

УДК 533.6.013.42

© 2006 г. А.Г. ГОРШКОВ, С.И. ЖАВОРОНОК, А.Л. МЕДВЕДСКИЙ,
Л.Н. РАБИНСКИЙ

ДВИЖЕНИЕ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ

Исследуется нестационарная задача движения абсолютно жесткого тела, ограниченного гладкой поверхностью, под действием акустической волны давления.

Для определения давления на поверхности тела используется модифицированная теория тонкого слоя [1, 2]. При этом давление представляется в виде суперпозиции давления в падающей, отраженной и излученной волнах. Для определения составляющих суммарного давления вводится функция влияния. Давление в отраженной и излученной волнах вычисляется в виде свертки данной функции соответственно с нормальной скоростью в падающей волне и нормальной скоростью движения точек поверхности тела при поступательном и вращательном движении.

Система линеаризованных уравнений движения записывается в интегральной форме и с учетом вида функции влияния приводится к системе интегральных уравнений Вольтерра II рода, решаемой численно методом квадратур.

Приведено сравнение решения задачи для сферического тела нулевой плавучести, подверженного действию плоской акустической волны давления, с существующими аналитическими решениями [3]. Построено также решение задачи о движении осесимметричного тела нулевой плавучести под действием сферической акустической волны давления от произвольно расположенного источника.

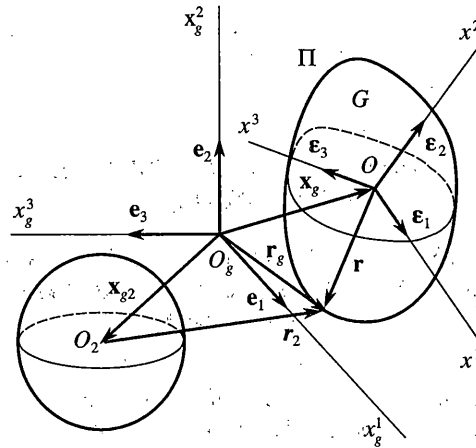
1. Постановка задачи. Рассматривается абсолютно твердое тело G массой m , ограниченное гладкой выпуклой поверхностью Π . Тело погружено в неограниченную акустическую среду со скоростью распространения звука c_0 , плотностью ρ_0 и взаимодействует с нестационарной волной давления p_* . Начальной момент времени $t = 0$ соответствует касанию фронта акустической волны некоторой точки $A \in \Pi$. Движение твердого тела изучается в неподвижной декартовой прямоугольной системе координат $O_g x_g^1 x_g^2 x_g^3$ с ортонормированным базисом e_i ($i = 1, 2, 3$). Также введем связанную с телом систему главных центральных осей $Ox^1 x^2 x^3$ с ортонормированным базисом e_i ($i = 1, 2, 3$) (фиг. 1). Тело обладает "нулевой плавучестью".

Уравнения движения твердого тела имеют вид [1]:

$$m(\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{F} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{J} \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M}$$

где m , \mathbf{J} – масса и момент инерции тела, \mathbf{v} – вектор поступательной скорости центра масс, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела, точкой обозначена производная по времени t .



Фиг. 1

Уравнениям (1.1) соответствуют начальные условия

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0 \quad (1.2)$$

где \$\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\omega}_0\$ – параметры невозмущенного движения тела.

Положение связанной системы координат относительно неподвижной определяется радиус-вектором \$\mathbf{x}_g = (x_g^1, x_g^2, x_g^3)^T\$ и вектором поворота \$\boldsymbol{\alpha} = (\psi, \theta, \gamma)^T\$, где \$\psi\$ – угол рыскания, \$\theta\$ – угол тангажа, \$\gamma\$ – угол крена

$$\dot{\mathbf{x}}_g = \mathbf{A}_v^x \cdot \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_\omega^\alpha \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A}_v^x = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi & \sin\theta & -\cos\theta \sin\psi \\ -\sin\theta \cos\psi \cos\gamma + \sin\psi \sin\gamma & \cos\theta \cos\gamma & \cos\psi \sin\gamma + \sin\theta \sin\psi \cos\gamma \\ \sin\theta \cos\psi \sin\gamma + \sin\psi \cos\gamma & -\cos\theta \sin\gamma & \cos\psi \sin\psi \sin\gamma \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_\omega^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -\text{tg}\theta \cos\gamma & \text{tg}\theta \sin\gamma \\ 0 & \cos\gamma / \cos\theta & -\sin\gamma / \cos\theta \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Соотношениям (1.3) соответствуют начальные условия:

$$\mathbf{x}_g(0) = \mathbf{x}_0, \quad \boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0 \quad (1.4)$$

Движение акустической среды описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta \varphi, \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{w} = \text{grad} \varphi \quad (1.5)$$

где \$\varphi\$ – потенциал скоростей, \$\mathbf{w}\$ – вектор скорости точек акустической среды, \$p\$ – давление в среде. В начальный момент времени среда находится в невозмущенном состоянии, что соответствует однородным начальным условиям

$$\varphi|_{t=0} = \dot{\varphi}|_{t=0} = 0 \quad (1.6)$$

При этом давление p_* и вектор скорости \mathbf{w}_* в падающей волне считаются заданными и удовлетворяют (1.5).

На границе твердого тела ставятся условия непротекания акустической среды, имеющие вид

$$(\mathbf{w}_* + \mathbf{w})|_{\Pi} \cdot \mathbf{n} = v_n|_{\Pi}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

где v_n – нормальная составляющая вектора скорости точек поверхности тела Π ; \mathbf{n} – вектор единичной внешней нормали поверхности Π ; \mathbf{r} – радиус-вектор точки поверхности Π в связанных координатах, точкой обозначено скалярное произведение.

На бесконечности возмущения в акустической среде отсутствуют. В приближенной связанной постановке задачи для определения гидродинамической нагрузки на твердое тело можно воспользоваться рядом гипотез, связывающих давление среды на поверхности тела только с кинематическими параметрами последнего. В публикуемой работе используется модифицированная гипотеза тонкого слоя [2].

2. Линеаризованные уравнения движения абсолютно твердого тела. В рамках линейной модели акустической среды предполагается, что абсолютная величина вектора скорости точек среды \mathbf{w} много меньше скорости звука ($|\mathbf{w}| \ll c_0$). Это позволяет линеаризовать уравнения движения абсолютно твердого тела (1.1) и представить их в виде:

$$\dot{\mathbf{v}} = m^{-1}\mathbf{F}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{M}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{J}^{-1} \quad (2.1)$$

В случае малых возмущений кинематических параметров твердого тела соотношения (1.3) также могут быть линеаризованы

$$\dot{\mathbf{x}}_g = \mathbf{v}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

Если при этом известна зависимость от времени главного вектора \mathbf{F} и вектора главного момента \mathbf{M} внешних сил, то уравнения движения абсолютно твердого тела (2.1), (2.2) могут быть проинтегрированы

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + m^{-1} \int_0^t \mathbf{F}(\tau) d\tau, \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{I}^{-1} \int_0^t \mathbf{M}(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}_g(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau, \quad \boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

3. Внешние силы и моменты, действующие на твердое тело. Ограничимся рассмотрением действия на твердое тело поверхностных сил давления среды.

Главный вектор \mathbf{F} и главный момент \mathbf{M} , приведенные к центру масс тела, вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{F}(t) = - \iint_{\Pi} p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{M}(t) = - \iint_{\Pi} p(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS \quad (3.1)$$

где $p > 0$ – давление акустической среды. Знак “минус” учитывает направление поверхностных сил с учетом выбранного направления нормали к поверхности Π .

Воспользуемся теорией тонкого слоя, согласно которой основной вклад в гидродинамические составляющие нагрузки на тело вносит движение акустической среды по нормали к поверхности Π , при этом движением вдоль поверхности тела в первом при-

ближении можно пренебречь. В этом случае давление на поверхности Π можно представить в виде [2]:

$$p = p_* + p_1 + p_2$$

$$p_1(\mathbf{r}, t) = - \int_0^t w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (3.2)$$

$$p_2(\mathbf{r}, t) = \int_0^t v_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$v_n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_\Pi(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \mathbf{n}$$

где p_* – давление в падающей волне, p_1 – давление в отраженной волне, p_2 – давление в излученной волне, $G_0(\mathbf{r}, t)$ – переходная функция гипотезы тонкого слоя, зависящая от времени и местной средней кривизны $k = k(\mathbf{r}) = k_i^l(\mathbf{r})/2$ граничной поверхности тела Π , w_* – нормальная к поверхности Π составляющая скорости среды в падающей волне, v_n – нормальная к Π составляющая скорости \mathbf{v}_Π точки поверхности Π твердого тела.

Соотношения (3.1) с учетом (3.2), (3.3) можно записать так:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & - \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS + \iint_{\Pi} \int_0^t w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{n} d\tau dS - \\ & - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{v}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\tau dS - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\tau dS \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) = & - \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS + \iint_{\Pi} \int_0^t w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\tau dS - \\ & - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{v}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\tau dS - \iint_{\Pi} \int_0^t \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}(\tau) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\tau dS \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь и далее символом \otimes обозначено прямое произведение тензоров.

Так как для твердого тела векторы \mathbf{r} , \mathbf{n} не зависят от времени, то порядок интегрирования в (3.4), (3.5) может быть изменен, и данные соотношения приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{F}(t) = - \mathbf{F}_*(t) + \int_0^t \mathbf{F}_r(t, \tau) d\tau - \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_v^F(t - \tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_\omega^F(t - \tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_v^F(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} dS \quad (3.7)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_\omega^F(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \quad (3.8)$$

$$\mathbf{F}_r(t, \tau) = \iint_{\Pi} w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(t - \tau) \mathbf{n} dS \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}_*(t) = \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS \quad (3.10)$$

$$\mathbf{M}(t) = -\mathbf{M}_*(t) + \int_0^t \mathbf{M}_r(t, \tau) d\tau - \quad (3.11)$$

$$- \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_v^M(t - \tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}_\omega^M(t - \tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau$$

$$\dot{\mathbf{G}}_v^M(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} dS \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{G}}_\omega^M(t) = \iint_{\Pi} \dot{G}_0(\mathbf{r}, t) (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \quad (3.13)$$

$$\mathbf{M}_r(t, \tau) = \iint_{\Pi} w_*(\mathbf{r}, \tau) \dot{G}_0(\mathbf{r}, t - \tau) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}_*(t) = \iint_{\Pi} p_*(\mathbf{r}, t) \mathbf{r} \times \mathbf{n} dS \quad (3.15)$$

4. Интегральные уравнения движения твердого тела в акустической среде. Подстановка соотношений (3.6)–(3.13) в уравнения (2.3) приводит их к виду

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 - m^{-1} \int_0^t \left[\mathbf{F}_*(\tau) - \int_0^\tau \mathbf{F}_r(\tau, \zeta) d\zeta \right] d\tau - \quad (4.1)$$

$$- m^{-1} \iint_{00}^{t \tau} \dot{\mathbf{G}}_v^F(\tau - \zeta) \cdot \mathbf{v}(\zeta) d\zeta d\tau + m^{-1} \iint_{00}^{t \tau} \dot{\mathbf{G}}_\omega^F(\tau - \zeta) \cdot \boldsymbol{\omega}(\zeta) d\zeta d\tau$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{I} \cdot \int_0^t \left[\mathbf{M}_*(\tau) - \int_0^\tau \mathbf{M}_r(\tau, \zeta) d\zeta \right] d\tau - \quad (4.2)$$

$$- \mathbf{I} \cdot \iint_{00}^{t \tau} \dot{\mathbf{G}}_v^M(\tau - \zeta) \cdot \mathbf{v}(\zeta) d\zeta d\tau + \mathbf{I} \cdot \iint_{00}^{t \tau} \dot{\mathbf{G}}_\omega^M(\tau - \zeta) \cdot \boldsymbol{\omega}(\zeta) d\zeta d\tau$$

Далее воспользуемся известным соотношением

$$\frac{d}{dt} \int_0^t G(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{d}{dt} G(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

С учетом (4.3) преобразуем уравнения движения (4.1), (4.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) + m^{-1} \int_0^t \mathbf{G}_v^F(t-\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau - m^{-1} \int_0^t \mathbf{G}_\omega^F(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau = \\ = \mathbf{v}_0 - m^{-1} \int_0^t [\mathbf{F}_*(\tau) - \mathbf{F}_r(t, \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{I} \cdot \int_0^t \mathbf{G}_v^M(t-\tau) \cdot \mathbf{v}(\tau) d\tau - \mathbf{I} \cdot \int_0^t \mathbf{G}_\omega^M(t-\tau) \cdot \boldsymbol{\omega}(\tau) d\tau = \\ = \boldsymbol{\omega}_0 - \mathbf{I} \cdot \int_0^t [\mathbf{M}_*(\tau) - \mathbf{M}_r(t, \tau)] d\tau \end{aligned} \quad (4.5)$$

Соотношения (4.4), (4.5) представляют собой интегральные уравнения Вольтерра II рода типа свертки с ядрами

$$\mathbf{G}_b^A(t-\tau), \quad A \in \{F, M\}, \quad b \in \{v, \omega\} \quad (4.6)$$

и правыми частями, содержащими производные по времени функций $\mathbf{F}_r(t, \tau)$, $\mathbf{M}_r(t, \tau)$.

Введем неизвестного вектора обобщенного перемещения

$$\mathbf{V}(t) = (\mathbf{v}(t)^T, \boldsymbol{\omega}(t)^T)^T \quad (4.7)$$

система уравнений (4.4), (4.5) сводится к векторному интегральному уравнению Вольтерра II рода:

$$\mathbf{V}(t) + \int_0^t \mathbf{A}(t-\tau) \cdot \mathbf{V}(\tau) d\tau = \mathbf{X}(t) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{A}(t-\tau) = \iint_{\Pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}, t-\tau) dS \quad (4.9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \left\| \begin{array}{cc} m^{-1} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} & -m^{-1} \mathbf{n} \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \\ \mathbf{I} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} & (-\mathbf{I}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \end{array} \right\| \quad (4.10)$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{V}(0) - \int_0^t [\boldsymbol{\Phi}(\tau) - \boldsymbol{\Psi}(t, \tau)] d\tau \quad (4.11)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\tau) = (m^{-1} \mathbf{F}_*(\tau), \mathbf{I} \cdot \mathbf{M}_*(\tau))^T$$

$$\boldsymbol{\Psi}(t, \tau) = \iint_{\Pi} w_*(\mathbf{r}, \tau) G_0(\mathbf{r}, t-\tau) \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{r}, \tau) dS \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{r}) = \left\| \begin{array}{c} m^{-1} \mathbf{n} \\ \mathbf{I} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \end{array} \right\|$$

Переходная функция гипотезы тонкого слоя $G_0(\mathbf{r}, t)$ для гладкой выпуклой поверхности имеет вид [2]:

$$G_0(\mathbf{r}, t) = -c_0^{-1} H(t) R[z(\mathbf{r}, t)], \quad z(\mathbf{r}, t) = c_0 k(\mathbf{r}) t$$

$$R(z) = J_0(z) - z[1 + J_1(z)] + z^2 \left\{ J_0(z) - \frac{\pi}{2} [J_0(z) \mathbf{H}_1(z) - J_1(z) \mathbf{H}_0(z)] \right\} \quad (4.13)$$

где $k(\mathbf{r})$ – средняя кривизна поверхности Π ; $H(t)$ – функция Хевисайда, $\mathbf{H}_\nu(z)$ – функции Струве порядка ν ; $J_n(z)$ – функции Бесселя первого рода порядка n .

Уравнения (2.2) приводятся к интегральному соотношению

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(0) + \int_0^t \mathbf{V}(\tau) d\tau \quad (4.14)$$

относительно вектора $\mathbf{U}(t) = (x_g^1(t), x_g^2(t), x_g^3(t), \psi(t), \theta(t), \gamma(t))^T$ обобщенного перемещения начала подвижной системы координат $Ox^1x^2x^3$.

5. Уравнения движения абсолютно твердого тела вращения. Рассмотрим абсолютно твердое тело, ограниченное гладкой выпуклой поверхностью вращения Π с направляющей Γ , заданной функцией $f(\xi^1) \in C^2[a, b]$, где $\xi^1 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ – осевая координата. Зададим поверхность Π в связанной с центром масс тела системе координат $Ox^1x^2x^3$

$$\Pi: \mathbf{r} = x^i \mathbf{e}_i = \xi^j \mathbf{e}_j, \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2) \quad (5.1)$$

$$x^1 = \xi^1, \quad x^2 = f(\xi^1) \sin \xi^2, \quad x^3 = f(\xi^1) \cos \xi^2, \quad \xi^2 \in [0, 2\pi)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + f'(\xi^1) \sin \xi^2 \mathbf{e}_2 + f'(\xi^1) \cos \xi^2 \mathbf{e}_3 \quad (5.2)$$

$$\mathbf{e}_2 = f(\xi^1) \cos \xi^2 \mathbf{e}_2 - f(\xi^1) \sin \xi^2 \mathbf{e}_3$$

Здесь $\mathbf{e}_\alpha = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^\alpha$ – векторы базиса, нормально связанного с поверхностью Π , ξ^2 – окружная координата.

Координаты вектора единичной нормали $\mathbf{n} = n^i \mathbf{e}_i$ равны

$$n^1 = -f'(\xi^1) / N(\xi^1), \quad n^2 = \sin \xi^2 / N(\xi^1), \quad n^3 = \cos \xi^2 / N(\xi^1) \quad (5.3)$$

$$N(\xi^1) = \sqrt{1 + [f'(\xi^1)]^2}$$

Главные и средняя кривизны поверхности Π определяются соотношениями:

$$k_1(\mathbf{r}) = k_1(\xi^1) = f''(\xi^1) [N(\xi^1)]^{-3/2} \quad (5.4)$$

$$k_2(\mathbf{r}) = k_2(\xi^1) = -f(\xi^1)^{-1} [N(\xi^1)]^{-3/2}$$

$$k(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(k_1(\mathbf{r}) + k_2(\mathbf{r})) = \frac{f''(\xi^1) f(\xi^1) - [f'(\xi^1)]^2 - 1}{2f(\xi^1) [N(\xi^1)]^{3/2}} \quad (5.5)$$

Входящее в (4.10), (4.12) векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{n}$ имеет вид

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = \frac{F(\xi^1)}{N(\xi^1)} [-\cos \xi^2 \mathbf{e}_2 + \sin \xi^2 \mathbf{e}_3], \quad F(\xi^1) = f'(\xi^1) f(\xi^1) + \xi^1 \quad (5.6)$$

Определим компоненты $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ в соответствии с (4.10), (4.12), (5.1)–(5.3):

$$\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \frac{1}{[N(\xi^1)]^2} \begin{vmatrix} [f'(\xi^1)]^2 & -f'(\xi^1) \sin \xi^2 & f'(\xi^1) \cos \xi^2 \\ -f'(\xi^1) \sin \xi^2 & \sin^2 \xi^2 & \sin \xi^2 \cos \xi^2 \\ f'(\xi^1) \cos \xi^2 & \sin \xi^2 \cos \xi^2 & \cos^2 \xi^2 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{n} \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) = \frac{F(\xi^1)}{[N(\xi^1)]^2} \begin{vmatrix} 0 & f'(\xi^1) \cos \xi^2 & -f'(\xi^1) \sin \xi^2 \\ 0 & -\sin \xi^2 \cos \xi^2 & \sin^2 \xi^2 \\ 0 & -\cos^2 \xi^2 & \sin \xi^2 \cos \xi^2 \end{vmatrix} \quad (5.8)$$

$$-(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} = -(\mathbf{n} \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}))^T \quad (5.9)$$

$$-(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) = \left[\frac{F(\xi^1)}{N(\xi^1)} \right]^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos^2 \xi^2 & \sin \xi^2 \cos \xi^2 \\ 0 & \sin \xi^2 \cos \xi^2 & -\sin^2 \xi^2 \end{vmatrix} \quad (5.10)$$

Вычислим интегралы, входящие в (4.9). С учетом (5.5) $k(\mathbf{r}) = k(\xi^1)$, $G_0(\mathbf{r}, t - \tau) = G_0(\xi^1, t - \tau)$, следовательно

$$\iint_{\Pi} \mathbf{B}(\mathbf{r}) G_0(\mathbf{r}, t - \tau) dS = \int_0^L G_0(\xi^1, t - \tau) \bar{\mathbf{B}}(\xi^1) d\xi^1 \quad (5.11)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(\xi^1) = f(\xi^1) N(\xi^1) \int_0^{2\pi} \mathbf{B}(\xi^1, \xi^2) d\xi^2$$

В свою очередь, с учетом (5.7)–(5.10) из (5.11) и (4.10) следует

$$\bar{\mathbf{B}}(\xi^1) = \begin{vmatrix} m^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{11}(\xi^1) & m^{-1} \bar{\mathbf{B}}_{12}(\xi^1) \\ \mathbf{I} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{21}(\xi^1) & \mathbf{I} \cdot \bar{\mathbf{B}}_{22}(\xi^1) \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{11}(\xi^1) = \frac{\pi f(\xi^1)}{N(\xi^1)} \text{diag} \left\| 2[f'(\xi^1)]^2 \quad 1 \quad 1 \right\| \quad (5.13)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{12}(\xi^1) = \bar{\mathbf{B}}_{21}(\xi^1) = \frac{\pi f(\xi^1) F(\xi^1)}{N(\xi^1)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.14)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{22}(\xi^1) = \frac{\pi f(\xi^1) [F(\xi^1)]^2}{N(\xi^1)} \text{diag} \left\| 0 \quad 1 \quad 1 \right\| \quad (5.15)$$

Составляющие вектора свободных членов (4.11) в соответствии с (4.12), (5.3), (5.6) имеют вид

$$\Phi(\tau) = \int_0^L f(\xi^1) \int_0^{2\pi} p_*(\xi^1, \xi^2, \tau) \bar{\Phi}(\xi^1, \xi^2) d\xi^2 d\xi^1 \quad (5.16)$$

$$\Psi(t, \tau) = \int_0^L f(\xi^1) G_0(\xi^1, t - \tau) \int_0^{2\pi} w_*(\xi^1, \xi^2, \tau) \bar{\Phi}(\xi^1, \xi^2) d\xi^2 d\xi^1 \quad (5.17)$$

$$\bar{\Phi}(\xi^1, \xi^2) = (-m^{-1} f'(\xi^1), m^{-1} \sin \xi^2, m^{-1} \cos \xi^2, 0, -J_{22}^{-1} F(\xi^1) \cos \xi^2, J_{33}^{-1} F(\xi^1) \sin \xi^2)^T \quad (5.18)$$

Определим массово-инерционные параметры твёрдого тела

$$m = \pi \rho \int_0^L [f(\xi^1)]^2 d\xi^1 \quad (5.19)$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \rho \iiint_V \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} dV, \quad \mathbf{J} = \hat{\mathbf{J}} \mathbf{G} - \hat{\mathbf{J}} \quad (5.20)$$

где ρ – плотность тела, $\hat{\mathbf{J}}$ – тензор инерции твёрдого тела относительно начала координат, \mathbf{J} – тензор инерции твёрдого тела относительно осей координат, $J_i^i = \hat{J}_i^i$ – первый инвариант тензора, $\hat{\mathbf{J}}, \mathbf{G}$ – метрический тензор.

В главных центральных координатах $Ox^1x^2x^3$ метрический тензор \mathbf{G} равен единичному тензору \mathbf{E} , а физические компоненты тензора \mathbf{J} имеют вид:

$$J_{\alpha\alpha} = J_\alpha = \rho \int_0^{2\pi} d\xi^2 \int_0^L d\xi^1 \int_0^{f(\xi^1)} ((x^\beta)^2 + (x^\gamma)^2) r dr, \quad J_{\alpha\beta} = 0$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta \neq \gamma)$$

$$x_1 = \xi^1, \quad x_2 = r \sin \xi^2, \quad x_3 = r \cos \xi^2, \quad r \in [0, f(\xi^1)] \quad (5.21)$$

$$J_{11} = \frac{\pi}{2} \rho \int_0^L [f(\xi^1)]^4 d\xi^1$$

$$J_{22} = J_{33} = \pi \rho \int_0^L [f(\xi^1)]^2 \left\{ \frac{1}{4} [f(\xi^1)]^2 + (\xi^1)^2 \right\} d\xi^1$$

Отметим, что в силу (4.10), (5.11)–(5.15) решение для угловой скорости $\omega_1(t)$ имеет вид $\omega_1(t) \equiv \omega_1(0)$ и, следовательно, соответствующее уравнение может быть исключено из системы (4.8). Кроме того, уравнение относительно поступательной скорости $v_1(t)$ является независимым.

6. Определение давления и скорости в падающей волне. Будем рассматривать два типа падающей волны. 1. *Плоская косая волна постоянной амплитуды.* Давление и

скорость в плоской волне, распространяющейся в направлении единичного вектора $\mathbf{n}_* = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)^T$ в неподвижной системе координат $O_g x_g^1 x_g^2 x_g^3$ описываются соотношениями

$$p_*(x_g^j, t) = p_{*0} H(c_0 t - f(x_g^j, \alpha_i)), \quad f(x_g^j, \alpha_i) = x_g^i \cos \alpha_i + C \quad (6.1)$$

$$\mathbf{w}_* = w_*^i \mathbf{e}_i, \quad w_*^i(x_g^i, t) = \frac{P_{*0}}{\rho_0 c_0} \cos \alpha_i H(c_0 t - f(x_g^j, \alpha_i)) \quad (6.2)$$

Здесь константа $C \in \mathbb{R}$ определяет положение фронта волны при $t = 0$, p_{*0} – давление на фронте падающей волны.

2. *Сферическая волна экспоненциально затухающей амплитуды.* Давление и скорость в акустической среде в этом случае имеют вид:

$$p_* = \frac{P_{*0} L}{r_2} e^{-\beta(c_0 t - r_2)} H(c_0 t - r_2) \quad (6.3)$$

$$w_* = \frac{P_{*0} L}{\rho_0 c_0 r_2} \left\{ e^{-\beta(c_0 t - r_2)} \left[1 - \frac{1}{\beta r_2} \right] + \frac{1}{\beta r_2} \right\} H(c_0 t - r_2) \quad (6.4)$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+$ характеризует интенсивность затухания давления (имеет размерность c^{-1}), $r_2^2 = (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_{g2}) \cdot (\mathbf{x}_g - \mathbf{x}_{g2})$ – расстояние от источника волны с координатами точки $O_2(x_{g2}^1, x_{g2}^2, x_{g2}^3)$, L – характерный линейный размер. Вектор скорости $\mathbf{w}_* = w_* \mathbf{n}_* = w_*^i \mathbf{e}_i$, где \mathbf{n}_* – внешняя нормаль к фронту волны (сфере радиуса $c_0 t$), в базисе \mathbf{e}_i системы координат $O_g x_g^1 x_g^2 x_g^3$ имеет следующие компоненты:

$$w_*^i = (w_*/r_2)(x_g^i - x_{g2}^i) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.5)$$

7. Методика численного решения интегральных уравнений движения. Соотношение (4.8) представляет собой интегральное уравнение Вольтера II рода, его численное решение не требует регуляризации и может быть найдено методом квадратур [4].

Будем искать решение задачи (4.8), (4.14) на отрезке $[0, T]$. Введем конечно-разностную сетку T_h :

$$T_h = \{ih_t\}, \quad h_t = T/N \quad (i = 0, \dots, N) \quad (7.1)$$

где N – количество отрезков разбиения, h_t – постоянный шаг. Ядро $A(t)$ интегрального уравнения непрерывно на множестве

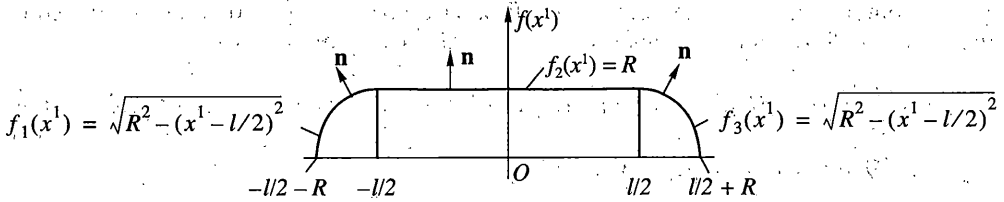
$$\Omega = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2: t \in [0, T], \tau \in [0, t]\}$$

Следовательно, интеграл в (4.8) может быть приближенно заменен квадратурной формулой трапеций

$$\int_0^t \mathbf{A}(t-\tau) \mathbf{V}(\tau) d\tau \approx h_t \sum_{i=0}^{M(t)} a_i \mathbf{A}(t-t_i) \mathbf{V}(t_i) \quad (7.2)$$

$$a_j = 1 \quad (j \in 1, 2, \dots, i-1), \quad a_0 = a_i = 1/2, \quad M(t) = [t/h_t] \quad (7.3)$$

где a_i – коэффициенты квадратуры [4], знаком $[\cdot]$ обозначена целая часть числа.



Фиг. 2

Используем аппроксимацию интегрального оператора, входящего в соотношения (4.8), (4.12), в момент времени t_j :

$$\int_0^{t_j} \mathbf{A}(t_j - \tau) \mathbf{V}(\tau) d\tau \approx h_i \sum_{i=1}^j \bar{\mathbf{A}}_{ji} \mathbf{V}_i, \quad \bar{\mathbf{A}}_{ji} = a_j \mathbf{A}(t_j - t_i), \quad \mathbf{V}_i = \mathbf{V}(t_i) \quad (7.4)$$

Для вычисления двумерных интегралов по границе области G введем поверхностную сетку

$$\Pi_h = \{(\xi_k^1, \xi_m^2): \xi_k^1 = kh_1, \xi_m^2 = mh_2\} \quad (7.5)$$

$$h_1 = L/N_1, \quad h_2 = 2\pi/N_2 \quad (k = 0, \dots, N_1, m = 0, \dots, N_2)$$

Интегралы, входящие в соотношения (5.11), (5.17), (5.21), заменим квадратурными формулами трапеций

$$\int_0^{L/2} \int_0^{2\pi} \Phi(\xi^1, \xi^2) d\xi^2 d\xi^1 \approx h_1 h_2 \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} a_m a_n \Phi_{mn}, \quad \Phi_{mn} = \Phi(\xi_m^1, \xi_n^2) \quad (7.6)$$

где a_n – коэффициенты квадратуры (7.3).

Таким образом, решение интегрального уравнения (4.8), (4.14) приводится к следующему дискретному аналогу:

$$\mathbf{V}_i = (\mathbf{E} + h_i \mathbf{A}_{ii})^{-1} \left[-h_i \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{A}_{ij} \cdot \mathbf{V}_j + (\mathbf{E} - h_i \mathbf{A}_{i0}) \cdot \mathbf{V}_0 + \mathbf{X}_i \right], \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}(0) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{U}_i = (\mathbf{E} + h_i \mathbf{A}_{ii})^{-1} \cdot \mathbf{U}_{i-1}, \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}(0) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7.8)$$

8. Динамика цилиндрических и сферических твердых тел под воздействием акустической волны давления. Рассмотрим абсолютно твердое тело цилиндрической формы радиуса R и длины l , имеющее полусферические законцовки радиуса R (фиг. 2). Ограничимся телом “нулевой плавучести”.

Введем следующие безразмерные параметры:

$$\tilde{f} = \frac{f}{L}, \quad \tilde{\xi}^1 = \frac{\xi^1}{L} = \frac{\xi^1}{2R+l}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8.1)$$

$$\lambda = l/(2R), \quad \mu = 2(1 + \lambda), \quad L = 2R + l$$

$$\tilde{m} = m/(\rho_0 L^3) = \rho_0 V/(\rho_0 L^3), \quad \tilde{J}_\alpha = J_{\alpha\alpha}/(\rho_0 L^5) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (8.2)$$

$$\tilde{t} = tL/c_0, \quad \tilde{v}_i(\tilde{t}) = v_i(\tilde{t})/c_0, \quad \tilde{x}_g^i(\tilde{t}) = x_g^i(\tilde{t})/L \quad (8.3)$$

где λ – удлинение цилиндрической части. Для рассматриваемого тела вращения соотношения (8.1), (8.3) имеют следующий вид (тильды всюду опущены):

$$f(\xi^1) = \frac{1}{\mu} \{ f_1(\xi^1) [H(\mu\xi^1 + \lambda + 1) - H(\mu\xi^1 + \lambda)] + f_2(\xi^1) [H(\mu\xi^1 + \lambda) - H(\mu\xi^1 - \lambda)] + f_3(\xi^1) [H(\mu\xi^1 - \lambda) - H(\mu\xi^1 - \lambda - 1)] \} \quad (8.4)$$

$$f_1(\xi^1) = \sqrt{1 - (\mu\xi^1 + \lambda)^2}, \quad f_2(\xi^1) = 1, \quad f_3(\xi^1) = \sqrt{1 - (\mu\xi^1 - \lambda)^2} \quad (8.5)$$

$$m = \frac{\pi \cdot 2 + 3\lambda}{12(1 + \lambda)^5}, \quad J_1 = \frac{\pi(8 + 15\lambda)}{480(1 + \lambda)^5} \quad (8.6)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{960(1 + \lambda)^5} [20\lambda^3 + 40\lambda^2 + 45\lambda + 16] \quad (8.7)$$

Уравнение (4.8), (4.14) и соответствующий им дискретный аналог (7.7), (7.8) приведем к безразмерной форме записи в соответствии с (8.3)–(8.7).

1. *Взаимодействие сферического тела с плоской волной давления.* Рассмотрим движение абсолютно твердого шара ($\lambda = 0$) радиуса $R = 1$, взаимодействующего с плоской акустической волной давления ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2$) единичной амплитуды $p_{*0} = 1, C = 1$. Данная задача имеет точное решение [3] и используется в качестве эталонной.

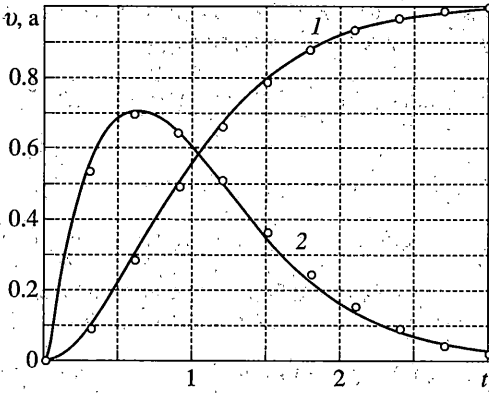
В силу осевой симметрии задачи уравнение приводится к одному скалярному интегральному уравнению относительно скорости $v_1(t)$:

$$v_1(t) + 2\pi m^{-1} \int_0^t v_1(\tau) \widehat{G}_0(t - \tau) \int_0^L [f'(\xi^1)]^2 / N(\xi^1) d\xi^1 d\tau = \\ = 2\pi m^{-1} \int_0^L \int_0^t [p_*(\xi^1, \tau) + w_*^1(\xi^1, \tau) \widehat{G}_0(t - \tau)] f'(\xi^1) f \xi^1 d\xi^1 d\tau \quad (8.8)$$

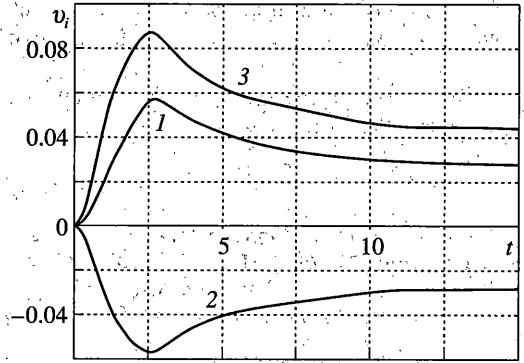
Выражение для функции влияния примет вид $\widehat{G}_0(t) = -R(t)H(t)$, где $R(t)$ определяется соотношением (4.13) с учетом $k(\mathbf{r}) \equiv 1$. Давление и скорость в падающей волне определяются соотношениями (6.1), (6.2). Кривые зависимости скорости v (кривая 1) и ускорения a (кривая 2) центра масс шара от безразмерного времени приведены на фиг. 3 в сравнении с точным решением [3] (светлые точки).

2. *Действие на цилиндрическое тело сферической волны давления от произвольно расположенного источника.* Рассмотрим задачу о взаимодействии тела цилиндрической формы со сферическими законцовками со сферической акустической волной давления, источник которой расположен в точке с безразмерными координатами (x_g^1, x_g^2, x_g^3) .

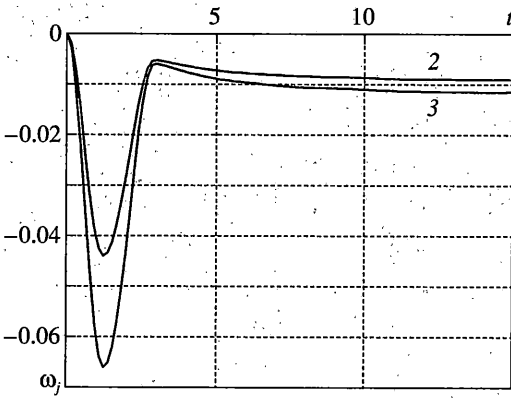
Рассматривается тело радиуса $R = 1$ с удлинением цилиндрической части $\lambda = 4$. Координаты источника сферической волны $x_g^1 = -1, x_g^2 = 1, x_g^3 = -1.5$. Давление и скорость в падающей волне определяются соотношениями (6.3), (6.4) при $p_{*0} = 1, \beta = 0.8$. Кривые зависимостей компонентов векторов поступательной \mathbf{v} (v_1, v_2, v_3) и угловой $\boldsymbol{\omega}$ (ω_2, ω_3) скоростей центра масс тела вращения от времени t показаны на фиг. 4 (кривые 1–3) и на фиг. 5 (кривые 2, 3); аналогичные кривые для линейного \mathbf{a} (a_1, a_2, a_3) и углового $\boldsymbol{\Phi}$ (Φ_2, Φ_3) ускорения приведены на фиг. 6, 7 ($i = 1, 2, 3, j = 2, 3$).



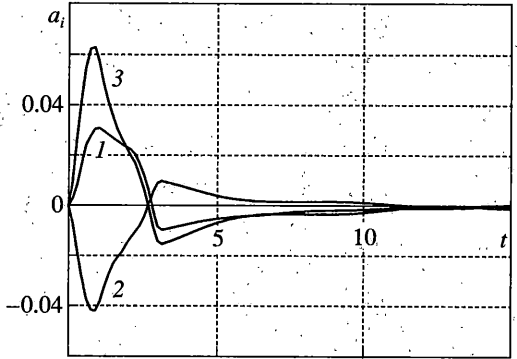
Фиг. 3



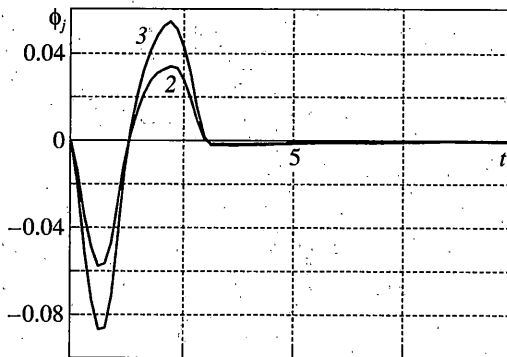
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Предложенный подход может быть использован при решении задач движения упругих тел в акустической среде под действием нестационарных волн давления.

Работа выполнена в рамках программы “Университеты России” (УР.04.01.127) и проекта РФФИ (05-08-01497).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 592 с.
2. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Егорова О.В. Плоская задача дифракции акустической волны давления на криволинейном препятствии // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 3. С. 148–154.
3. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л.: Судостроение, 208 с.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

Москва

Поступила в редакцию
01.04.2005