} = \\ &= v_0 \sin \theta (x_1 + s h \cos \theta) + s v_0 h \theta \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\Phi = -\frac{\Sigma^0}{12\sqrt{2}h} s x_1 (x_1^2 + 3x_2^2) - \frac{\Sigma^0 h^2}{6\sqrt{2}} (3\theta \sin \theta + 3 \cos \theta - \cos^3 \theta) \quad (3.21)$$

$$\varphi = 3\pi/4 - s\theta/2 \quad (3.22)$$

Необходимо отметить результаты, обобщающие приведенное решение Прандтля на случай сжимаемости материала [12], упругой деформируемости плит, учета сил инерции [13] и других технологических особенностей процесса сжатия [14]¹.

4. Линеаризованная задача для слабонеоднородного течения Прандтля. Будем рассматривать классическое течение однородного идеально пластического материала с пределом текучести Σ^0 между жесткими сближающимися плитами, о котором шла речь в п. 3, в качестве основного (невозмущенного) процесса и пометать его параметры верхним нулевым индексом. Исследуем влияние слабой неоднородности – возмущения предела текучести (2.1) – на свойства решения. Для этого обратимся к линеаризованной системе уравнений (2.5)–(2.9).

¹ Современный обзор по данному направлению см. Соловьев Г.Х. Нестационарные задачи течения тонкого пластического слоя по деформируемым поверхностям // Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. М., 2004. 104 с.

Деформирование по-прежнему происходит в плоской области Ω_t с границей Γ_t . В терминах п. 2 имеем слабую неоднородность в узком смысле ($\Sigma^0 = \text{const}$), поэтому уравнения (2.7), (2.8) упростятся, так как в них не войдут компоненты $\text{grad}\Sigma^0$. Уравнения равновесия (2.5) и условие несжимаемости (2.6) останутся в прежней форме, а линейаризованные определяющие соотношения (2.7), (2.8) перепишем в виде

$$\sqrt{2}(s_{11}^1 \cos \theta - s s_{12}^1 \sin \theta) = \Sigma^1(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)) \quad (4.1)$$

$$\sqrt{2}s_{11}^1 = \Sigma^1(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)) \cos \theta + \frac{\Sigma^0 h}{v_0}(v_{11}^1 \sin \theta + s v_{12}^1 \cos \theta) \cos \theta \sin \theta \quad (4.2)$$

где возмущение Σ^1 считается заданной функцией, зависящей от x_1 и x_2 посредством обратного закона движения $\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)$ в основном процессе (3.18). Заметим, что из (4.1) и (4.2) автоматически следует второе линейаризованное условие соосности

$$\sqrt{2}s_{12}^1 = -s \Sigma^1(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)) \sin \theta + \frac{\Sigma^0 h}{v_0}(s v_{11}^1 \sin \theta + v_{12}^1 \cos \theta) \cos^2 \theta \quad (4.3)$$

Таким образом, от общей системы семи уравнений (2.5), (2.6), (4.1), (4.2), (2.9) относительно возмущений $p^1, s_{11}^1, v_{11}^1, X_I^1(t)$ можно отделить подсистему (2.5), (2.6), (4.1), (4.2) пяти уравнений относительно p^1, s_{11}^1, v_{11}^1 . После ее решения, зная v_{11}^1 и v_{12}^1 , можно найти поправку $\mathbf{X}^1(t)$ к закону движения, проинтегрировав линейную неоднородную систему уравнений (2.9), которая в данной задаче примет вид

$$\frac{dX_1^1}{dt} = \frac{v_0}{h} \left(X_1^1 - \frac{2s x_{20}}{\sqrt{h_0^2 - x_{20}^2}} X_2^1 \right) + v_{11}^1(\mathbf{X}^0(\mathbf{x}_0, t), t) \quad (4.4)$$

$$\frac{dX_2^1}{dt} = -\frac{v_0}{h} X_2^1 + v_{12}^1(\mathbf{X}^0(\mathbf{x}_0, t), t), \quad X_I^1(0) = 0$$

Кроме того, в силу статической определенности плоской задачи идеальной пластичности от этой подсистемы пяти уравнений отделяется группа трех уравнений (2.5), (4.1) для напряжений. Последнюю нетрудно редуцировать к одному уравнению второго порядка относительно s_{12}^1 :

$$L s_{12}^1 + M(s s_{12}^1 \text{tg} \theta) = -M \left(\frac{\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t))}{\sqrt{2} \cos \theta} \right) \quad (4.5)$$

где L и M – дифференциальные операторы (1.10).

Принимая гипотезу Прандтля и для неоднородного по пределу текучести материала, запишем граничные условия для s_{12}^1 на поверхностях плит Γ_{1r} и Γ_{2r} , следующие из (4.1) при $\theta = \mp \pi/2$:

$$s_{12}^1|_{\Gamma_{1r}} = \frac{s}{\sqrt{2}} \Sigma^1 \left(\frac{h x_1}{h_0}, -h_0 \right), \quad s_{12}^1|_{\Gamma_{2r}} = -\frac{s}{\sqrt{2}} \Sigma^1 \left(\frac{h x_1}{h_0}, h_0 \right) \quad (4.6)$$

Коэффициенты в левой части линейного уравнения (4.5) не зависят от x_1 , поэтому будем искать решение краевой задачи (4.5), (4.6) в виде рядов Фурье по этой переменной

$$s_{12}^1(x_1, x_2, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x_2, t) e^{inx_1} \quad (4.7)$$

$$\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0(x_1, x_2, t)) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_2, t) e^{unx_1}$$

Получим обыкновенную краевую задачу для каждого из b_n на интервале $-h < x_2 < h$:

$$b_n'' + 2ins(b_n \operatorname{tg} \theta)' + n^2 b_n = -in\sqrt{2} \left(\frac{B_n}{\cos \theta} \right)', \quad (4.8)$$

$$b_n(\mp h) = \pm \frac{s}{\sqrt{2}} B_n(\mp h) \quad (4.9)$$

где коэффициенты B_n заданы, штрих означает производную по x_2 , а время t в квазистатике выполняет роль параметра.

5. Течение в слое, изначально однородном по x_1 и слабонеоднородном по x_2 . Рассмотрим подробнее случай, когда известная функция $\Sigma^1(X_{01}^0(x_1, x_2, t), X_{02}^0(x_1, x_2, t))$ зависит только от своего второго аргумента, т.е. с учетом (3.18):

$$\Sigma^1 = \Sigma^1(h_0 x_2/h), \quad -h < x_2 < h \quad (5.1)$$

Тогда сформулированная в п. 4 линейризованная задача для слабонеоднородного течения Прандтля допускает аналитическое решение.

Действительно, в рядах (4.7) останутся ненулевыми только первые члены: $s_{12}^1(x_2, t) = b_0$, и задача (4.8), (4.9) при $n = 0$ сведется к следующей:

$$(s_{12}^1)'' = 0, \quad s_{12}^1(\mp h) = \pm \frac{s}{\sqrt{2}} \Sigma^1(\mp h_0) \quad (5.2)$$

Интегрируя (5.2) и подставляя результат в (4.1) и уравнения равновесия (2.5), выпишем компоненты девиатора напряжений, зависящего в любой момент времени только от x_2 , а также давление и компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} s_{12}^1 &= -\frac{s}{2\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{x_2}{h} \right) \Sigma^1(h_0) - \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) \Sigma^1(-h_0) \right] \\ s_{11}^1 &= -\frac{\operatorname{tg} \theta}{2\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{x_2}{h} \right) \Sigma^1(h_0) - \left(1 - \frac{x_2}{h} \right) \Sigma^1(-h_0) \right] + \frac{\Sigma^1(h_0 x_2/h)}{\sqrt{2} \cos \theta} \\ p^1 &= -s_{11}^1 - \frac{s x_1}{2\sqrt{2} h} (\Sigma^1(h_0) + \Sigma^1(-h_0)), \quad \sigma_{12}^1 = s_{12}^1 \\ \sigma_{11}^1 &= 2s_{11}^1 + \frac{s x_1}{2\sqrt{2} h} (\Sigma^1(h_0) + \Sigma^1(-h_0)) \\ \sigma_{22}^1 &= \frac{s x_1}{2\sqrt{2} h} (\Sigma^1(h_0) + \Sigma^1(-h_0)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Заметим, что $s_{11}^1 \rightarrow 0$ при $x_2 \rightarrow \pm h$ ($\theta \rightarrow \pm \pi/2$).

Перейдем к отысканию поля скоростей $\mathbf{v}^1(\mathbf{x}, t)$. Компоненты v_1^1 и v_2^1 удовлетворяют системе (2.6), (4.2). Относительно функции тока ψ^1 уравнение (4.2) выглядит следующим образом:

$$M\psi^1 \sin \theta + sL\psi^1 \cos \theta = F(x_2, t) \quad (5.4)$$

$$F(x_2, t) = \frac{2v_0(\sqrt{2}s_{11}^1 - \Sigma^1(h_0x_2/h)\cos\theta)}{\Sigma^0 h \cos \theta \sin \theta} \quad (5.5)$$

Будем разыскивать функцию ψ^1 , не зависящей от x_1 , что сразу приводит к равенству

$$v_2^1 \equiv 0 \quad (5.6)$$

и не противоречит кинематическим граничным условиям на поверхности плит $v_2^1|_{\Gamma_1} = v_2^1|_{\Gamma_2} = 0$ (в возмущенном процессе закон сближения плит по сравнению с классической задачей Прандтля не меняется). Из (5.4) следует обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции тока ψ^1 , интегрируя один раз которое, получим

$$v_1^1 = (\psi^1)' = s \int \frac{F(x_2, t)}{\cos \theta} dx_2 \quad (5.7)$$

Итак, поле скоростей (5.6), (5.7) в слое известно. Остается подставить выражения (5.6) и (5.7) в систему уравнений (4.4) для определения поправок к закону движения. Выполняя интегрирование данной системы, запишем

$$X_1^1(t) = \frac{s}{h} \int_0^t h(\tau) \int \frac{x_{20}h(\tau)/h_0 F(x_2, \tau)}{\cos \theta} dx_2 d\tau, \quad X_2^1(t) \equiv 0 \quad (5.8)$$

Силовые характеристики (5.3), кинематика (5.6), (5.7) и закон движения (5.8) представляют собой полное аналитическое решение задачи Прандтля для материала, который в начальный момент времени однороден по x_1 и слабонеоднороден по толщине. Отметим особенности данного решения.

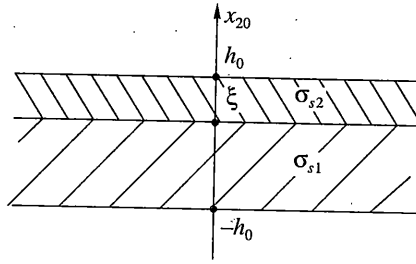
1. Устремляя в выражении (5.5) x_2 к h либо $-h$ ($\theta \rightarrow \pi/2$ либо $\theta \rightarrow -\pi/2$), можно показать, что

$$\lim_{x_2 \rightarrow \pm h} F = \mp \frac{v_0}{2\Sigma^0 h} \left(\Sigma^1(h_0) - \Sigma^1(-h_0) + 2h_0 \frac{\partial \Sigma^1}{\partial x_{20}}(\pm h_0) \right) \quad (5.9)$$

Ограниченность функции F на интервале $-h < x_2 < h$ зависит от того, равен или не равен бесконечности в точках $x_{20} = \pm h_0$, т.е. на поверхностях сближающихся плит, градиент заданного в (5.1) предела текучести $\Sigma^1(x_{20})$. Если

$$\left| \frac{\partial \Sigma^1}{\partial x_{20}}(\pm h_0) \right| < \infty \quad (5.10)$$

то $F(x_2, t)$ ограничена, а следовательно, особенности в точках $x_2 = \pm h$ в (5.7) интегрируемы и возмущение поля скоростей \mathbf{v}^1 также ограничено на интервале $-h < x_2 < h$. Если



Фиг.2

же хотя бы на одной из плит $|\partial \Sigma^1 / \partial x_{20}| = \infty$, то неограниченность компоненты v_1^1 и поправки X_1^1 к закону движения (5.8) свидетельствуют о неправомочности асимптотического разложения (2.2) с малым параметром α . Действительно, в этом случае малое возмущение (2.1) предела текучести в начальный момент приводит к конечному отклонению поля скоростей от классического (3.3) уже при сколь угодно малых временах (само решение Прандтля применимо лишь на временах меньших $t_\infty = h_0/v_0$). Это говорит о неустойчивости классического решения (3.3)–(3.7) (или (3.9)–(3.13)) относительно такого возмущения материальной функции – предела текучести, – что хотя бы на одной из поверхностей плит выполняется равенство $|\partial \Sigma^1 / \partial x_{20}| = \infty$.

2. Неравенство (5.10) является необходимым требованием устойчивости. При этом зависимость Σ^1 от x_{20} (5.1) допускается разрывной в любых внутренних точках слоя, т.е. идеально пластическое тело может быть слоистым композитом [15]. Параметры течения двухслойного композита в качестве примера приведены далее.

3. Произвольная слабая стратификация по толщине, удовлетворяющая неравенству (5.10), не влияет в первом приближении по α на движение частиц вдоль оси x_2 .

4. Граничные условия для компоненты скорости v_1 в задаче Прандтля не ставятся. Поэтому, как и решение (3.3), скорость (5.7) определена с точностью до постоянной. На это указывает неопределенный интеграл в (5.7).

6. Течение в слабонеоднородном двухслойном композите. Пусть возмущение предела текучести (5.1) имеет следующий вид [16, 17] (фиг. 2):

$$\Sigma^1(x_{20}) = \begin{cases} \sigma_{s1}, & -h_0 < x_{20} < \xi_0 \quad (-h < x_2 < \xi; -\pi/2 < \theta < \theta_0) \\ \sigma_{s2}, & \xi_0 < x_{20} < h_0 \quad (\xi < x_2 < h; \theta_0 < \theta < \pi/2) \end{cases}$$

$$-h_0 < \xi_0 < h_0, \quad \xi = h\xi_0/h_0, \quad \theta_0 = \arcsin(\xi_0/h_0)$$

Неравенство (5.10) выполняется, так как $(\partial \Sigma^1 / \partial x_{20})(\pm h_0) = 0$.

Из (5.3) видно, что в двухслойном композите возмущения σ_{12}^1 и σ_{22}^1 , т.е. обе составляющие вектора напряжений непрерывны при $x_2 = \xi$, а σ_{11}^1 и p^1 терпят разрыв. Вычисляя на основании (5.5) и (5.7) компоненту скорости v_1^1 , получим

$$v_1^1 = \frac{sv_0}{\Sigma^0} (\sigma_{s1} - \sigma_{s2}) \left[\left(\frac{h-x_2}{h+x_2} \right)^{\pm 1/2} - \left(\frac{h-\xi}{h+\xi} \right)^{\pm 1/2} \right] \quad (6.1)$$

причем верхний знак надо брать при $\xi < x_2 < h$, а нижний при $-h < x_2 < h$. Постоянные интегрирования в каждом из слоев согласованы так, чтобы функция (6.1), а следовательно и весь вектор скорости v^1 были непрерывны на прямой $x_2 = \xi$.

Поправка (5.8) к закону движения выглядит следующим образом:

$$X_1^1(t) = \frac{s v_0 t}{2 \Sigma^0} (\sigma_{s1} - \sigma_{s2}) \left(1 + \frac{h_0}{h} \right) \left[\left(\frac{h_0 - x_{20}}{h_0 + x_{20}} \right)^{\pm 1/2} - \left(\frac{h_0 - \xi_0}{h_0 + \xi_0} \right)^{\pm 1/2} \right]$$

$$X_2^1(t) = 0$$

Вектор $X^1(x_0, t)$ также непрерывен на границе раздела слоев композита.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00397, 05-01-00401 и 05-01-00403).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 334 с.
2. Георгиевский Д.В. Моделирование слабой неоднородности при эйлеровом описании сплошной среды // Докл. РАН. 2005. Т. 405. № 4. С. 479–483.
3. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. I. Упруго-пластические деформации. М.: Логос, 2004. 376 с.
4. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
5. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
6. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 382 с.
7. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 702 с.
8. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности. Тверь: Изд-во ТвГТУ, 2002. 300 с.
9. Георгиевская Д.А., Георгиевский Д.В. Слабонеоднородные по пределу текучести пластические течения Сен-Венана // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 6. С. 11–25.
10. Ильюшин А.А. Деформация вязкопластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.
11. Петров А.Г. Асимптотический метод построения отображения Пуанкаре при описании перехода к динамическому хаосу в гамильтоновых системах // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 1. С. 15–19.
12. Кийко И.А. Обобщение задачи Л. Прандтля об осадке полосы из сжимаемого материала // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2002. № 4. С. 47–52.
13. Кийко И.А., Кадымов В.А. Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2003. № 4. С. 50–56.
14. Колмогоров В.Л. Механика обработки материалов давлением. Екатеринбург: Изд-во УрГТУ – УПИ, 2001. с.
15. Победра Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
16. Победра Б.Е., Гузей И.Л. Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии // Математическое моделирование систем и процессов. 1998. № 6. С. 82–91.
17. Kadymov V., Wille R. Plastic flow in piecewise-homogeneous layer // ZAMM. 1995. В. 75. № 1. S. 293–294.

Москва

Поступила в редакцию
5.06.2005