МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2006

УДК 539.3

© 2006 г. В.Б. ЗЕЛЕНЦОВ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ОБ УДАРЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Нестационарная динамическая контактная задача об ударе жесткого параболического штампа в упругую полуплоскость сведена к решению задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения движения штампа совместно с дополнительным нелинейным уравнением относительного закона движения штампа и полуширины зоны контакта. При численном решении задачи Коши на каждом шаге интегрирования используется приближенное аналитическое решение вспомогательной нестационарной динамической контактной задачи о внедрении жесткого параболического штампа с временно фиксированной шириной зоны контакта, построенное на основе [1–3]. Используемое дополнительное уравнение определено за счет построения решения вспомогательной задачи в классе функций, ограниченных на краях зоны контакта.

Ранее нестационарные контактные задачи с переменной шириной зоны контакта и методы их решения рассматривались в [3–5].

1. Постановка основной и вспомогательной задачи. Интегральное уравнение вспомогательной задачи. Рассматривается основная нестационарная динамическая контактная задача (НДКЗ) о внедрении жесткого штампа параболической формы в упругую полуплоскость ($-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$). Внедрение штампа в полуплоскость осуществляется вдоль оси Oy ($x = 0$), являющейся осью его симметрии. Начальная скорость штампа v_0, погонная масса m, полуширина зоны контакта штампа с упругой полуплоскостью $a(t)$ – знакоположительная функция времени t. Силы трения и сцепления в зоне контакта штампа с упругой средой отсутствуют. Форма штампа и закон его внедрения в упругую среду задается функцией $g(x, t)$ ($t > 0$, $|x| \leq a(t)$):

$$g(x, t) = \varepsilon(t) - \theta x^2 \tag{1.1}$$

где $\varepsilon(t)$ – закон движения центра масс штампа, θ – параметр раствора параболического штампа, характеризующий пологость (крутизну) его формы, размерности м$^{-1}$ (фиг. 1).

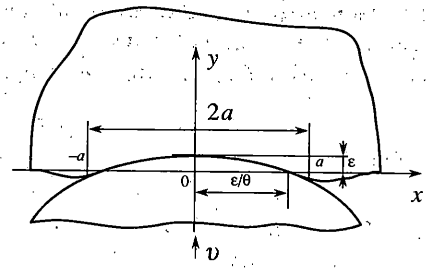
В начальный момент времени упругая полуплоскость находится в покое и поэтому смещения упругой среды $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ при $t = 0$ и их скорости равны нулю.

Граничные условия рассматриваемой НДКЗ в общепринятых обозначениях теории упругости [6, 7] имеют вид ($t > 0$):

$$v(x, 0, t) = g(x, t), \quad |x| \leq a; \quad \sigma_{yy}(x, 0, t) = 0, \quad a < |x| < \infty \tag{1.2}$$

$$\sigma_{xy}(x, 0, t) = 0, \quad |x| < \infty \tag{1.3}$$

где σ_{yy}, σ_{xy} – нормальные и касательные напряжения, $a = a(t)$ – функция времени. На бесконечности (при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$) напряжения и смещения в упругой полуплоскости равны нулю.



Фиг. 1

Для построения решения основной НДКЗ со смешанными граничными условиями (1.2), (1.3), как в [3], рассматривается вспомогательная НДКЗ, полностью совпадающая по постановке с основной НДКЗ в предположении, что величина полуширины зоны контакта a в (1.2), (1.3) является величиной постоянной на любом сколь угодно малом интервале времени t ($t > 0$).

В таком предположении вспомогательная НДКЗ, с помощью интегральных преобразований Лапласа (по времени t) с параметром p и Фурье (по координате x) [8], последовательно применяющихся к дифференциальным уравнениям теории упругости [6, 7] и к граничным условиям (1.2), (1.3), с учетом условий на бесконечности и нулевых начальных условий, приводится к решению интегрального уравнения (ИУ) первого рода в безразмерной форме [1, 2]:

$$\int_{-1}^{1}\varphi^L(\xi, p)k\left(\frac{\xi - x}{\Lambda}\right)d\xi = 2\pi f^L(x, p), \quad |x| \le 1 \tag{1.4}$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u)e^{iut}du, \quad K(u) = 2(1-\beta^2)\sigma_2 R^{-1}(u) \tag{1.5}$$

$$R(u) = (2u^2+1)^2 - 4u^2\sigma_1\sigma_2$$

$$\begin{gathered}\sigma_1 = \sqrt{u^2+1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{u^2+\beta^2}, \quad \Lambda = c_2/(pa) \\ f^L(x, p) = \Delta g^L(x, p), \quad \Delta = 2(1-\beta^2)\mu a^{-1} \\ \beta = c_2/c_1, \quad c_1 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь $\varphi^L(x, p)$ – трансформанта Лапласа функции $\varphi(x, t)$ (искомой функции распределения контактных напряжений под штампом); c_1, c_2 – скорости распространения продольной и поперечной упругих волн смещений и напряжений; λ, μ – коэффициенты Лямэ; ρ – плотность материала упругой среды; $g^L(x, p)$ – изображение Лапласа функции $g(x, t)$, описывающей форму штампа и закон его внедрения в упругую среду (1.1):

$$g^L(x, p) = \varepsilon^L(p) - \theta a^2 p^{-1} x^2, \quad |x| \le 1 \tag{1.7}$$

где $\varepsilon^L(p)$ – изображение Лапласа функции $\varepsilon(t)$ из (1.1), a – фиксированная полуширана зоны контакта ($a \ge 0$). Контур интегрирования Γ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ проходит от $-\infty$ до $+\infty$ вдоль действительной оси ($\tau = 0$) под углом $-\arg p$ к ее положительному направлению.

2. Символ ядра ИУ (1.4) и его основные свойства. Функция $K(u)$ (1.5) – символ ядра ИУ (1.4) является четной, вещественной на действительной оси комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$. Асимптотическое поведение функции $K(u)$ в нуле и на бесконечности дается соотношениями:

$$K(u) = |u|^{-1} + O(|u|^{-3}) \quad \text{при} \quad |u| \to \infty \tag{2.1}$$

$$K(u) = K(0) + \frac{1}{2!}K''(0)u^2 + O(u^4) \quad \text{при} \quad u \to 0 \tag{2.2}$$

$$K(0) = 2\beta(1-\beta^2), \quad K''(0) = 2\beta^{-1}(1 - 9\beta^2 + 8\beta^3 + 8\beta^4 - 8\beta^5)$$

В комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ функция $K(u)$ имеет четыре точки ветвления $u = \pm i\beta$, $u = \pm i$ и два полюса Релея $u = \pm i\eta_R$, определяющихся из алгебраического уравнения Релея $R(iu) = 0$ [7].

Для однозначного представления функции $K(u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ проводятся разрезы от точек ветвления $u = i$, $u = i\beta$ до $+i\infty$ вдоль положительной части мнимой оси ($\mathrm{Im}\,u > 0$) и от точек ветвления $u = -i$, $u = -i\beta$ ($\beta > 0$) до $-i\infty$ вдоль отрицательной части ($\mathrm{Im}\,u \le 0$) мнимой оси. В разрезанной таким образом комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ с выколотыми точками полюсов Релея $u = \pm i\eta_R$ функция $K(u)$ является аналитической, включая полосу $|\mathrm{Im}(u)| < \beta$, ($\beta < 1 < \eta_R$).

3. Приближенное решение ИУ (1.4). Решение ИУ (1.4) $\varphi^L(x, p)$ может быть построено по формуле [1, 2, 9]:

$$\varphi^L(x, p) = \varphi_+^L\left(\frac{1+x}{\Lambda}, p\right) + \varphi_-^L\left(\frac{1-x}{\Lambda}, p\right) - \varphi_\infty^L\left(\frac{x}{\Lambda}, p\right), \quad |x| \le 1 \tag{3.1}$$

в которой функции $\varphi_\pm^L(x, p)$, $\varphi_\infty^L(x, p)$ определяются из ИУ

$$\int_0^\infty \varphi_\pm^L(\xi, p)k(\xi - x)d\xi = 2\pi f^L(\pm\Lambda x \mp 1, p)\Lambda^{-1}, \quad 0 \le x < \infty \tag{3.2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi_\infty^L(\xi, p)k(\xi - x)d\xi = 2\pi f^L(\Lambda x, p)\Lambda^{-1}, \quad -\infty < x < \infty \tag{3.3}$$

Ядро $k(t)$ (1.5) после деформации контура интегрирования Γ в действительную ось имеет вид

$$k(t) = \int_{-\infty}^\infty K(u)e^{iut}du$$

Уравнения (3.2) являются ИУ Винера – Хопфа на полуоси [10], а (3.3) – уравнением свертки Фурье на оси [11].

Решение ИУ (3.3) находится с помощью интегрального преобразования Фурье и дается формулой

$$\varphi_\infty^L(x, p) = \frac{1}{2\pi\Lambda}\int_{-\infty}^\infty \frac{f^{LF}(u, p)}{K(u)}e^{-iux}du \tag{3.4}$$

$$f^{LF}(u, p) = 2\pi[\lambda_0\delta(u) - 2\lambda_1\Lambda^2\delta''(u)]$$
$$\lambda_0 = 2(1-\beta^2)\mu a^{-1}\varepsilon^L(p), \quad \lambda_1 = -2(1-\beta^2)\mu a\theta p^{-1} \tag{3.5}$$

где $\delta(u)$ – дельта-функция Дирака в комплексной плоскости u (штрихами обозначены производные).

После вычисления квадратур в (3.4) будем иметь

$$\Delta^{-1}\varphi^L_\infty(x, p) = \frac{1}{K(0)}\left[\frac{\varepsilon^L(p)}{\Lambda} - \eta(x^2 + \Lambda^2\gamma'')\right], \quad \eta = \frac{\theta a^3}{c_2}, \quad \gamma'' = \frac{K''(0)}{K(0)} \tag{3.6}$$

При получении соотношения (3.6), учитывалось, что $K'(0) = 0$ ввиду четности $K(u)$.

Для решения ИУ (3.2) применяется стандартная процедура их решения методом Винера – Хопфа [1, 2, 10–12]. Рассмотрим ИУ (3.2) для $\varphi^L_+(x, p)$, доопределив его на всю действительную ось

$$\int_0^\infty \varphi^L_+(\xi, p)k(\xi - x)d\xi = \begin{cases} 2\pi f^L(\Lambda x - 1, p)\Lambda^{-1}, & 0 \le x < \infty \\ 2\pi \upsilon^L_-(x, p), & -\infty < x < 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Под $\upsilon^L_-(x, p)$ понимается интегральный оператор

$$\upsilon^L_-(x, p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \varphi^L_+(\xi, p)k(\xi - x)d\xi \tag{3.8}$$

определяющий трансформанту Лапласа упругих вертикальных перемещений $\upsilon(x, t)$ поверхности упругой среды вне штампа.

После применения к ИУ (3.7) интегрального преобразования Фурье получим функциональное уравнение

$$K(u)\varphi^{LF}_+(u, p) = \Lambda^{-1}f^{LF}_+(u, p) + \upsilon^{LF}_-(u, p) \tag{3.9}$$

$$\varphi^{LF}_+(u, p) = \int_0^\infty \varphi^L_+(\xi, p)e^{iu\xi}d\xi$$
$$f^{LF}_+(u, p) = \int_0^\infty f^L(\Lambda\xi - 1, p)e^{iu\xi}d\xi, \quad \upsilon^{LF}_-(u, p) = \int_{-\infty}^0 \upsilon^L_-(\xi, p)e^{iu\xi}d\xi \tag{3.10}$$

относительно неизвестной трансформанты Лапласа – Фурье функции $\varphi^{LF}_+(u, p)$, являющейся изображением Фурье искомой функции $\varphi^L_+(u, p)$. Функция $f^{LF}_+(u, p)$ определяется формулой

$$f^{LF}_+(u, p) = \Delta\Lambda^{-1}\left\lfloor -(\varepsilon^L(p) - \eta\Lambda)(iu)^{-1} + 2\eta\Lambda^2(iu)^{-2}(1 + \Lambda(iu)^{-1})\right\rfloor \tag{3.11}$$

Функции $\varphi^{LF}_+(u, p)$, $f^{LF}_+(u, p)$ регулярны в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}(u) > 0$, а $\upsilon^{LF}_-(u, p)$ регулярна в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}(u) < \beta$, $\beta > 0$ комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$;

функция $K(u)$ регулярна в полосе $|\mathrm{Im}(u)| < \beta$. Предполагая возможность факторизации функции $K(u)$ [10]:

$$K(u) = K_+(u)K_-(u) \tag{3.12}$$

где функции $K_+(u)$, $K_-(u)$ регулярны соответственно в верхней ($\mathrm{Im}(u) > -\beta$) и нижней ($\mathrm{Im}(u) < \beta$) полуплоскостях, подставим (3.12) в уравнение (3.9) и разделим его левую и правую части на $K_-(u)$. Образовавшуюся в результате этого функцию

$$g(u, p) = \Lambda K_-^{-1}(u) f_+^{LF}(u, p) \tag{3.13}$$

представим в виде суммы двух функций [10]:

$$g(u, p) = g_+(u, p) + g_-(u, p) \tag{3.14}$$

где $g_\pm(u, p)$ регулярны в верхней ($\mathrm{Im}(u) > 0$) и нижней ($\mathrm{Im}(u) < \beta$) полуплоскостях $u = \sigma + i\tau$. При этом

$$\begin{gathered} g_+(u, p) = \Delta \sum_{n=1}^{3} c_n(p) g_n^+(u) \\ c_1(p) = -\varepsilon^L(p)\Lambda^{-1} + \eta(1 + 2\Lambda\gamma_-' + \Lambda^2(\gamma_-'' + 2\gamma_-'^2)) \\ c_2(p) = 2\eta\Lambda(1 + \Lambda\gamma_-') \\ c_3(p) = 2\eta\Lambda^2, \quad g_k^+(u) = \frac{1}{(iu)^k K_-(0)} \; (k = 1, 2) \\ g_3^+(u) = \frac{1}{(iu)^3 K_-(0)}, \quad \gamma_-' = \frac{iK_-'(0)}{K_-(0)}, \quad \gamma_-'' = \frac{K_-''(0)}{K_-(0)} \end{gathered} \tag{3.15}$$

где штрихами над $K(u)$ обозначен порядок производной.

В результате представления (3.14) функциональное уравнение принимает вид

$$\varphi_+^{LF}(u, p)K_+(u) - g_+(u, p) = g_-(u, p) + \upsilon_-^{LF}(u, p)K_-^{-1}(u) \tag{3.16}$$

и ввиду убывания на бесконечности всех функций в (3.16) и теоремы Лиувилля получим из (3.16) два равенства

$$\varphi_+^{LF}(u, p)K_+(u) - g_+(u, p) = 0 \tag{3.17}$$

$$\upsilon_-^{LF}(u, p)K_-^{-1}(u) + g_-(u, p) = 0 \tag{3.18}$$

для определения $\varphi_+^{LF}(u, p)$ и $\upsilon_-^{LF}(u, p)$.

Искомое решение $\varphi_+^L(x, p)$ ИУ (3.2) определяется с помощью обратного преобразования Фурье от $\varphi_+^{LF}(u, p)$ из (3.17):

$$\varphi_+^L(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + ic}^{\infty + ic} \frac{g_+(u, p)}{K_+(u)} e^{-iux} du \; (c > 0), \quad 0 \le x < \infty \tag{3.19}$$

Функция $g_+(u, p)$ дается формулой (3.15).

Заметим, что из соотношения (3.18) определяется вторая неизвестная функция $\upsilon_-^{LF}(u,p)$ и после ее обращения по Фурье получим

$$\upsilon_-^L(x,p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_-(u,p)K_-(u)e^{-iux}du, \quad -\infty < x < 0$$

$$g_-(u,p) = g(u,p) - g_+(u,p)$$

Функция $g(u,p)$ определяется выражением (3.13).

Решение $\varphi_-^L(x,p)$ второго уравнения из (3.2) совпадает с $\varphi_+^L(x,p)$ ($\varphi_-^L(x,p) = \varphi_+^L(x,p)$) на основании того, что $f(x,t)$ четная функция x и $f^L(\Lambda x - 1, p) = f^L(-\Lambda x + 1, p)$ в (3.2). На этом же основании и $\upsilon_+^L(x,p) = \upsilon_-^L(x,p)$.

Заметим, что для вычисления квадратур в (3.19), определяющих решения ИУ (3.2) $\varphi_\pm^L(x,p)$, необходимо знание $K_\pm(u)$. В общем случае оно дается в сингулярных квадратурах [7], что затрудняет анализ полученных результатов и их численную реализацию.

4. Аппроксимация символа ядра $K(u)$ (1.5) ИУ (3.2). Для получения эффективного решения ИУ (3.2) заменим функцию $K(u)$ – символ ядра (1.5) ИУ (3.2) аппроксимирующей функцией $K_0(u)$, предложенной ранее [1, 2]. Имеем

$$K_0(u) = \sqrt{u^2+\beta^2}(u^2+\eta_R^2)^{-1}\exp[M_n^+(u)+M_n^-(u)]$$
$$M_n^\pm(u) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} d_k(\sqrt{\beta\mp iu}-\sqrt{1\mp iu})^{2k+2} \tag{4.1}$$

Постоянные d_k определяются из условий наилучшей аппроксимации $K(u)$ в комплексной плоскости $u = \sigma + i\tau$ с разрезами, описанными в п. 2. В этой области $K_0(u)$ – однозначная аналитическая функция. Ее факторизация, т.е. представление в виде $K_0(u) = K_+^0(u)K_-^0(u)$, достигается элементарными средствами, при этом

$$K_\pm^0(u) = \frac{\sqrt{\beta\mp iu}}{\eta_R\mp iu}\exp[M_n^\pm(u)] \tag{4.2}$$

Основные свойства $K_0(u)$ и $K_\pm^0(u)$ указаны ранее [1].

С технической точки зрения аппроксимация символа ядра $K(u)$ (1.5) функцией (4.1) сводится к определению коэффициентов аппроксимации d_k ($k = 0, 1, \ldots, n$). Для их определения могут использоваться различные классические методы теории аппроксимации функций в комплексной области [13]. Вследствие того, что асимптотика функции $K_0(u)$ (4.1) на бесконечности (при $|u| \to \infty$) совпадает с асимптотикой $K(u)$ (2.1), то аппроксимацию $K(u)$ (1.5) функцией $K_0(u)$ достаточно осуществить в круге с центром в начале координат. Учитывая степенной характер функций $K(u)$ (2.2) и $K_0(u)$ (4.1) в окрестности нуля ($u = 0$), для определения постоянных d_k можно использовать разложения этих функций в степенные ряды. Это приводит к условиям совпадения функций $K(u)$ и $K_\pm(u)$ с функциями $K_0(u)$ и $K_\pm^0(u)$ и совпадения соответствующих производных в нуле, которые можно записать в виде (верхний индекс j указывает порядок производной)

$$K^{(j)}(0) = K_0^{(j)}(0) \; (j = 0, 2, \ldots, 2m) \tag{4.3}$$

$$K_\pm^{(j)}(0) = K_\pm^{0(j)}(0) \quad (j = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1) \tag{4.4}$$

при этом должно выполняться условие $n = 2m$, а в соотношениях (4.4) берутся только либо верхние, либо нижние знаки плюс и минус. Кроме этого учитывались следующие свойства функций $K_\pm^0(u)$:

$$K_+^0(u) = K_-^0(-u), \quad K_+^{0(j)}(u) = (-1)^j K_-^{0(j)}(-u) \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

Для реализации условий (4.4) необходимо определить функции $K_\pm^{(j)}(0)$, что достигается классическими средствами [10] по формуле

$$K_+^{(j)}(u) = \frac{K_+(u)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K'(\alpha)}{K(\alpha)}\frac{d\alpha}{(\alpha-u)^j} \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{4.6}$$

при этом учитывается равенство

$$K_\pm(0) = \sqrt{K(0)} \tag{4.7}$$

Ввиду четности $K(u)$ все $K^{(2j-1)}(0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$, а все $K_\pm^{(2j)}(0)$ выражаются через $K^{(2j)}(0)$ и $K_\pm^{(2j-1)}(0)$, например для $j = 1$:

$$K_\pm''(0) = \frac{1}{K_\pm(0)}\left[\frac{1}{2}K''(0) + K_\pm'^2(0)\right] \tag{4.8}$$

Аппроксимация (4.1) при $n = 0$ использовалась ранее [1, 2]. При решении поставленной НДКЗ необходима более точная аппроксимация, так как уже полученные общие формулы решений (3.19) в результате вычисления квадратур будут содержать производные от функций $K(u)$ и $K_\pm(u)$ при $u = 0$. Для $n = 2$ $(m = 1)$ условия (4.3), (4.4) принимают вид

$$K(0) = K_0(0), \quad K_+'(0) = K_+^{0'}(0), \quad K''(0) = K_0''(0) \tag{4.9}$$

из которых получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных d_0, d_1, d_2:

$$\begin{aligned} d_0 + bd_1 + b^2 d_2 &= b_1 \\ d_0 + 2bd_1 + 3b^2 d_2 &= b_2 \\ d_0 + 2b\varepsilon_1 d_1 + 3b^2\varepsilon_2 d_2 &= b_3 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$b_1 = b^{-1}\ln(2(1-\beta^2)\eta_R^2), \quad b_2 = -(2\beta - \eta_R + 2\eta_R\beta c_0)(b\eta_R\sqrt{\beta})^{-1}$$

$$b_3 = 4\beta\sqrt{\beta}(4\eta_R^2 - 4\eta_R^2\beta - 1)(db)^{-1}, \quad \varepsilon_1 = (\beta + 4\sqrt{\beta} + 1)d^{-1}, \quad \varepsilon_2 = (\beta + 6\sqrt{\beta} + 1)d^{-1}$$

$$d = (1+\sqrt{\beta})^2, \quad b = (1-\sqrt{\beta})^2, \quad c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{K'(u)}{uK(u)}du$$

Таблица 1

ν	0	0.05	0.10	0.15	0.16	0.20
d_0	8.55131	8.40477	8.17620	7.85815	7.73114	7.44457
d_1	82.41143	64.72042	49.50915	36.57461	32.73625	25.73097
ν	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
d_0	6.93147	6.31635	5.59681	4.76377	3.77013	1.68613
d_1	16.81668	9.69981	4.28494	0.52344	–1.54572	–0.88597

При выводе соотношений (4.10) использовалась производная от $K_{\pm}^{0}(0)$ при $n = 2$, вычисляемая по формуле

$$K_{\pm}^{0\prime}(0) = \pm i\frac{2\beta - \eta_R + \eta_R b\sqrt{\beta}(d_0 + 2bd_1 + 3b^2 d_2)}{2\eta_R\beta}K_{\pm}(0) \tag{4.11}$$

Расчеты показали, что наиболее оптимальным вариантом аппроксимации является вариант при $n = 1$ и при выполнении первого и третьего условий в (4.8). В этом случае для определения d_0 и d_1 необходимо в системе линейных алгебраических уравнений (4.9) положить $d_2 = 0$ и оставить первое и третье уравнения, откуда определяются d_0 и d_1:

$$d_0 = (2b_1\varepsilon_2 - b_3)\Delta_0^{-1}, \quad d_1 = (b_3 - b_1)\Delta_0^{-1}, \quad \Delta_0 = 2\varepsilon_2 - 1 \tag{4.12}$$

В табл. 1 приведены величины d_0 и d_1, рассчитанные по формулам (4.12) для различных значений коэффициента Пуассона ν.

При $\nu \in [0, 0.48]$ погрешность аппроксимации по $|K(u)|$ не превышает 5%, а при $\nu \in$ $\in [0.48, 4.9]$ не превышает 6%. Увеличение погрешности при значениях ν, близких к 0.5, связано с тем, что при $\nu = 0.5$ ($\beta = 0$) $K_{\pm}'(0)$ и $K''(0)$ не существуют, что видно из соотношений (2.2) и (4.11).

В специальных случаях аппроксимацию вида (4.1) можно строить, определяя постоянные d_k из других условий и по другим характерным точкам, например, по точкам ветвления, по полюсам Релея и т.п.

5. Приближенное решение ИУ (3.2). При получении решения ИУ (3.2) по формулам (3.19) воспользуемся аппроксимацией $K(u)$ вида (4.1) при $n = 1$, коэффициенты которой d_0 и d_1 определены формулами (4.12) для любых значений коэффициента Пуассона ν. Подставив $K_{+}^{0}(u)$ из (4.2) в (3.19) вместо $K_{+}(u)$, после вычисления квадратур получим $\varphi_{\pm}^{L}(x, p)$ – решение ИУ (3.2)

$$\Delta^{-1}\varphi_{\pm}^{L}(x, p) = \sum_{k=1}^{6} c_k(p)\varphi_k(x, p) \tag{5.1}$$

$$\varphi_1(x, p) = k_{\pi 0}\int_{\beta}^{\infty} m(\xi)\exp(-\xi x)d\xi, \quad \varphi_2(x, p) = \varphi_3(x, p) = k_{\pi 0}\int_{\beta}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi}\exp(-\xi x)d\xi$$

$$\varphi_4(x, p) = 1, \quad \varphi_5(x, p) = x, \quad \varphi_6(x, p) = x^2$$

$$c_1(p) = -\varepsilon^L(p)\Lambda^{-1} + \eta(1 + 2\Lambda\gamma'_- + \Lambda^2(\gamma''_- + 2\gamma'^2_-))$$

$$c_2(p) = 2\eta\Lambda(1 + \Lambda\gamma'_-), \quad c_3(p) = 2\eta\Lambda^2$$

$$c_4(p) = -K^{-1}(0)(c_1(p) + \gamma'_+ c_2(p) - (\gamma'^2_+ + 0.5\gamma''_+)c_3(p))$$

$$c_5(p) = -K^{-1}(0)(pc_2(p) + pc_3(p))\gamma'_+, \quad c_6(p) = -0.5K^{-1}(0)p^2 c_3(p)$$

$$m(\xi) = \begin{cases} m_1(\xi) \ (1 \le \xi < \infty), & m_1(\xi) = \psi_1(\xi)\exp[1/2(d_0\omega(\xi) - d_1\omega^2(\xi))] \\ m_2(\xi) \ (\beta \le \xi \le 1), & m_2(\xi) = \psi_1(\zeta)\exp(-1/2\psi_2(\xi))\cos\psi_3(\xi) \end{cases}$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{\eta_R - \xi}{\xi\sqrt{\xi - \beta}}, \quad \psi_2(\xi) = (1 + \beta - 2\xi)d_0 + ((\xi - \beta)^2 - 6(\xi - \beta)(1 - \xi) + (1 - \xi)^2)d_1$$

$$\psi_3(\xi) = \sqrt{\xi - \beta}\sqrt{1 - \xi}(2(1 + \beta - 2\xi)d_1 + d_0), \quad \omega(\xi) = (\sqrt{\xi - \beta} - \sqrt{\xi - 1})^2$$

$$k_{\pi 0} = (\pi K_-(0))^{-1}, \quad \gamma'_+ = \frac{iK'_+(0)}{K_+(0)}, \quad \gamma''_+ = \frac{K''_+(0)}{K_+(0)}$$

где γ'_-, γ''_- – даны формулами (3.15).

Отметим, что решение ИУ (3.2) получено в классе интегрируемых функций, допускающих особенности трансформанты Лапласа контактных напряжений на крае зоны контакта в точках $x = \pm 1$, т.е. $\varphi^L_\pm(x, p) = \omega(x, p)(1 \pm x)^{-1/2}$, где $\omega(x, p) \in C_{[-1, 1]}$. Эту особенность в соотношении (5.1) доставляет функция $\varphi^L_1(x, p)$, после вычисления квадратуры.

6. Решение вспомогательной НДКЗ. Решение поставленной в п. 1 вспомогательной НДКЗ о внедрении параболического штампа в упругую полуплоскость получается после применения обратного преобразования Лапласа к полученному приближенному решению ИУ (1.4), записанного в форме суперпозиции (3.1) решений ИУ (3.2), (3.3), в которой $\varphi^L_\pm((1 \pm x)/\Lambda, p)$, $\varphi^L_\infty(x/\Lambda, p)$ даются формулами (5.1), (3.6) соответственно. В результате решение поставленной НДКЗ определяется формулой

$$\varphi(x, t) = \varphi_+\left(\frac{a(1 + x)}{c_2}, t\right) + \varphi_-\left(\frac{a(1 - x)}{c_2}, t\right) - \varphi_\infty\left(\frac{ax}{c_2}, t\right) \tag{6.1}$$

в которой $\varphi_\pm(x, t)$, $\varphi_\infty(x, t)$ определены в виде

$$\Delta^{-1}\varphi_\pm(u, t) = H(t - u\beta)\sum_{k=1}^{3} u^{-3/2+k}\Phi_k(u, t) + H(t)\sum_{k=4}^{6} c_k(t)\Phi_k(u) \tag{6.2}$$

$$\Delta^{-1}\varphi_\infty(u, t) = t_2 K^{-1}(0)(\dot{\varepsilon}(t) - \eta t_2^{-3}(u^2\delta(t) + \gamma'' t)) \tag{6.3}$$

$$\Phi_k(u, t) = k_{\pi 0}\int_0^{t - \beta u} c_k(\tau)q_k(t - \tau, u)m_*((t - \tau)u^{-1})d\tau \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\Phi_4(u) = 1, \quad \Phi_5(u) = u, \quad \Phi_6(u) = u^2$$

$$c_1(t) = -t_2\dot{\varepsilon}(t) + \eta(\delta(t) + 2\gamma'_- t_2^{-1}H(t) + (2\gamma'^2_- + \gamma''_-)t_2^{-2}t)$$

$$c_2(t) = 2\eta t_2^{-1}(H(t) + \gamma'_- t_2^{-1}t), \quad c_3(t) = 2\eta t_2^{-2}t$$

$$c_4(t) = -K^{-1}(0)(c_1(t) + \gamma'_+ c_2(t) - (\gamma'^2_+ + 0.5\gamma''_+)c_3(t))$$

$$c_5(t) = K^{-1}(0)(\dot{c}_2(t) + \gamma'_+\dot{c}_3(t))$$

$$c_6(t) = -0.5K^{-1}(0)\ddot{c}_3(t), \quad t_k = a/c_k \ (k = 1, 2)$$

$$m_*(\xi) = \frac{\xi\sqrt{\xi-\beta}}{\eta_R - \xi}m(\xi), \quad q_k(t, u) = \frac{\eta_R u - t}{t^k\sqrt{t - \beta u}} \ (k = 1, 2, 3)$$

В формулах (6.2), (6.3), как и во всех предыдущих формулах, параметр a – полуширина зоны контакта штампа с упругой полуплоскостью. Формулы (6.2), (6.3) для $\varphi_\pm(u, t)$ пока не могут быть решениями поставленной НДКЗ, так как содержат особенности корневого типа $(1 \pm x)^{-1/2}$ на краях зоны контакта, свидетельствующие о наличии на краях зоны контакта источников упругой энергии (или изломов поверхности упругой среды). Для получения гладких ограниченных на концах зоны контакта решений поставленной НДКЗ необходимо обратить в ноль коэффициент, стоящий перед $(1 \pm x)^{-1/2}$ при $x \to \pm 1$ [4], т.е. выполнить условие

$$\lim_{x \to \mp 1 \pm 0}\sqrt{\frac{a(1 \pm x)}{c_2}}\varphi(x, t) = \lim_{x \to \mp 1 \pm 0}\Phi_1\left(\frac{a(1 \pm x)}{c_2}, t\right) = 0 \qquad (6.4)$$

Выполнение (6.4) приводит к следующему условию, связывающему полуширину зоны контакта a, скорость внедрения штампа $\dot{\varepsilon}(t)$ и время t.

$$a = -2\gamma'_- c_2 t + \left(\theta^{-1}\sqrt{t}\int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau - \frac{4}{3}(\gamma''_- - \gamma'^2_-)(c_2 t)^2\right)^{1/2} \qquad (6.5)$$

Условие (6.5) при фиксированном a может трактоваться как интегральное уравнение Вольтерра [11, 14] для определения $\varepsilon(t)$ – закона движения штампа. В дальнейшем (6.5) будет использоваться в качестве дополнительного условия при определении полуширины зоны контакта a.

Условие (6.5) записано в виде, удобном в дальнейшем при численной реализации на ЭВМ. Постоянные γ'_-, γ''_-, $\chi_- = \gamma''_- - \gamma'^2_-$ даны в табл. 2. Приведенные данные в табл. 2 указывают на существенное влияние на параметры γ'_-, γ''_-, χ_- коэффициента Пуассона ν, а следовательно и существенную зависимость (6.5) от свойств упругой среды.

При малых t из (6.5) следует оценка для a:

$$a = \sqrt{\frac{2v_0}{\theta}}\sqrt{t} + O(t) \quad \text{при} \quad t \to 0 \qquad (6.6)$$

Таблица 2

υ	0	0.05	0.10	0.15	0.16	0.20
γ'_-	0.3312	0.3421	0.3519	0.3595	0.3607	0.3632
γ''_-	−0.3431	−0.3833	−0.4169	−0.4379	−0.4398	−0.4344
χ_-	−0.4528	−0.5003	−0.5407	−0.5671	−0.5699	−0.5663
υ	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.49
γ'_-	0.3600	0.3434	0.2996	0.1894	−0.1502	−1.9635
γ''_-	−0.3814	−0.2244	0.1747	1.2602	5.3802	44.1202
χ_-	−0.5110	−0.3423	0.0849	1.2243	5.3576	40.2649

Скорость распространения ширины зоны контакта $\dot{a}$ имеет оценку

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{\upsilon_0}{2\theta}}\frac{1}{\sqrt{t}} + O(1) \quad \text{при} \quad t \to 0 \tag{6.7}$$

Откуда следует, что в начальный момент скорость распространения границы зоны контакта под параболическим штампом неограничена [5]. Заметим, что полученное здесь решение справедливо для временного промежутка, когда $\dot{a} < c_R$ (c_R – скорость распространения Релеевской волны), т.е. для

$$t > \upsilon_0/(2\theta c_R^2) \tag{6.8}$$

Для промежутка времени

$$0 < t < \upsilon_0/(2\theta c_R^2) \tag{6.9}$$

постановка задачи должна быть изменена [4, 5]. В дальнейшем считается, что временной промежуток (6.9) достаточно мал по сравнению с длительностью удара и существенно не влияет на полученные здесь решения.

7. Движение штампа на упругой среде. Внедрение параболического штампа в упругую полуплоскость рассчитывается как движение абсолютно жесткого тела и сводится к определению движения его центра масс, который располагается на оси симметрии штампа, совпадающей с осью Oy. В этом случае движение штампа можно рассматривать как движение материальной точки массы m. Дифференциальное уравнение движения штампа с начальными условиями имеет вид [1, 2]:

$$m\ddot{\varepsilon}(t) = Q(t), \quad \dot{\varepsilon}(0) = \upsilon_0, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \tag{7.1}$$

где ε_0, υ_0 – начальное внедрение штампа и его начальная скорость соответственно, $Q(t)$ – сила упругого сопротивления среды внедрению штампа связана с силой контактного воздействия штампа на упругую полуплоскость $P(t)$ формулой

$$Q(t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} \sigma_{yy}(x, 0, t)dx = -\int_{-a(t)}^{a(t)} \varphi(x, t)dx = -P(t), \quad P(t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} \varphi(x, t)dx \tag{7.2}$$

в которой $\varphi(x, t)$ – контактные напряжения между штампом и упругой полуплоскостью.

В случае вспомогательной НДКЗ, когда полуширина зоны контакта a временно постоянна, $\varphi(x, t)$ определяется формулой (6.1). Для этого случая можно указать более эффективный способ определения $P(t)$, чем по формуле (7.2), так как в этом случае справедливо равенство

$$P^L(p) = \int_{-a}^{a} \varphi^L(x, p)dx \tag{7.3}$$

Рассмотрим ИУ (1.4) вспомогательной НДКЗ. Пусть известно его решение для правой части вида $f^L(x, p) = 1$. Обозначим его $\varphi_0^L(x, p)$. Умножим левую и правую части ИУ(1.4) на $a\varphi_0^L(x, p)dx$ и проинтегрируем полученное равенство по x от -1 до 1. Поменяв затем порядок интегрирования, учитывая четность $K(u)$ и свойства $\varphi_0^L(x, p)$, получим формулу для вычисления $P^L(p)$:

$$P^L(p) = a\lambda_0\int_{-1}^{1} \varphi_0^L(x, p)dx + a\lambda_1\int_{-1}^{1} \varphi_0^L(x, p)x^2dx \tag{7.4}$$

где λ_0, λ_1 даны после (3.5).

Вышеупомянутое $\varphi_0^L(x, p)$ решение ИУ (1.4) для случая $f^L(x, p) = 1$ находится [1, 2] в виде суперпозиции (3.1), в которой

$$\begin{aligned} \varphi_+^L(x, p) &= \frac{1}{\pi\Lambda K_-(0)}\left[-\int_{\beta}^{\infty} m(u)e^{-ux}du + \frac{\pi}{K_+(0)}\right] \\ \varphi_\infty^L(x, p) &= 1/(\Lambda K(0)) \end{aligned} \tag{7.5}$$

где $m(u)$ определена после формулы (5.1). Подставив $\varphi_0^L(x, p)$ из (7.5) в (7.4), получим выражение для $P^L(p)$:

$$\begin{aligned} a^{-1}P^L(p) &= (\lambda_0 + \lambda_1)P_1^L(p) - 2\lambda_1\Lambda P_2^L(p) + \\ &+ 2\lambda_1\Lambda^2P_3^L(p) + \left(2\lambda_0 + \frac{2}{3}\lambda_1\right)\Lambda^{-1}K^{-1}(0) \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$P_k^L(p) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int_{\beta}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi^k}\left(1 + (-1)^k\exp\left(-\xi\frac{2}{\Lambda}\right)\right)d\xi \quad (k = 1, 2, 3)$$

Функция $m(u)$ дана после (5.1), а λ_0 и λ_1 даны после (3.5).

Определив оригиналы от $P^L(p)$ в (7.6), получим формулу вычисления $P(t)$ вспомогательной НДКЗ

$$(a\Delta)^{-1}P(t) = 2t_2K^{-1}(0)\dot{\varepsilon}(t) + P_{1\varepsilon}(t) - \eta(P_1(t) - 2P_2(t) + P_3(t) + 2/3K^{-1}(0)\delta(t)) \tag{7.7}$$

$$P_k(t) = -\frac{2}{\pi K_-(0)t_2^k}\int_{\beta}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi^k}(t^{k-1}H(t) - (t - 2\xi t_2)^{k-1}H(t - 2\xi t_2))d\xi \qquad (k = 1, 2, 3)$$

$$P_{1\varepsilon}(t) = -\frac{2}{\pi K_-(0)}\int\limits_{\beta}^{\infty}\frac{m(\xi)}{\xi}(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2\xi t_2)H(t-2\xi t_2))d\xi, \quad t_k = \frac{a}{c_k}\ (k = 1, 2)$$

где Δ дано после формулы (1.6), а $\delta(t)$, $H(t)$ соответственно дельта-функция Дирака и функция Хевисайда.

Учитывая, что $Q(t) = -P(t)$ (7.7) и после подстановки ее в (7.1) получим интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) типа Вольтерра [14] для определения закона движения штампа $\varepsilon(t)$, учитывая при этом, что правая часть этого уравнения $Q(t)$ содержит пока неизвестную a, а также $\varepsilon(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$, т.е. является функцией t, a, ε, $\dot{\varepsilon}$, а ИДУ (7.1) можно записать в виде

$$\ddot{\varepsilon} = R(t, a, \varepsilon, \dot{\varepsilon}), \quad R(t, a, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = m^{-1}Q(t) \tag{7.8}$$

Обозначив $\dot{\varepsilon} = \delta$, ИДУ (7.8) записывается в виде нормальной системы ИДУ первого порядка

$$\dot{\delta} = R(t, a, \varepsilon, \delta), \quad \dot{\varepsilon} = S(t, a, \varepsilon, \delta), \quad S(t, a, \varepsilon, \delta) = \delta \tag{7.9}$$

Для определения a должно использоваться дополнительное условие (6.5), которое в общем случае можно записать в виде нелинейного уравнения

$$a = F(t, a, \varepsilon, \delta) \tag{7.10}$$

$$F(t, a, \varepsilon, \delta) = -2\gamma'_-c_2t + \left(\theta^{-1}\sqrt{t}\int\limits_0^t\frac{\delta(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau - \frac{4}{3}\chi_-(c_2t)^2\right)^{1/2} \tag{7.11}$$

Решение системы интегродифференциальных уравнений (СИДУ) (7.9) совместно с нелинейным уравнением (7.10) осуществляется при начальных условиях

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = 0, \quad \delta(0) = \delta_0 = v_0, \quad a(0) = a_0 = 0 \tag{7.12}$$

На нулевом шаге решения СИДУ (7.9) тем или другим пошаговым методом [15] задается некоторое t_1 ($t_1 = h$ – шаг интегрирования) и из (7.9) при начальных данных (7.12) по той или другой разностной схеме получим ε_1 и δ_1 соответствующие t_1: $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$, $\delta_1 = \delta(t_1)$. Затем, произведя интерполяцию по найденным узлам, получим $\varepsilon(t)$ и $\delta(t)$ на $[0, t_1]$ и, подставив их в (7.10) вместе с $t = t_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, $\delta = \delta_1$, решим его как нелинейное уравнение относительно a:

$$a_1 = F(t_1, a_1, \varepsilon_1, \delta_1) \tag{7.13}$$

В результате получим значение $a = a_1$, соответствующее времени t_1: $a_1 = a(t_1)$. Продолжая этот процесс, получим все ε_k, δ_k, a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), а после интерполяции по полученным узлам $\varepsilon(t)$, $\delta(t)$, $a(t)$.

8. Общий алгоритм решения основной НДКЗ. В п. 7 было дано описание использования решений вспомогательной НДКЗ о внедрении жесткого параболического штампа в упругую полуплоскость, в предположении временно постоянной ширины зоны контакта, для определения закона движения штампа $\varepsilon(t)$, его скорости $\dot{\varepsilon}(t)$, а также полуширины зоны контакта a на начальном сколь угодно малом интервале времени $(0, t_1)$.

Определение закона внедрения параболического штампа $\varepsilon(t)$ и ширины зоны контакта $a(t)$ на всем временном интервале процесса удара ($t > 0$) в случае основной НДКЗ сводится к численному решению СИДУ (7.9) движения штампа совместно с решением нелинейного уравнения (7.10) на каждом шаге процесса интегрирования системы (7.9) при начальных условиях (7.12), с использованием основных формул решения вспомогательной НДКЗ (7.7).

Для численного решения системы (7.9) установим сетку по t: $t_{k+1} = t_k + h$ $(k = 0, 1, 2, .., n)$, h – шаг сетки интегрирования, $t_0 = 0$. В этом случае конечно-разностная схема пошагового решения задачи Коши для СИДУ (7.9) каким-либо из пошаговых методов, например Рунге – Кутта четвертого порядка, принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_{k+1} &= \delta_k + \Delta\delta_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n) \\ \varepsilon_{k+1} &= \varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = \varepsilon(t_k), \quad \delta_k = \delta(t_k) \end{aligned} \tag{8.1}$$

где $\Delta\delta_k$, $\Delta\varepsilon_k$ вычисляется по формулам выбранного пошагового метода [15], с использованием правых частей (7.9) $R(t, a, \varepsilon, \delta)$, $S(t, a, \varepsilon, \delta)$ и здесь не приводящихся. Дополнительное условие (7.10), (7.11) для определения a записывается в аналогичной форме

$$a_{k+1} = F(t_{k+1}, a_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \delta_{k+1}) \tag{8.2}$$

где $a_{k+1} = a(t_k)$ $(k = 0, 1, ..., n)$ и является нелинейным уравнением для определения a_{k+1} на каждом шаге k процесса интегрирования (8.1). Функцию $F(t, a, \varepsilon, \delta)$ (7.11) можно записать в форме более удобной для численных расчетов, избавившись в (7.11) от особой квадратуры с помощью интегрирования по частям. Заменив в полученной формуле $\ddot{\varepsilon}(t)$ на его выражение в (7.1) через $Q(t, a, \varepsilon, \delta)$, получим

$$F(t, a, \varepsilon, \delta) = -2\gamma'_-c_2t + G^{1/2}(t, a, \varepsilon, \delta) \tag{8.3}$$

$$G(t, a, \varepsilon, \delta) = 2\theta^{-1}\dot{\varepsilon}(0)t - \frac{4}{3}\chi_-c_2^2t^2 + \frac{2}{m\theta}\Phi(t, a, \varepsilon, \delta) \tag{8.4}$$

$$\Phi(t, a, \varepsilon, \delta) = \sqrt{t}\int_0^t Q(t, a, \varepsilon, \delta)\sqrt{t-\tau}\,d\tau \tag{8.5}$$

Интегрирование по формулам (8.1) совместно с решением на каждом шаге интегрирования уравнения (8.2) осуществляется при начальных условиях

$$\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0 = 0, \quad \delta(t_0) = \delta_0 = \upsilon_0, \quad a(t_0) = a_0 = 0 \quad \text{при} \quad t_0 = 0 \tag{8.6}$$

Правые части (7.9) R, S, $F(t, a, \varepsilon, \delta)$ являются непрерывными по всем переменным в области интегрирования, а по переменным ε, δ удовлетворяют условию Липшица [15, 16]. В этом случае совместное решение (7.9), (7.10) существует и единственно.

Решение системы (7.9) по интеграционной схеме (8.1) начинается с шага $k = 0$, на котором для получения δ_1, ε_1 вычисляется $\Delta\delta_0$, $\Delta\varepsilon_0$ по формулам используемого пошагового метода интегрирования, подстановкой вместо t_0, ε_0, δ_0, a_0 начальных данных (8.6), с учетом того что $\Delta\delta_0$, $\Delta\varepsilon_0$ вычисляются по t в точках отрезка $[0, h]$, где h – шаг интегрирования. Определив по начальным данным ε_1, δ_1, т.е. $\delta_1 = \delta(t_1)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$, необходимо для интегрирования при решении (8.2) по формулам (8.3)–(8.5) интерполировать $\delta_1(t)$ и $\varepsilon_1(t)$ на интервале $[0, t_1]$ [15]. На этом шаге $k = 0$ уравнение (8.2) для вычисления a_1 содержит квадратуру по времени от $\delta_1(t)$ и $\varepsilon_1(t)$ (8.5).

Подставляя полученные δ_1 и ε_1, а точнее интерполированные $\delta_1(t)$, $\varepsilon_1(t)$, а также t_1 в правую часть (8.2), получим алгебраическое уравнение относительно a_1, решение которого можно осуществить любым методом [15] определения корня нелинейного уравнения. Определив, таким образом, $a_1 = a(t_1)$, ее можно интерполировать на отрезке $[0, t_1]$.

На k-м шаге интегрирования по итерационной схеме (8.1) для вычисления $\Delta\delta_k$, $\Delta\varepsilon_k$ в качестве аргументов подставляются значения δ_k, ε_k, a_k, вычисленные на предыдущем шаге интегрирования. При вычислении квадратур в $\Delta\delta_k$, $\Delta\varepsilon_k$ по t применяются интерполяционные формулы для $\delta_k(t)$, $\varepsilon_k(t)$, полученные в результате интерполирования по узлам $\delta(t_k) = \delta_k$, $\varepsilon(t_k) = \varepsilon_k$ ($k = 0, 1, 2, .., n$) на отрезке $[0, t_k]$ на предыдущем шаге интегрирования. В результате расчетов по формулам (8.1) получим δ_{k+1}, ε_{k+1} и после их интерполяции на отрезке $[0, t_{k+1}]$ подставим в правую часть (8.2), откуда определим, как из нелинейного уравнения a_{k+1}. Проинтерполировав по узлам $a(t_j) = a_j$ ($j = 0, 1, ..., k, k+1$) получим $a(t)$ на отрезке $[0, t_{k+1}]$.

Продвигаясь шаг за шагом в решении СИДУ (7.9) с дополнительным условием (7.10) по схеме (8.1), (8.2) определим все δ_k, ε_k, a_k ($k = 0, 1, 2, ..., n$). Процесс решения заканчивается, когда a_n и $Q(t_n, a_n, \varepsilon_n, \delta_n)$ обратятся в нуль или будут близки к нулю, т.е. будут одновременно выполняться неравенства $|a_n| < e$, $|Q(t_n, a_n, \varepsilon_n, \delta_n)| \le e$, где e заданная точность расчетов. При этом t_n называется временем отрыва штампа от упругой среды. Шаг интегрирования h можно подобрать для достижения заданной точности расчетов, используя принцип Рунге [15].

Таким образом, в процессе решения определяются все искомые δ_k, ε_k, a_k ($k = 0, 1, 2, ..., n$), а также интерполяционные выражения основных характеристик основной НДКЗ: заглубление штампа в упругую среду $\varepsilon(t)$, как функция времени, его скорость $\dot{\varepsilon}(t)$, а также полуширина зоны контакта $a(t)$. После подстановки найденных $\varepsilon(t)$, $\dot{\varepsilon}(t)$, $a(t)$ в формулы (6.1) и (7.7) определяется распределение поля контактных напряжений в зоне контакта $\varphi(x, t)$ и сила контактного воздействия штампа на упругую полуплоскость $P(t)$, основной НДКЗ для любого момента времени t.

В заключении заметим, что схема решения (8.1), (8.2) может быть упрощена в части решения уравнения (8.2), если заменить его итерационным соотношением. Для этого необходимо произвести оценку разности $a_{k+1} - a_k$ по шагу интегрирования h. Из (8.2) следует, что

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \Delta F_k \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n) \\ \Delta F_k &= F(t_{k+1}, a_{k+1}, \varepsilon_{k+1}, \delta_{k+1}) - F(t_k, a_k, \varepsilon_k, \delta_k) \end{aligned} \tag{8.7}$$

где ΔF_k в (8.7) – полное приращение функции $F(t, a, \varepsilon, \delta)$.

Заменив ΔF_k в (8.7) полным дифференциалом, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка получим

$$\begin{aligned} \Delta F_k &= F'_{t_k}\Delta t_k + F'_{a_k}\Delta a_k + F'_{\varepsilon_k}\Delta\varepsilon_k + F'_{\delta_k}\Delta\delta_k + O((\Delta t_k)^2, (\Delta a_k)^2, (\Delta\varepsilon_k)^2, (\Delta\delta_k)^2) \\ F_k &= F(t_k, a_k, \varepsilon_k, \delta_k) \end{aligned} \tag{8.8}$$

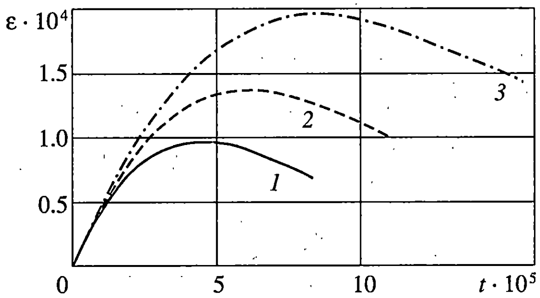
где штрихами обозначены частные производные от $F(t, a, \varepsilon, \delta)$ по переменным $t, a, \varepsilon, \delta$.

Вычислив производные от $F(t, a, \varepsilon, \delta)$ в (8.8), используя выражения (8.3)–(8.5) и подставив (8.8) в (8.7), получим оценку

$$a_{k+1} - a_k = \alpha_k\Delta t_k + O((\Delta t_k)^2, (\Delta a_k)^2, \Delta\varepsilon_k, \Delta\delta_k) \tag{8.9}$$

Учитывая, что $\Delta t_k = h$, а $\Delta\varepsilon_k = O(h^4)$, $\Delta\delta_k = O(h^4)$ согласно методу Рунге-Кутта четвертого порядка, окончательно получим оценку по h:

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \alpha_k h + O(h^2, (\Delta a_k)^2) \\ \alpha_k &= \frac{-2\gamma'_{-}c_2 + \Omega_k}{\theta_k}, \quad \theta_k = 1 - \frac{1}{m\theta G_k^{1/2}}\frac{\partial\Phi_k}{\partial a_k} \quad (\theta_k \ne 0) \end{aligned} \tag{8.10}$$



Фиг. 2

$$\Omega_k = \frac{1}{G_k^{1/2}}\left[\frac{1}{\theta}\dot{\varepsilon}(0) - \frac{4}{3}\chi_- c_2^2 t_k + \frac{1}{m\theta}\frac{\partial \Phi_k}{\partial t_k}\right]$$

$$\Phi_k = \Phi(t_k, a_k, \varepsilon_k, \delta_k), \quad G_k = G(t_k, a_k, \varepsilon_k, \delta_k)$$

Если e_k – погрешность, достигнутая на k-м шаге, а $e = \min(e_k)$ и $\alpha = \max(\alpha_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ то из (8.10) получим оценку для h:

$$h < |\alpha|^{-1} e \tag{8.11}$$

При выполнении условия (8.11) на h нелинейное уравнение (8.2) может быть заменено итерационным соотношением

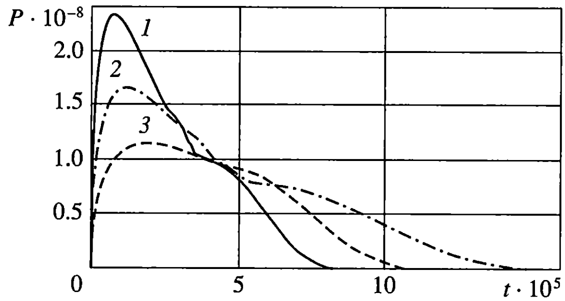
$$a_{k+1} = F(t_k, a_k, \varepsilon_k, \delta_k) \ (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{8.12}$$

где в правой части (8.2) на основании (8.10) вместо t_{k+1}, a_{k+1}, ε_{k+1}, δ_{k+1} подставляются t_k, a_k, ε_k, δ_k, т.е. значения переменных t, a, ε, δ с предыдущего шага. Тогда (8.1) совместно с (8.12) превращается в итерационную схему из трех соотношений

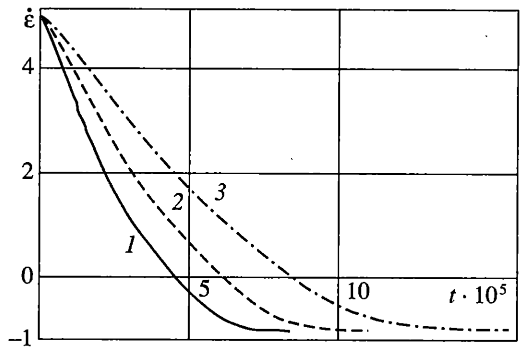
$$\begin{aligned} &\delta_{k+1} = \delta_k + \Delta\delta_k, \quad \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \Delta\varepsilon_k \\ &a_{k+1} = F(t_k, a_k, \varepsilon_k, \delta_k) \ (k = 0, 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{8.13}$$

с начальными условиями (8.6). Решение (8.13) значительно упрощает и ускоряет вычислительный процесс. Сходимость решений в (8.13) обеспечивается условиями сходимости схемы (8.1), (8.2). Обе предложенные схемы вычислений как (8.1), (8.2), так и (8.13) достаточно просто реализуются в среде MathCAD, Maple.

В качестве иллюстрации эффективности вышеизложенного метода решения основной нестационарной динамической контактной задачи об ударе параболического штампа в упругую полуплоскость на фиг. 2 приведены графики заглубления ε [м] жесткого параболического штампа с параметром раствора $\theta = 0.01$ м$^{-1}$, с распределенной массой $m = 150$ кг/м в процессе его удара в упругую полуплоскость с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с. График, изображенный сплошной линией *1*, соответствует ε для полуплоскости из стали ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0.25$), штриховой линией *2* – из титана ($E = 1.2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\nu = 0.3$), штрихпунктирной *3* – из алюминия ($E = 6.75 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\nu = 0.35$). По горизонтальной оси дано время t в секундах. Конец графиков ε по горизонтальной оси t определяет время отрыва штампа от упругой полуплоскости, а также указывает величину заглубления штампа ε в упругой полуплоскости, при котором произошел его отрыв от нее. На фиг. 3 даны графики P [Н] – силы контактного воздействия штампа на упругую полуплоскость для вышеуказанных случаев материалов



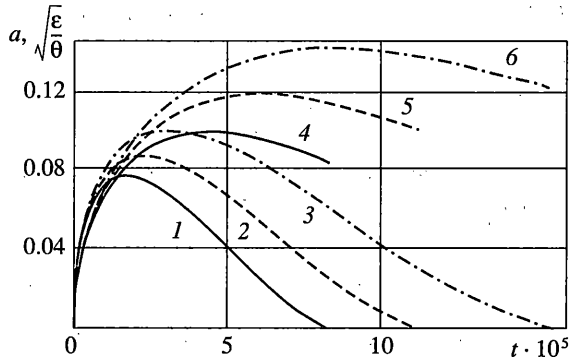
Фиг. 3



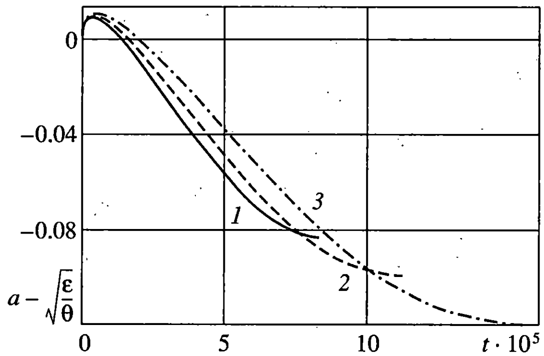
Фиг. 4

полуплоскости. Следует заметить, что моменты времени t максимального заглубления штампа в упругую полуплоскость $\varepsilon(t)$ (фиг. 2) и максимального значения $P(t)$ (фиг. 3) не совпадают для рассматриваемых материалов, что свидетельствует о степени их податливости и инертности при ударном воздействии, т.е. о разности фаз этих характеристик.

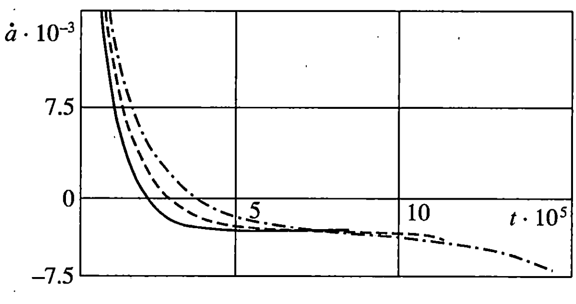
На фиг. 4 даны графики изменения скорости внедрения штампа в упругую полуплоскость $\dot{\varepsilon}$ [м/с] для тех же материалов полуплоскости и в тех же обозначениях. Заметим, что величина скорости отрыва штампа (значения ординат концов графиков) для всех трех случаев близка к 1 м/с. На фиг. 5 даны графики изменения полуширины зоны контакта a [м] и величины "геометрической" зоны контакта – абсциссы пересечения параболического контура штампа $\sqrt{\varepsilon/\theta}$ [м] с осью x. Графики полуширины зоны контакта a (1–3) заканчиваются пересечением горизонтальной оси t (указывая, как и на других рисунках, время отрыва штампа от упругой среды t_*, когда $a(t_*) = 0$), тогда как графики "геометрической" зоны контакта (4–6) в нуль не обращаются в момент отрыва, указывая еще раз на то, что штамп отрывается от материала полуплоскости в заглубленном положении. На фиг. 6 даны графики разности $a - \sqrt{\varepsilon/\theta}$ полуширины истинной зоны контакта и ей соответствующей "геометрической" зоны, которые показывают, что на начальном этапе внедрения штампа в упругую полуплоскость полуширина зоны контакта a превышает "геометрическую" зону контакта $\sqrt{\varepsilon/\theta}$, т.е.



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

выдавливаемый штампом материал выпучивается под осью x на этапе активного внедрения (фиг. 1) и полуширина зоны контакта a превышает абсциссу "геометрической" зоны контакта $\sqrt{\varepsilon/\theta}$. Однако когда штамп еще не дошел до максимального заглубления, полуширина зоны контакта a становится меньшей $\sqrt{\varepsilon/\theta}$ и затем убывает до нуля. Самостоятельный интерес представляет собой скорость изменения ширины зоны контакта $\dot{a}$ [м/с], графики которой для рассматриваемых здесь случаев представлены на фиг. 7.

Автор благодарит В.М. Александрова и С.А. Докучаева за внимание и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеленцов В.Б.* Об одном асимптотическом методе решения нестационарных динамических контактных задач // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 2. С. 303–311.
2. *Зеленцов В.Б.* Нестационарная контактная задача о внедрении жесткого штампа в упругую полуплоскость // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 3. С. 34–44.
3. *Зеленцов В.Б.* О нестационарных динамических контактных задачах теории упругости с изменяющейся шириной зоны контакта // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 1. С. 119–134.
4. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
5. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука. Физматлит, 1995. 351 с.
6. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. 343 с.
9. *Александров В.М.* Асимптотические методы в механике контактных взаимодействий // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 10–19.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
11. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
12. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
13. *Гайер Д.* Лекции по теории аппроксимации в комплексной области. М.: Мир, 1986. 216 с.
14. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
15. *Кунц К.С.* Численный анализ. Киев: Техника, 1964. 390 с.
16. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969. 368 с.

Ростов н/Д

Поступила в редакцию
15.12.2004