

УДК 539.3; 534.1

© 2006 г. В.А. КРЫСЬКО, И.В. КРАВЦОВА

**УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ
ГИБКИХ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Предложен метод управления хаотическими колебаниями гибких сферических оболочек при действии поперечной знакопеременной нагрузки путем синхронного воздействия опорного знакопеременного момента или поперечной локальной также знакопеременной нагрузки.

1. Введение. Исследованию хаотических колебаний гибких пластин и оболочек за последние годы начинает уделяться все больше внимания [1–12].

Проблема управления хаосом в детерминированных системах является чрезвычайно сложным и перспективным направлением научных исследований, поскольку хаотические колебания встречаются довольно часто и могут возникать в системах различной природы.

Впервые задача об управлении хаосом была поставлена в [13–15] и ставшей классической работе [16]. В обзоре [17] можно найти ссылки на более ранние источники, которые в той или иной степени имеют отношение к данной идее. Задачи об управлении хаосом рассматривались в гидродинамике [18], химии [19], биологии и медицине [20]. В теории оболочек этой проблеме уделено недостаточное внимание.

2. Метод и алгоритм расчета. Рассмотрим пологую сферическую осесимметричную оболочку, представляющую собой замкнутую двухмерную область пространства R^2 в полярной системе координат, введенной следующим образом: $\Omega = \{(r, z) | r \in [0, b], -h/2 \leq z \leq h/2\}$. Система уравнений динамики пологих осесимметричных оболочек запишется в виде [21]:

$$w'' + \varepsilon w' = -\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} - \frac{2\partial^3 w}{r \partial r^3} + \frac{1\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} - \frac{1\partial w}{r^3 \partial r} - \frac{\Phi}{r} \left(1 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left(1 - \frac{1\partial w}{r \partial r}\right) + 4q$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1\partial \Phi}{r \partial r} - \frac{1\partial \Phi}{r^2 \partial r} = \frac{\partial w}{\partial r} \left(1 - \frac{1\partial w}{2r \partial r}\right), \quad \Phi = \frac{\partial F}{\partial r} \tag{2.1}$$

$$\bar{t} = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma R^2}}, \quad \bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{gR}{\gamma E h}} \varepsilon, \quad \bar{F} = \eta \frac{F}{Eh^3}, \quad \bar{w} = \sqrt{\eta} \frac{w}{h}, \quad \bar{r} = b \frac{r}{c}$$

$$\bar{q} = \bar{q}_3 = \frac{\sqrt{\eta} q_3 (R/h)^2}{4E}, \quad \eta = 12(1 - \nu^2), \quad b = \sqrt[4]{\eta} \frac{c}{\sqrt{Rh}}$$

Где t – время; ε – коэффициент сопротивления среды, в которой происходит движение оболочки; F – функция усилий; w – функция перемещений; R ; c – главный радиус кривизны у опорного контура и радиус опорного контура в окружном направлении соответственно; h – толщина оболочки; b – параметр пологости; ν – коэффициент Пуассона; r – расстояние от оси вращения до точки на срединной поверхности; $q = q_0 \sin(\omega_0 t)$ – параметр внешней нагрузки; q_0 – амплитуда вынуждающей нагрузки, ω_0 – частота соб-

ственных линейных колебаний, ω_p – частота возбуждения. Для краткости черточка над безразмерными величинами в уравнении (2.1) опущена. Производные по t и далее будем обозначать штрихом. К системе (2.1) следует присоединить граничные и начальные условия, а также условия в вершине. Для шарнирно подвижного контура в меридиональном направлении граничные условия запишутся в виде:

$$\Phi = w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = b \quad (2.2)$$

Для случая действия опорного знакопеременного момента неоднородные граничные условия будут

$$\Phi = w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial w}{\partial r} = M_0 \sin(\omega_p t) \quad \text{при } r = b \quad (2.3)$$

Начальные условия:

$$w = f_1(r, 0), \quad w' = f_2(r, 0), \quad 0 \leq t < \infty \quad (2.4)$$

В малой окрестности вершины оболочки справедливы следующие соотношения:

$$\Phi \approx Ar, \quad \Phi'_r \approx A, \quad w \approx B + Cr^2, \quad w'_r \approx 2Cr, \quad w''_{rr} \approx 2C, \quad w'''_{rrr} \approx 0 \quad (2.5)$$

Для сведения распределенной системы (2.1)–(2.5) к системе с сосредоточенными параметрами воспользуемся методом конечных разностей с аппроксимацией $O(\Delta^2)$ по пространственной переменной r .

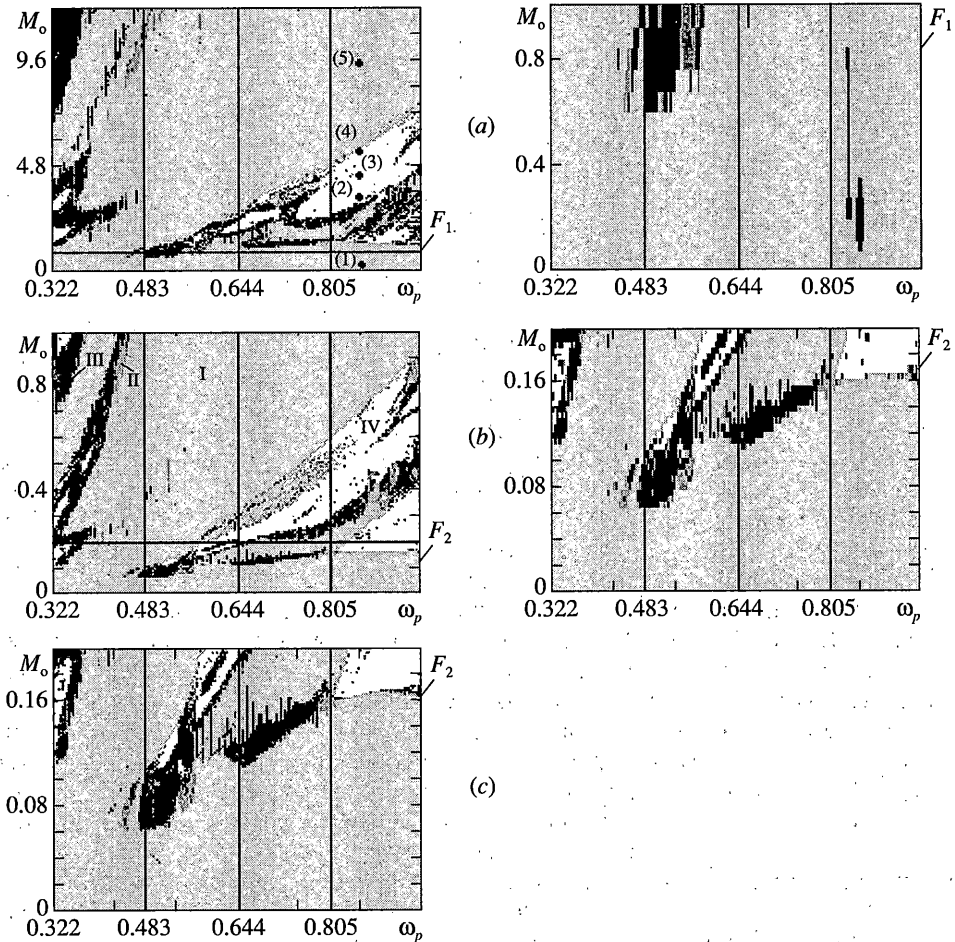
После сведения задачи (2.1)–(2.5) к нормальному виду, задачу Коши будем решать методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Шаг по времени выбирается из условия устойчивости решения ($\Delta t = 3.90625 \cdot 10^{-3}$). Достоверность получаемых результатов для гармонических и хаотических колебаний была показана в работе [9, 10].

В публикуемой работе рассматривается решение задачи при $n = 20$. Предварительно исследовался вопрос о сходимости решения в зависимости от числа n разбиения радиуса оболочки [9] и было установлено, что $n = 20$ является оптимальным в гармонических и хаотических областях (совпадение спектров мощности для $2n$ и n) карт характера колебаний для управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$.

3. Исследования хаотических колебаний пологих оболочек при действии знакопеременных поперечной распределенной нагрузки и опорного момента. Изучим колебания шарнирно опертых по контуру оболочек ($b = 4$) при действии двух типов нагружения: гармонических $M = M_0 \sin(\omega_p t)$ воздействий на опорный контур (2.3) при $q = 0$ в (2.1), т.е. рассматриваются колебания оболочки при неоднородных граничных условиях; равномерно распределенной знакопеременной поперечной нагрузки $q = q_0 \sin(\omega_p t)$ в (2.1) с шарнирно подвижным опорным контуром (2.2).

В данных динамических задачах переход колебаний механической системы из гармонических в хаотические происходит по сценарию Фейгенбаума [22] и по модифицированному сценарию Рюэля–Такенса–Ньюхауза. Переход колебаний из гармонических в хаотические по классическому сценарию Рюэля–Такенса–Ньюхауза происходит через появление двух линейно независимых от частоты вынуждающей нагрузки частот. Далее при незначительном изменении амплитуды вынуждающей нагрузки наступает хаос. В отличие от классического сценария, модифицированный сценарий Рюэля–Такенса–Ньюхауза в данных динамических задачах развивается после появления бифуркации Хопфа. Увеличение параметра q_0 приводит к появлению второй независимой частоты и линейных комбинаций с частотой вынуждающей силы.

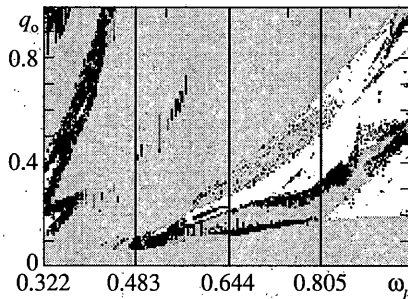
Следует отметить, что в первом типе задачи сценарий Фейгенбаума развивается на частоте $\omega_p/3$. Для таких сложных систем, как гибкие оболочки, данный сценарий имеет место. Было найдено пять бифуркаций Хопфа и вычислена константа Фейгенбаума,



Фиг. 1

равная 4.60863204. Теоретическое же значение равно 4.66916224.... Константа Фейгенбаума для второго типа нагрузки равна 4.6689... (шесть бифуркаций Хопфа). Различие теоретических расчетов с данным численным экспериментом для первого типа составляет 1.289%, а для второго – 0.004%. Кроме того, и в том и другом типе нагружения наблюдается модифицированный сценарий Рюэля–Тakens–Ньюхауса (переход от гармонических колебаний в хаотические через две линейно независимые частоты и их линейные комбинации).

В результате колебательного процесса осесимметричной полой оболочки с неоднородными граничными условиями (2.3) $b = 4$ появляются хаотические аттракторы – аттракторы Смейла. Такие аттракторы называют аттракторами Фейгенбаумовского типа или странными аттракторами. При исследовании хаотических колебаний в данной работе не строились диаграммы бифуркаций, как это обычно делается при исследовании функций в случае широкого класса двузначных отображений интервала в себя, а решалась обширная система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволило построить шкалы идентификации характера колебаний на основе анализе спектра мощности $S(\omega_p)$ сигналов и ляпуновских показателей, которые зависят от $\{M_0, \omega\}$ и $\{q_0, \omega_p\}$. На фиг. 1 приведены карты идентификации характера



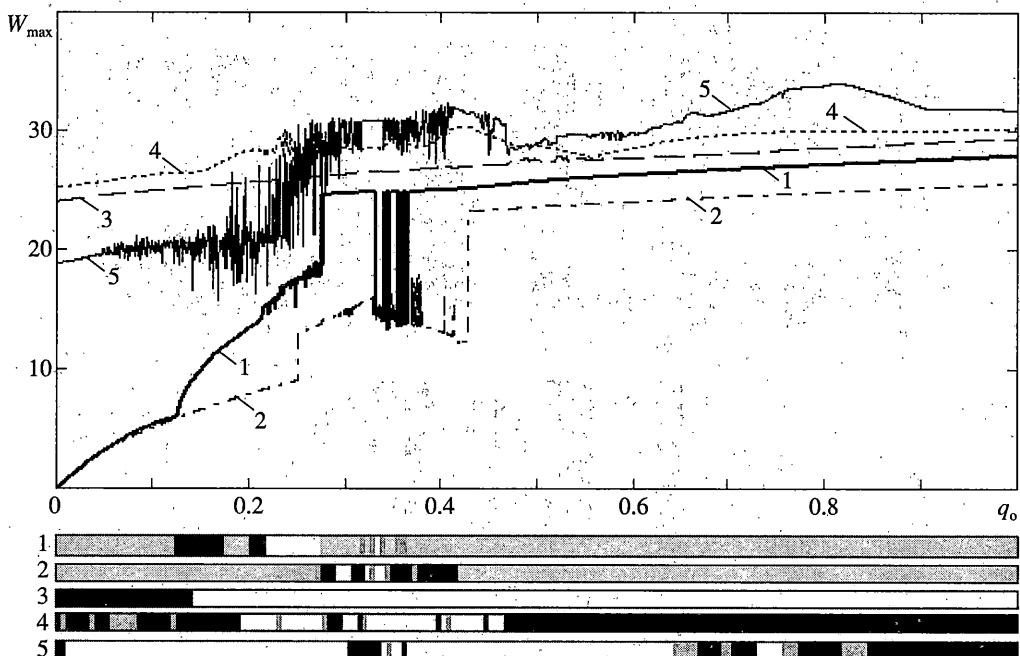
Фиг. 2

колебаний для управляющих параметров $\{M_0, \omega_p\}$ с различным шагом разбиения N по параметру M_0 : фиг. 1, *a* – карта $\{M_0, \omega_p\}$ получена для $N = 4.8 \cdot 10^{-2}$ и приведен увеличенный фрагмент F_1 , выделенный из карты $\{M_0, \omega_p\}$; фиг. 1, *b* – карта $\{M_0, \omega_p\}$ получена для $0 \leq M_0 \leq 1$ с шагом $N = 5 \cdot 10^{-3}$, а также приведен увеличенный фрагмент F_2 , выделенный из карты $\{M_0, \omega_p\}$; фиг. 1, *c* – фрагмент карты $\{M_0, \omega_p\}$ $0.2 \leq M_0 \leq 0.4$ был посчитан с шагом $N = 4.16667 \cdot 10^{-4}$. Сопоставление его с фрагментом F_2 дает возможность сделать вывод об их полном совпадении, т.е. процесс разбиения по N сошелся. На фиг. 1, *b* цифрами обозначены следующие области: I – область гармонических колебаний (светло-серый цвет), II – область независимых частот и их линейных колебаний (темно-серый цвет), III – область бифуркаций Хопфа (черный цвет), IV – область хаоса (белый цвет). Далее в работе используются те же условные обозначения.

Для той же оболочки при действии поперечной знакопеременной распределенной нагрузки на фиг. 2 приведена карта характера колебаний для управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$. Сравнение полученной карты и карты, приведенной на фиг. 1, *b* для $0 \leq M_0 \leq 1$ и $0 \leq q_0 \leq 1$, дает возможность сделать вывод, что эти карты качественно близки, несмотря на то, что внешние воздействия принципиально различны.

4. Управление хаотическими колебаниями гибких сферических оболочек. Известно, что в хаотический аттрактор динамической системы встроено счетное множество седловых циклов различных периодов, и при эволюции на нем изображающая точка время от времени попадает в малую окрестность каждой из них. Если в этот момент с помощью управляющего воздействия стабилизировать седловой цикл, то траектория останется в его окрестности и система начнет совершать периодические движения. Таким образом, задача об управлении хаосом сводится к задаче о стабилизации определенных орбит, встроенных в хаотический аттрактор. Вопросы управления хаосом во взаимодействующих системах непосредственно связаны с задачами управляемой (или принудительной) синхронизации. С помощью целенаправленных воздействий определенные хаотические подмножества, соответствующие синхронным движениям идентичных систем, можно преобразовать в устойчивые по одним собственным направлениям при сохранении неустойчивости по другим. В результате будет осуществляться управляемый переход от несинхронных хаотических колебаний к режиму полной синхронизации хаоса. В работе указанное управление осуществлялось с помощью целенаправленного воздействия на оболочку, загруженную равномерно распределенной знакопеременной нагрузкой $q = q_0 \sin(\omega_p t)$ с учетом двух типов периодических возмущений: дополнительная локальная поперечная знакопеременная нагрузка была приложена к пяти точкам $8 \leq i \leq 12$ ($0 \leq i \leq n$; $i, n \in \mathbb{Z}$); дополнительный опорный знакопеременный момент.

Эти возмущения рассматривались двух типов: при фиксированной частоте и синхронизации частот.



Фиг. 3

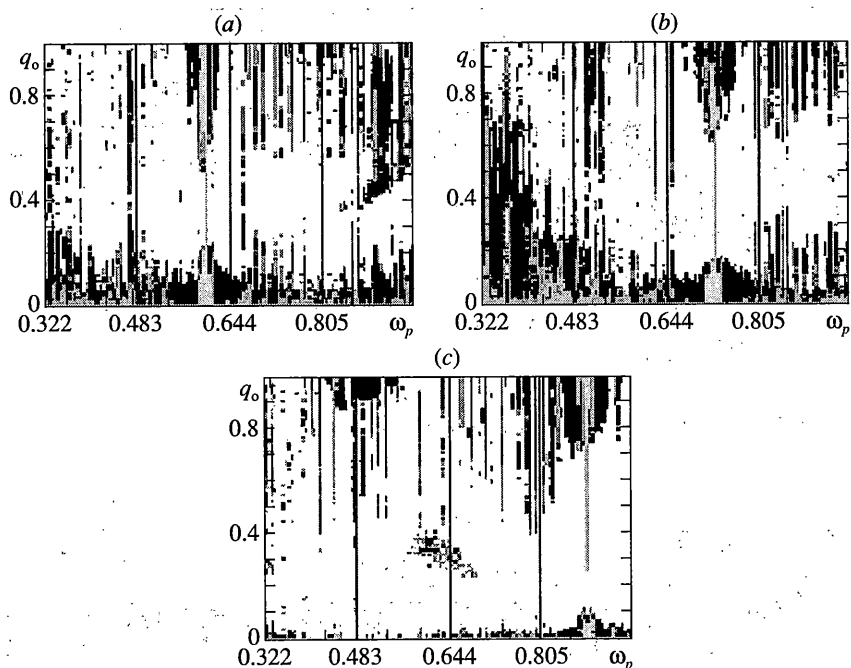
Проанализируем поведение системы при воздействии на нее первого типа возмущения – вынуждающей локальной нагрузки. Анализ поведения системы проводился путем рассмотрения результатов численного эксперимента, представленных в графической форме, использовались графики зависимости максимального прогиба оболочки от амплитуды вынуждающей силы и карты характера колебаний в зависимости от управляющих параметров, на которых цветом выделяется режим, в котором работает система. Идентификация режима работы системы производилась методом анализа спектра мощности системы и ляпуновских показателей для данного режима работы.

Рассмотрим зависимость $w_{\max}(q_0)$, когда на систему действует два типа вынуждающей нагрузки: локальная I и распределенная II (фиг. 3). Здесь приведены пять типов нагружения, номера кривых на фиг. 3 и номера задач, приведенных в табл. 1 идентичны.

Собственная частота колебаний оболочки равна $\omega_0 = 0.644$. Воздействие двухчастотных колебаний не улучшает положения, что можно видеть из графиков, в последних трех случаях система работает в режиме гармонических колебаний намного меньше, чем в первых двух случаях.

Таблица 1

№	II	I
1	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	—
2	—	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$
3	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$q_1 = 0.6 \sin(0.6t)$
4	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$q_1 = 0.6 \sin(0.725t)$
5	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$q_1 = 0.6 \sin(0.886t)$



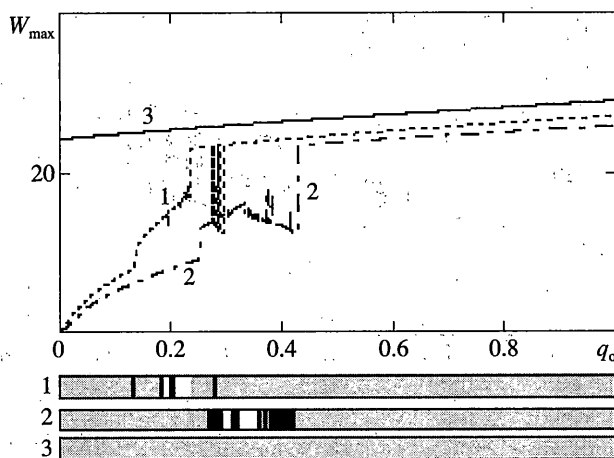
Фиг. 4

Для изучения поведения оболочки при воздействии двух вынуждающих нагрузок с различными частотами колебаний (задачи 3–5, табл. 1) была реализована математическая модель двухчастотной колебательной системы и построены карты характера колебаний для управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ (фиг. 4). На всех картах видны обширные зоны хаотических колебаний, причем при увеличении вынуждающей частоты локальной нагрузки зон хаотических колебаний становится больше. Как уже говорилось ранее, в случае двухчастотных колебаний, система переходит к гармоническим колебаниям только в том случае, когда частоты двух вынуждающих сил близки. В этом случае на картах характера колебаний (фиг. 4) область гармонических колебаний, расположенная вблизи частоты, на которой воздействует локальная нагрузка, была изучена более подробно, для анализа были построены графики зависимости $w_{\max}(q_0)$.

На фиг. 5–7 построены зависимости для всех пяти случаев нагружения. На фиг. 5 построены графики для задач 1, 2, 3 на частоте $\omega_p = 0.6$; на фиг. 6 – для задач 1, 2, 4 на частоте $\omega_p = 0.725$; на фиг. 7 – для задач 1, 2, 5 на частоте $\omega_p = 0.886$. Во всех задачах совпадение двух частот вынуждающих нагрузок уменьшает зону хаотических колебаний; бифуркации и независимые частоты отсутствуют, график зависимости $w_{\max}(q_0)$ стал гладким. На фиг. 7 уменьшилась площадь зоны хаоса, бифуркаций и независимых частот, увеличивается зона гармонических колебаний.

Проанализируем поведение системы при воздействии на нее второго типа вынуждающей нагрузки – знакопеременного опорного момента III. На фиг. 8 представлены графики зависимости $w_{\max}(M_0)$ и $w_{\max}(q_0)$, а также шкалы, характеризующие тип сигнала, для семи задач с указанными типами нагружения в табл. 2.

Значения координат частоты ω_p и момента M_0 для последних пяти типов нагружения выбирались так, чтобы проиллюстрировать поведение оболочки в различных ус-



Фиг. 5

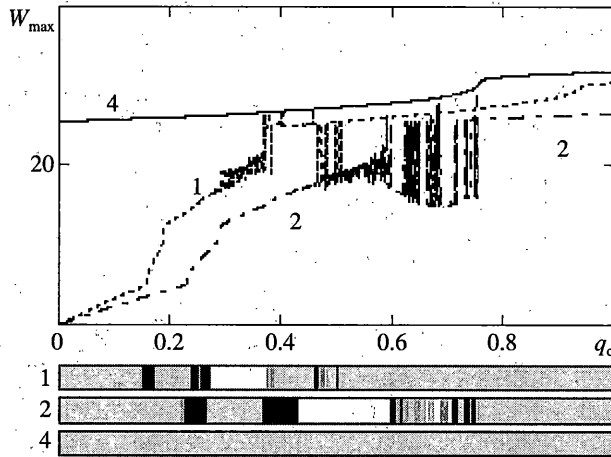
ловиях, исходя из следующих соображений: первая точка взята на границе области бифуркаций и хаоса; вторая – в области глубокого хаоса; третья – на границе хаоса и области гармонических колебаний и последняя в области гармонических колебаний (все перечисленные точки (1)–(5) обозначены на фиг. 1, а). В этих решениях частота вынуждающего момента одна и та же $\omega_p = 0.859$, а амплитуда меняется от 0.1 до 9.6. Во всех случаях на фиг. 8, кроме случая с распределенной нагрузкой и знакопеременным моментом $q_0 = 9.6$, $\omega_p = 0.859$, на графике максимального прогиба можем наблюдать разрыв первого рода, свидетельствующий о жесткой потере устойчивости. Возникновение жесткой потери устойчивости подтверждается шкалами типов сигнала, на которых в этот момент происходит изменение характера колебания.

Для анализа изменений реакции системы на внешнюю нагрузку были построены карты характера колебаний для управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}$ (задачи 3–7, табл. 2) (фиг. 9).

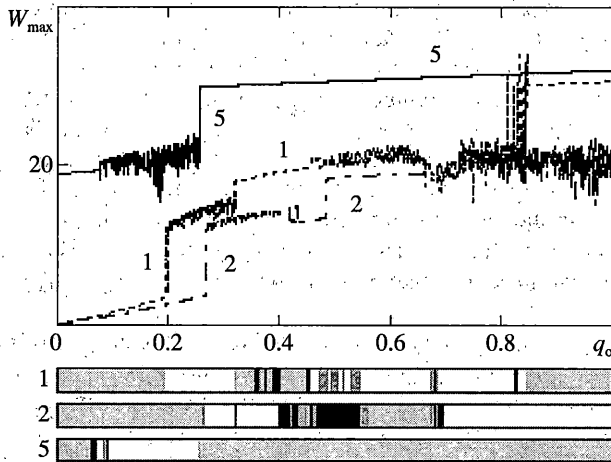
Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что при воздействии на оболочку распределенной нагрузки и знакопеременного момента с амплитудой $M_0 = 0.1$ и частотой, совпадающей с частотой распределенной нагрузки, зона хаотических колебаний имеет похожую форму и очертания, что и при действии знакопеременной распределенной нагрузки (фиг. 2). Это говорит о том, что воздействие дополнительного знакопеременного момента при малых значениях его амплитуды существенно не

Таблица 2

№	II	III
1	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	–
2	–	$M = M_0 \sin(\omega_p t)$
3	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$M_1 = 0.1 \sin(0.859t)$
4	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$M_1 = 3.4 \sin(0.859t)$
5	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$M_1 = 4.2 \sin(0.859t)$
6	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$M_1 = 5.5 \sin(0.859t)$
7	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$M_1 = 9.6 \sin(0.859t)$

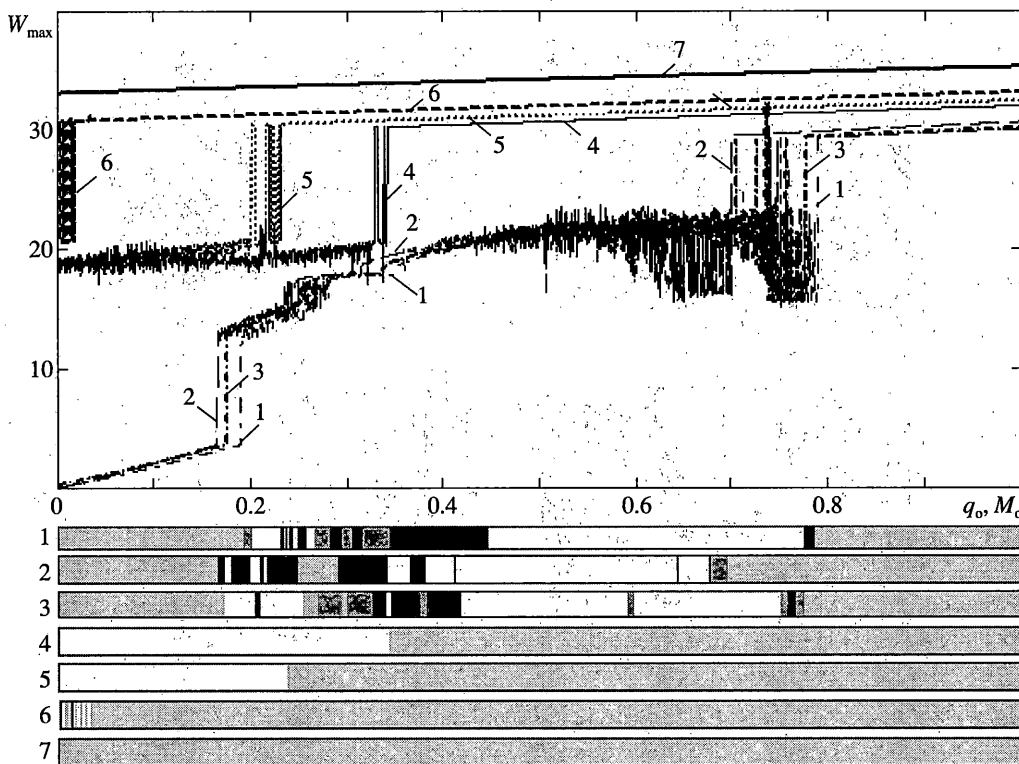


Фиг. 6



Фиг. 7

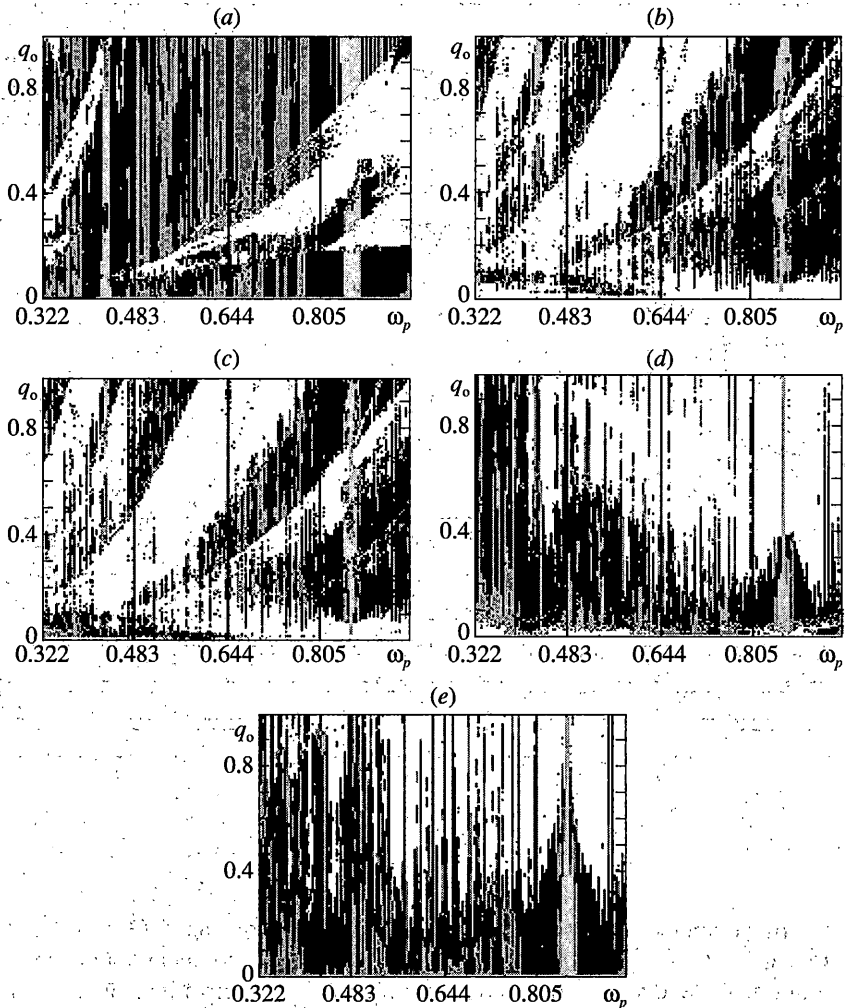
сказывается на характере колебаний оболочки. При увеличении параметра M_0 площадь области хаоса по отношению к общей площади карты изменяется неоднозначно: сначала она монотонно увеличивается и занимает практически всю область карты, затем происходит качественное изменение и вместо увеличения, зона хаоса начинает уменьшаться, одновременно смещаясь в область более высокой амплитуды вынуждающей нагрузки q_0 . Область гармонических колебаний образуется на карте только в том случае, когда частоты двух вынуждающих нагрузок близки. Если частоты отличаются в целое число раз, на карте образуется область бифуркаций, иначе можно выделить область независимых частот и их линейных комбинаций. При увеличении амплитуды зона гармонических колебаний на частоте $\omega_p = 0.859$ увеличивается по параметру q_0 .



Фиг. 8

Анализ карт управляющих параметров для первого типа задач (3–5, табл. 1) и для второго типа задач (3–7, табл. 2) показывает, что в случае совпадения частот локальной нагрузки и распределенной нагрузки или опорного момента и распределенной нагрузки $\omega_p = 0.859$ в картах управляющих параметров имеется вертикальная полоса; когда $\forall q_0 \in [0, 1]$ наблюдаются гармонические колебания. Это привело к необходимости рассмотрения задачи, когда на оболочку действует равномерно распределенная нагрузка II и локальная нагрузка I или опорный знакопеременный момент III при синхронном изменении частот у обоих вынуждающих воздействий (табл. 3).

На фиг. 10 приведены карты характера колебаний для управляющих параметров $\{q_0, \omega_p\}, \{M_0, \omega_p\}$. Первые две карты уже приводились на фиг. 1, а, 2. Здесь они приведены для более глубокого совместного анализа. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что принудительная синхронизация внешних воздействий приводит механическую систему к совершенно другому характеру колебаний. Почти полностью удалось ликвидировать зоны хаоса, которые присутствовали в карте $\{q_0, \omega_p\}, \{M_0, \omega_p\}$ (фиг. 10, а, б, с – задачи 1, 2, 3; см. табл. 3) практически в одних и тех же местах. В случае четвертого типа нагружения (фиг. 10, д – задача 4; см. табл. 3) характер колебаний в основном стал гармоническим. Осталась небольшая зона хаоса и бифуркаций на низких и на высоких частотах. В случае пятого типа нагружения (фиг. 10, е – задача 5, см. табл. 3) присутствуют зоны бифуркаций и небольшие зоны хаоса только на низких частотах.

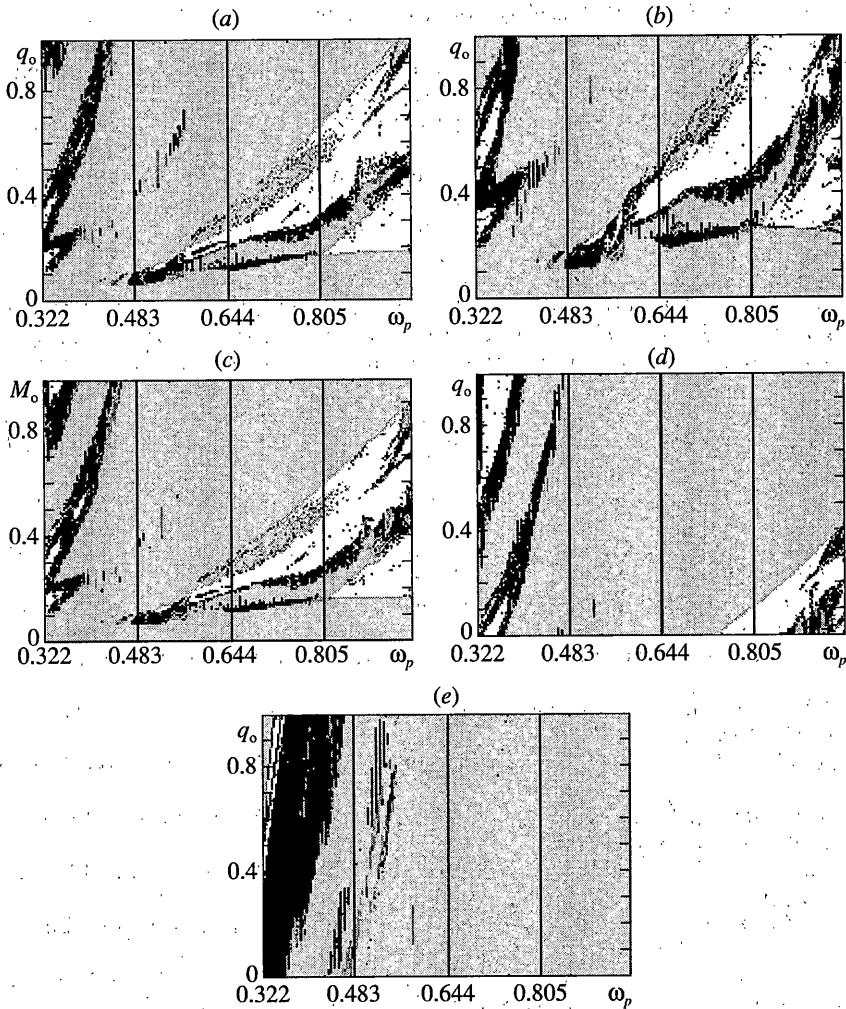


Фиг. 9

5. Заключение. Под управлением хаосом будем понимать преобразование хаотического поведения системы в регулярное или хаотическое, но с другими свойствами с помощью целенаправленных воздействий на оболочку дополнительного опорного знакопеременного момента или дополнительной локальной знакопеременной нагрузки

Таблица 3

№	II	I	III
1	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	—	—
2	—	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	—
3	—	—	$M = M_0 \sin(\omega_p t)$
4	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	$q_1 = 0.6 \sin(\omega_p t)$	—
5	$q = q_0 \sin(\omega_p t)$	—	$M_1 = 9.6 \sin(\omega_p t)$



Фиг. 10

при синхронизации частот, т.е. принудительная синхронизация частот внешних воздействий разной природы.

Таким образом, путем изменения характера нагрузки получена возможность управлять поведением колебаний оболочек, а именно: существенно увеличить зону гармонических колебаний, а также изменить природу хаотических колебаний. Изменяя амплитуду нагрузки и ее частоту, добились такого момента, когда в системе отсутствует жесткая потеря устойчивости, и колебания оболочки становятся гармоническими.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Awrejcewicz J., Krysko V.A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of shells. Applications of the Bubnov – Galerkin and Finite Difference Numerical Methods. Berlin: Springer, 2003, 428 p.
2. Awrejcewicz J.A., Krysko V.A., Vakakis A.F. Nonlinear Dynamics of Continuous Elastic Systems. Berlin: Springer, 2004, 350 p.

3. *Awrejcewicz J., Krysko V.A.* Feigenbaum Scenario Exhibited by Thin Plate Dynamics // *Nonlinear Dynamics*. 2001. V. 24. № 4. P. 373–398.
4. *Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V.* Spatial-temporal chaos and solitons exhibited by von J. Kármán model // *Intern. Bifurcat. Chaos*. 2002. V. 12. № 7. P. 1445–1513.
5. *Awrejcewicz J., Krysko V.A.* Nonlinear coupled problems in dynamics of shells // *Intern. J. Enging Sci.* 2003. V. 41. № 6. P. 583–607.
6. *Awrejcewicz J., Krysko A.V.* Analysis of complex parametric vibrations of plates and Shells using Bubnov–Galerkin approach // *Arch. Appl. Mech.* 2003. V. 73. № 7. P. 495–504.
7. *Awrejcewicz J., Krysko V.A., Narkaitis G.G.* Bifurcations of thin plate-strip excited transversally and axially // *Nonlinear Dynamics*. V. 32. № 2. 2003. P. 187–209.
8. *Krysko V.A., Awrejcewicz J., Bruk V.M.* On the solution of a coupled thermomechanical problem for non-homogeneous Timoshenko-type shells // *J. Math. Appl.* 2003. V. 273. № 2. P. 409–416.
9. *Крысько В.А., Кравцова И.В.* Стохастические колебания гибких осесимметричных шарнирно-подвижных по контуру сферических оболочек // *Изв. вузов. Машиностроение*. 2004. № 1. С. 3–13.
10. *Krysko V.A., Kravtsova I.V.* Stochastic vibrations of flexible flat axisymmetric shells exposed inhomogeneous loading // *Intern. Conf. “Dynamics of System – Theory and Applications”*. Lodz, Poland, 2003. P. 189–197.
11. *Крысько В.А., Шекагурова Т.В.* Хаотические колебания конических оболочек // *Изв. РАН. МТТ*. 2004. № 5. С. 153–163.
12. *Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V.* Complex parametric vibrations of flexible rectangular plates // *Meccanica*. 2004. V. 39. № 3. P. 221–244.
13. *Habler A.W., Luscher L.* Resonant stimulation and control of nonlinear oscillations // *Naturwissenschaft*. 1989. V. 79. P. 67.
14. *Jackson E.A.* On the control of complex dynamic systems // *Physica. D*. 1991. V. 50. № 3. P. 341–366.
15. *Jackson E.A.* The entrainment and migration controls of multiple attractor systems // *Physics Lett. A*. 1990. V. 151. № 9. P. 478–484.
16. *Ott E., Grebogi C., Yorke J.A.* Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.* 1990, V. 64. № 11. P. 1196–1199.
17. *Shinbrot T., Grebogi C., Yorke J.A., Ott E.* Using small perturbations to control chaos // *Nature*. 1993. V. 363. № 6428. P. 411–417.
18. *Singer J., Wang Y.–Z., Ban H.H.* Controlling a chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 1991. V. 66. № 9. P. 1123–1125.
19. *Petrov V., Gaspar V., Masere J., Showalter K.* Controlling chaos in the Belousov – Zhabotinsky reaction. // *Nature*. 1993. V. 361. № 6409. P. 240–243.
20. *Schiff S.J., Jerder K., Duong D.H., Chang T., Spano M.L., Ditto W.L.* Controlling chaos in the brain // *Nature*. 1994. V. 370. № 6491. P. 615–620.
21. *Валишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
22. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. V. 19. № 1. P. 25–52.

Саратов

Поступила в редакцию
2.07.2004