

УДК 539.3

© 2006 г. В.В. ВАСИЛЬЕВ, Л.В. ФЕДОРОВ

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ И ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

На основе уравнений общей теории относительности (ОТО), дополненных соотношениями, описывающими напряженно-деформированное состояние сплошной среды, получены уравнения геометрической теории упругости, позволяющие связать напряженно-деформированное состояние тела с геометрией заполняющего его риманова пространства. Геометрические свойства пространства, моделирующего напряженно-деформированную среду, предлагается использовать для решения задач оптимального проектирования конструкций. В качестве приложений рассматриваются симметричные задачи для шара и диска.

**1. Уравнения ОТО.** Ввиду того что в качестве исходных уравнений геометрической теории упругости используются уравнения ОТО, рассмотрим основные соотношения ОТО [1–3]. Состояние среды в ОТО описывается тензором энергии-импульса, имеющим в четырехмерном пространстве 10 компонент, которые можно записать следующим образом [4]:

$$\begin{aligned}T_j^i &= \sigma_j^i - \rho v_j v^i \quad (i, j = 1, 2, 3) \\T_j^4 &= -\rho v_j \quad (j = 1, 2, 3) \\T_4^4 &= \rho c^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $\sigma_j^i$  – компоненты тензора напряжений,  $v_i$  – составляющие скорости,  $\rho$  – плотность среды,  $c$  – скорость света. В уравнениях (1.1) и далее используются смешанные компоненты тензоров энергии-импульса и напряжений, так как для ортогональных координат, которые рассматриваются далее в приложениях, эти компоненты совпадают с физическими. Тензор  $T_j^i$  должен удовлетворять уравнениям закона сохранения, которые имеют вид

$$\nabla_i T_j^i = 0\tag{1.2}$$

В классической теории упругости уравнениям (1.2) соответствуют уравнения движения. Существенно, что уравнения (1.2) однородны относительно  $T_j^i$ , в отличие от уравнений движения, которые могут включать инерционные члены и объемные силы и в общем случае не являются однородными относительно напряжений  $\sigma_j^i$ . Свойство однородности уравнений (1.2) позволяет ввести преобразование, тождественно удовлетворяющее эти уравнения

$$\chi T_j^i = G_j^i - \lambda \delta_j^i\tag{1.3}$$

$$G_j^i = R_j^i - R\delta_j^i/2 \quad (1.4)$$

Здесь  $\chi$  и  $\lambda$  – постоянные коэффициенты;  $\delta_j^i$  – символы Кронекера;  $G_j^i$  – тензор Эйнштейна, выражающийся через компоненты тензора Риччи  $R_j^i = g^{ik}R_{kj}$ ;  $g^{ij}$  – компоненты метрического тензора пространства, для которого записаны уравнения (1.2). Тензор  $R_{ij}$  образуется следующим образом:

$$R_{ij} = g^{km}R_{ikim} \quad (1.5)$$

$$R_{ikjm} = 1/2(g_{im,jk} + g_{jk,im} - g_{ij,km} - g_{km,ij}) + g_{np}(\Gamma_{jk}^n \Gamma_{im}^p - \Gamma_{jm}^n \Gamma_{ik}^p) \quad (1.6)$$

$$\Gamma_{jk}^n = 1/2g^{ns}(g_{js,k} + g_{ks,j} - g_{jk,s}) \quad (1.7)$$

где  $R_{ikjm}$  – тензор кривизны риманова пространства, запятая после индекса означает дифференцирование по соответствующей координате. Подставляя выражение (1.6) в правую часть равенства (1.5) и учитывая соотношения (1.7), получим

$$R_{ij} = \Gamma_{ij,n}^n - \Gamma_{in,j}^n + \Gamma_{ij}^n \Gamma_{nm}^m - \Gamma_{in,m}^m \Gamma_{jm}^n \quad (1.8)$$

Равенства (1.3), позволяющие тождественно удовлетворить уравнениям закона сохранения (1.2), аналогичны соотношениям, выражающим напряжения через функции напряжений, вводимые в классической теории упругости. Эта аналогия использовалась для построения функций напряжений в [4–6].

Окончательная система уравнений ОТО следует из уравнений (1.3), правая часть которых выражается через метрический тензор с помощью равенств (1.4), (1.7) и (1.8). В результате получается следующая система уравнений:

$$L_j^i(g) - \lambda\delta_j^i = \chi T_j^i \quad (1.9)$$

$$L_j^i(g) = g^{ik}L_{kj}(g)$$

$$L_{kj}(g) = 1/2[g^{np}(g_{pj,k} + g_{pk,j} - g_{kj,p})]_n - 1/2[g^{np}g_{np,k}]_j + 1/4g^{np}g^{mq}g_{mq,n}(g_{kp,j} + g_{jp,k} - g_{kj,p}) - 1/4g^{mp}g^{nq}(g_{kp,n} + g_{np,k} - g_{kn,p})(g_{jq,m} + g_{mq,j} - g_{jm,q})$$

В четырехмерном пространстве имеется 10 уравнений (1.9), которые включают в качестве неизвестных 10 составляющих метрического тензора  $g_{ij}$ .

Для анализа уравнений (1.9) рассмотрим статическую задачу; для которой  $v_j = 0$ . Тогда соотношения (1.1) упрощаются и принимают вид

$$T_j^i = \sigma_j^i \quad (i = 1, 2, 3), \quad T_j^4 = 0, \quad T_4^4 = \rho c^2 \quad (1.10)$$

Учитывая эти равенства, можно заключить, что система (1.9) является полной относительно  $g_{ij}$ , если известны компоненты тензора напряжений  $\sigma_j^i$ . Именно такая ситуация обычно имеет место в ОТО, где рассматриваются гравитационные поля в пустом пространстве или в среде, моделируемой идеальной несжимаемой жидкостью. В первом случае  $\sigma_j^i = 0$ . Во втором  $\sigma_1^1 = \sigma_2^2 = \sigma_3^3 = -p$  (остальные компоненты тензора напряжений равны нулю), где  $p$  – давление в жидкости, определяемое из одного из уравнений (1.2).

Таким образом, в ОТО могут быть решены только те задачи, которые в теории упругости классифицируются как статически определимые. В общем случае, т.е. если напряжения  $\sigma_j^i$  в равенствах (1.10) неизвестны, система 10 уравнений (1.9) включает 16 неизвестных  $\sigma_j^i$  и  $g_{ij}$  и не является полной.

**2. Уравнения геометрической теории упругости.** Рассмотрим деформируемую среду. По постановке задача ОТО аналогична задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях, для которой равенства типа (1.9), связывающие напряжения с функциями напряжений, дополняются определяющими соотношениями, связывающими напряжения с деформациями, и уравнениями совместности деформаций. Введем метрический тензор деформированного пространства

$$g_{ij}(\epsilon) = g_{ij}(1 + \epsilon_{ij}) \quad (2.1)$$

выражающийся через метрический тензор исходного пространства  $g_{ij}$  и соответствующие деформации  $\epsilon_{ij}$ . В трехмерном пространстве, моделирующем упругую среду, в общем случае имеется шесть деформаций  $\epsilon_{ij}$ , которые связаны с напряжениями соотношениями, определяющими физические свойства среды, т.е.

$$\epsilon_{ij} = f(\sigma_{mn}) \quad (ij, mn = 11, 12, 13, 22, 23, 33) \quad (2.2)$$

Для получения полной системы уравнений необходимо связать деформации некоторыми условиями, обеспечивающими сплошность деформированной среды. В классической теории упругости такую роль играют уравнения совместности деформаций Сен-Венана. Однако в обсуждаемой теории такие уравнения существовать не могут. Как известно [7], геометрическое содержание уравнений совместности деформаций заключается в том, что они являются условиями, обеспечивающими евклидовость деформированного пространства. В геометрической теории пространство не является евклидовым, однако можно предположить, что и в этом случае деформации должны быть связаны соотношениями, обеспечивающими в некотором смысле инвариантность геометрии пространства.

Для вывода этих соотношений воспользуемся традиционными для линейной теории упругости упрощениями и предположением, что деформации настолько малы, что уравнения (1.2) можно записать, не учитывая изменения геометрии пространства, связанного с его деформированием. С учетом (1.10) получим

$$\nabla_i \sigma_j^i = 0 \quad (2.3)$$

Эти уравнения по форме совпадают с однородными уравнениями равновесия классической теории упругости. Однако в отличие от уравнений равновесия, уравнения (2.3) включают в качестве неизвестных не только напряжения, но и метрические коэффициенты пространства, для которого они записаны.

Преобразование (1.3) принимает вид

$$\chi \sigma_j^i = G_j^i - \lambda \delta_j^i \quad (2.4)$$

Как уже отмечалось, подстановка напряжений (2.4) в уравнения (2.3) обеспечивает, благодаря структуре тензора Эйнштейна, тождественное удовлетворение этих уравнений. Для деформированной среды равенство (2.4) преобразуется следующим образом:

$$\chi \sigma_j^i = G_j^i(\epsilon) - \lambda \delta_j^i \quad (2.5)$$

Первое слагаемое в правой части является тензором Эйнштейна для деформированного пространства, определяемого метрическими коэффициентами (2.10), и может быть представлено в виде

$$G_j^i(\epsilon) = G_j^i + \Delta G_j^i(\epsilon) \quad (2.6)$$

Сопоставляя равенства (2.9) и (2.5), (2.6), получим

$$\Delta G_j^i(\epsilon) = 0 \quad (2.7)$$

Эти уравнения и предлагается использовать в качестве уравнений совместности деформаций геометрической теории упругости. Опираясь на ОТО, уравнениям (2.7) можно придать определенный физический смысл. Как известно, в ОТО преобразование Эйнштейна устанавливает соответствие между гравитацией и кривизной пространства. В этом отношении уравнения (2.7) показывают, что это соответствие имеет место и для деформированного пространства.

Для записи уравнений (2.7) в развернутой форме необходимо воспользоваться соотношениями (1.4)–(1.8), подставив в них метрический тензор (2.1). Осуществляя линеаризацию по деформациям, окончательно получим

$$g^{ik} \Delta G_{kj}(\epsilon) - \epsilon^{ik} G_{kj} = 0 \quad (2.8)$$

$$G_{kj} = R_{kj} - R g_{kj} / 2$$

$$\Delta G_{kj}(\epsilon) = \Delta R_{kj}(\epsilon) - 1/2 g_{kj} [g^{mn} \Delta R_{mn}(\epsilon) - \epsilon^{mn} R_{mn}] - 1/2 \epsilon_{kj} R$$

$$\Delta R_{kj}(\epsilon) = g^{im} \Delta R_{ikmj}(\epsilon) - \epsilon^{im} R_{ikmj}$$

$$\Delta R_{ikmj}(\epsilon) = 1/2 (\epsilon_{ij, km} + \epsilon_{km, ij} - \epsilon_{im, kj} - \epsilon_{kj, im}) + \Gamma_{km}^n \gamma_{n, ij} + \Gamma_{ij}^n \gamma_{n, km} - \Gamma_{kj}^n \gamma_{n, im} - \Gamma_{im}^n \gamma_{n, kj} - \epsilon_{np} (\Gamma_{km}^n \Gamma_{ij}^p - \Gamma_{kj}^n \Gamma_{im}^p)$$

$$\gamma_{n, ij} = 1/2 (\epsilon_{nj, i} + \epsilon_{ni, j} - \epsilon_{ij, n})$$

В качестве примера рассмотрим среду, отнесенную к декартовым координатам. В этом случае

$$\Gamma_{jk}^i = 0, \quad R_{ijkm} = 0, \quad R_{ij} = 0, \quad R = 0, \quad G_{ij} = 0$$

$$\Delta R_{ikmj} = 1/2 (\epsilon_{ij, km} + \epsilon_{km, ij} - \epsilon_{im, kj} - \epsilon_{kj, im}), \quad \Delta R_{kj} = 1/2 (\epsilon_{ik, ij} + \epsilon_{ij, ik} - \epsilon_{ii, kj} - \epsilon_{kj, ii})$$

В результате, уравнения (2.8) примут вид

$$\epsilon_{22, 33} + \epsilon_{33, 22} - 2\epsilon_{23, 23} = 0, \quad \epsilon_{23, 13} + \epsilon_{13, 32} - \epsilon_{33, 12} - \epsilon_{12, 33} = 0 \quad (1, 2, 3) \quad (2.9)$$

Здесь символ (1, 2, 3) обозначает круговую перестановку индексов, позволяющую получить из записанного уравнения еще два. Шесть уравнений (2.9) являются уравнениями Сен-Венана классической теории упругости:

Таким образом, система уравнений геометрической теории упругости включает 18 уравнений (2.2), (2.4) и (2.8), содержащих в качестве функциональных неизвестных шесть напряжений  $\sigma_{ij}$ , шесть деформаций  $\epsilon_{ij}$  и шесть метрических коэффициентов  $g_{ij}$ .

**3. Центральнo-симметричная задача.** В качестве приложения рассмотрим полый шар с внутренним радиусом  $R_1$ , наружным радиусом  $R_2$ , отнесенный к сферическим координатам  $r, \theta, \varphi$  и нагруженный внутренним давлением  $q$  и наружным давлением  $p$ .

В классической теории упругости напряженно-деформированное состояние шара описывается:

уравнением равновесия

$$\frac{1}{r}(r^2\sigma_r)' - \sigma_\theta - \sigma_\varphi = 0 \quad (3.1)$$

где  $(...)' = d(...)/dr$  и в силу симметрии задачи  $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$ ; законом Гука

$$\epsilon_r = (\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta)/E, \quad \epsilon_\theta = [(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r]/E \quad (3.2)$$

уравнениями совместности деформаций

$$(r\epsilon_\theta)' = \epsilon_r, \quad (r^2\epsilon_\theta)' = r\epsilon_r' \quad (3.3)$$

второе из которых есть следствие первого.

Для решения задачи вводится функция напряжений  $F(r)$  так, что напряжения

$$\sigma_r = F/r^2, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = F'/(2r) \quad (3.4)$$

тождественно удовлетворяют уравнению (3.1). Тогда первое уравнение (3.3), преобразованное с помощью равенств (3.2) и (3.4), принимает вид

$$r^2F'' - 2F = 0 \quad (3.5)$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma_r(R_1) = -q, \quad \sigma_r(R_2) = -p \quad (3.6)$$

имеет следующую окончательную форму:

$$\sigma_r = \frac{1}{R_2^3 - R_1^3} \left[ qR_1^3 - pR_2^3 + (p - q) \frac{R_1^3 R_2^3}{r^3} \right], \quad \sigma_\theta = \frac{1}{R_2^3 - R_1^3} \left[ qR_1^3 - pR_2^3 - (p - q) \frac{R_1^3 R_2^3}{2r^3} \right] \quad (3.7)$$

Обращаясь к геометрической теории упругости, запишем общее выражение для метрической формы пространства с центральной симметрией [1]:

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.8)$$

Для евклидова пространства, как известно

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2 \quad (3.9)$$

Для метрической формы (3.8) соотношения (2.4) имеют вид:

$$\chi\sigma_r = \frac{1}{4g_{11}g_{22}} [4g_{11}g_{22} - (g_{22}')^2] - \lambda \quad (3.10)$$

$$\chi\sigma_\theta = \frac{1}{4g_{11}g_{22}} [g_{22}g_{11}g_{22}' + g_{11}(g_{22}')^2 - 2g_{11}g_{22}g_{22}''] - \lambda$$

Уравнения совместности деформаций (2.8) записываются следующим образом:

$$(g'_{22})^2 \varepsilon_r - 2g_{22}g'_{22}\varepsilon'_\theta - 4g_{11}g_{22}\varepsilon_\theta = 0 \quad (3.11)$$

$$g'_{11}g_{22}(g_{22}\varepsilon'_\theta - g'_{22}\varepsilon_r) + g_{11}[g_{22}g'_{22}(\varepsilon'_r - 2\varepsilon'_\theta) - 2g_{22}^2\varepsilon''_\theta + (2g_{22}g''_{22} - (g'_{22})^2)\varepsilon_r] = 0 \quad (3.12)$$

В евклидовом пространстве с метрическими коэффициентами в форме (3.9) эти уравнения совпадают с уравнениями совместности деформаций (3.3).

Добавляя к уравнениям (3.10)–(3.12) соотношения упругости (3.2), получим систему шести уравнений относительно напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ , деформаций  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  и метрических коэффициентов  $g_{11}$ ,  $g_{22}$ . Поскольку полученные уравнения являются существенно нелинейными, для упрощения задачи воспользуемся традиционным в ОТО методом линеаризации. Учитывая равенства (3.9), представим метрические коэффициенты в виде

$$g_{11} = 1 + f_r(r), \quad g_{22} = r^2[1 + f_\theta(r)] \quad (3.13)$$

и предположим, что абсолютные значения функций  $f_r$  и  $f_\theta$  малы по сравнению с единицей. Осуществляя линеаризацию соотношений (3.10) по  $f_r$  и  $f_\theta$ , получим

$$\chi\sigma_r = \frac{1}{r^2}(f_r - f_\theta - rf'_\theta), \quad \chi\sigma_\theta = \frac{1}{2r}(f'_r - 2f'_\theta - rf''_\theta) \quad (3.14)$$

Подставляя эти выражения в закон Гука (3.2), можно выразить деформации через функции  $f_r$  и  $f_\theta$ . Дальнейшая подстановка деформаций в уравнения совместности деформаций (3.11) и (3.12), преобразованные с учетом равенств (3.13), позволяет получить два уравнения относительно функций  $f_r$  и  $f_\theta$ , которые в силу малости функций  $f_r$  и  $f_\theta$  можно привести к системе линейных уравнений. Опуская достаточно громоздкие преобразования, отметим, что решением этих уравнений являются

$$f_r(r) = f(r), \quad f_\theta = 0 \quad (3.15)$$

При этом функция  $f(r)$  определяется из уравнения (3.11), которое принимает вид

$$r^2 f'' - 2f \left( 1 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \lambda r^2 \right) = 0 \quad (3.16)$$

а уравнение (3.12) получается дифференцированием уравнения (3.16), т.е. является его следствием. Заметим, что эта ситуация аналогична имеющей место в классической теории упругости, где второе уравнение совместности деформаций (3.3) получается в результате дифференцирования первого уравнения. Сравнивая уравнения (3.5) и (3.16), можно заключить, что уравнение совместности деформаций геометрической теории упругости совпадает с классическим только для шара из несжимаемого материала ( $\nu = 1/2$ ). С учетом равенств (3.15) соотношения (3.14) упрощаются следующим образом:

$$\chi\sigma_r = \frac{f}{r^2} - \lambda, \quad \chi\sigma_\theta = \frac{f'}{2r} - \lambda \quad (3.17)$$

Сопоставляя эти выражения с равенствами (3.4), можно заключить, что функция  $f$  аналогична функции напряжений  $F$  в классической теории упругости. Напряжения (3.17) тождественно удовлетворяют уравнению закона сохранения (2.3), которое совпадает в рассматриваемом случае с уравнением равновесия (3.1).

Уравнение (3.16) допускает аналитическое решение [8], которое имеет вид

$$f = [C_1(\rho - 1)e^\rho + C_2(\rho + 1)e^{-\rho}]/r \quad (3.18)$$

$$\rho = \eta r, \quad \eta = \sqrt{\frac{2(1-2\nu)\lambda}{1-\nu}} \quad (3.19)$$

Для качественного анализа представим экспоненциальные функции, входящие в решение (3.18), степенными рядами. Удерживая только линейные члены, имеем

$$f = C(1 - \rho^2)/r, \quad C = C_2 - C_1 \quad (3.20)$$

Подставляя выражение (3.20) в равенства (3.17) и определяя постоянные  $C$  и  $\lambda$  из граничных условий (3.6), окончательно получим

$$f = \frac{\chi(p-q)(1-\rho^2)}{\alpha r} \quad (3.21)$$

$$\sigma_r = -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{p-q}{r^3} + \beta \right), \quad \sigma_\theta = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{p-q}{2r^3} (1+\rho^2) - \beta \right] \quad (3.22)$$

$$\alpha = \frac{1-\rho_2^2}{R_2^3} - \frac{1-\rho_1^2}{R_1^3}, \quad \beta = \frac{q}{R_2^3} (1-\rho_2^2) - \frac{p}{R_1^3} (1-\rho_1^2), \quad \rho = \eta r$$

$$\rho_1 = \eta R_1, \quad \rho_2 = \eta R_2, \quad \eta = \sqrt{\frac{2\chi(1-2\nu)\beta}{(1-\nu)\alpha}}$$

Построенное решение включает коэффициент  $\chi$ , который входит в функцию  $f$  (3.21) и в параметр  $\eta$  (3.23) и определяет соотношение между напряжениями и кривизной пространства, занимаемого упругим телом. При  $\chi = 0$  получаем  $f \equiv 0$ ,  $\eta = 0$  и равенства (3.22) вырождаются в решение (3.7), соответствующее классической теории упругости.

**4. Оптимизация формы упругих тел.** В принципе, коэффициент  $\chi$ , связывающий тензоры напряжений и кривизны, может быть определен экспериментально. Для этого луч света пропускается через цилиндр из прозрачного материала перпендикулярно оси цилиндра и проецируется на экран. При приложении к цилиндру крутящего момента, возникающее внутри него поле напряжений порождает риманово пространство, искривляющее геодезические линии и, следовательно, траекторию светового луча, след которого на экране должен смещаться пропорционально величине прикладываемого момента. Однако в проведении такого достаточно сложного в техническом отношении эксперимента нет необходимости. Хорошее согласование решений, следующих из классической теории упругости, с результатами соответствующих экспериментов позволяет заключить, что коэффициент  $\chi$  достаточно мал и различие между решениями типа (3.7) и (3.22) практически несущественно. Существенной является информация о геометрии напряженного пространства, следующая из геометрической теории. Применительно к ортогональным координатам перейдем к коэффициентам Ламе  $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ , и введем некоторые условные коэффициенты плотности пространства в направлениях координатных линий  $d_i$  равные отношениям соответствующих коэффициентов Ламе в римановом и в евклидовом пространствах. Для рассмотренной выше задачи о шаре получим следующие коэффициенты плотности:

$$d_1 = \sqrt{1+f(r)}, \quad d_2 = d_3 = 1 \quad (4.1)$$

При отсутствии нагрузок, т.е. при  $p = q = 0$ , из равенства (3.21) следует  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , т.е. ненагруженное пространство является евклидовым. При  $p = q$  получается аналогичный результат. В этом случае, как следует из равенств (3.22),  $\sigma_r = \sigma_\theta = -\beta$ , т.е. напряженное состояние является однородным. Таким образом, однородное напряженное состояние, соответствующее, как известно, оптимальному распределению материала в конструкции, не вызывает искривления пространства. Для упрощения дальнейшего анализа рассмотрим задачу о неограниченном пространстве, имеющем сферическую полость с радиусом  $R$ , по поверхности которой действует давление  $q$ . Полагая в равенствах (3.21) и (3.22)  $R_1 = R, R_2 \rightarrow \infty$  и  $p = 0$ , получим

$$f = q\chi R^3/r \tag{4.2}$$

$$\sigma_r = -qR^3/r^3, \quad \sigma_\theta = qR^3/(2r^3) \tag{4.3}$$

Напряжения (4.3) совпадают с соответствующим решением (3.7) теории упругости, а равенства (4.1) и (4.2) показывают, что пространство является евклидовым только при  $r \rightarrow \infty$ . Следует заметить, что  $n_r$ -мерное риманово пространство может быть вложено в евклидово пространство с размерностью  $n_e = n_r(n_r + 1)/2$  [9]. При  $n_r = 2$  имеем  $n_e = 3$ , т.е. двумерное риманово пространство (поверхность) может содержаться, как известно, в трехмерном евклидовом пространстве. Однако при  $n_r = 3$  размерность вмещающего евклидова пространства равна шести. Такая размерность пространства достигается, если считать его неоднородным и анизотропным в соответствии с коэффициентами плотности типа (4.1). При этом равенства (4.1) и (4.2) можно интерпретировать следующим образом. Поскольку  $d_2 = d_3 = 1$ , а  $d_1 \geq 1$ , пространство со сферической полостью не является сплошным, а состоит из системы концентрических сферических поверхностей, соединенных радиальными связями так, что расстояние между поверхностями убывает до нуля при  $r \rightarrow \infty$ . Существенно, что такое пространство можно представить как модель конструкции, состоящей из тонких сферических оболочек, соединенных радиальными стержнями, длина которых уменьшается при увеличении радиуса. Очевидно, что радиальная податливость такой конструкции в окрестности сферической полости больше, чем у сплошного тела, и, следовательно, концентрация кольцевых напряжений на контуре полости меньше, чем у сплошного тела.

Таким образом, кривизна риманова пространства, порождаемая напряжениями, интерпретируется в геометрической теории упругости как неоднородность евклидова пространства, показывающая рациональный закон распределения материала в конструкции, структура которой соответствует геометрии пространства.

**5. Осесимметричная задача для диска.** Для иллюстрации предлагаемого метода оптимизации рассмотрим тонкий диск с толщиной  $h$ , зависящей от радиуса, отнесенный к цилиндрическим координатам  $r, \theta, z$  и предположим, что диск имеет отверстие с радиусом  $r = R_1$ , по контуру которого действует внутреннее давление  $q$ . Наружная поверхность диска  $r = R_2$  и его торцевые поверхности  $z = \pm h/2$  свободны от нагрузки.

Рассмотрим задачу классической теории упругости. Диск находится в условиях осесимметричного плоского напряженного состояния, при котором отличными от нуля являются только радиальные и кольцевые напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , зависящие только от  $r$ . Уравнения равновесия для диска переменной толщины и уравнения совместности деформаций имеют следующий вид:

$$\sigma_r' + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \sigma_r \frac{h'}{h} = 0 \tag{5.1}$$

$$(r\varepsilon_\theta)' = \varepsilon_r \tag{5.2}$$



Радиальные напряжения удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\sigma_r(R_1) = -q, \quad \sigma_r(R_2) = 0 \quad (5.3)$$

Для решения задачи в напряжениях уравнение совместности деформаций (5.2) записывается с помощью соотношений закона Гука (3.2) через напряжения, т.е.

$$\sigma'_\theta - \nu\sigma'_r + \frac{1+\nu}{r}(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0 \quad (5.4)$$

В результате получаем систему двух уравнений (5.1) и (5.4) относительно напряжений, которая для диска постоянной толщины  $h = h_0$  допускает аналитическое решение, имеющее вид

$$\sigma_r = -\frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right), \quad \sigma_\theta = \frac{qR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left( \frac{R_2^2}{r^2} + 1 \right) \quad (5.5)$$

Рассмотрим аналогичную задачу геометрической теории упругости. Общее выражение для метрической формы в цилиндрических координатах можно записать следующим образом

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}dz^2 \quad (5.6)$$

В общем случае для рассматриваемой задачи имеются три соотношения (2.4) для  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_z$  и три уравнения совместности деформаций (2.7), позволяющие в принципе определить метрические коэффициенты  $g_{11}$ ,  $g_{22}$  и  $g_{33}$ . Опуская достаточно громоздкие общие соотношения и их анализ, позволяющий конкретизировать равенство (5.6), запишем окончательный результат

$$ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + g(r)dz^2 \quad (5.7)$$

Таким образом, отличие метрики пространства, занимаемого диском, от евклидова проявляется только в коэффициенте, соответствующем оси  $z$ , направленной по толщине диска. При этом соотношения (2.4) для напряжений принимают вид

$$\chi\sigma_r = \frac{g'}{2rg} - \lambda, \quad \chi\sigma_\theta = \frac{1}{2g^2} \left[ gg'' - \frac{1}{2}(g')^2 \right] - \lambda \quad (5.8)$$

$$\chi\sigma_z = -\lambda \quad (5.9)$$

Поскольку для рассматриваемой плоской задачи  $\sigma_z = 0$ , из равенства (5.9) следует  $\lambda = 0$ . Напряжения (5.8) тождественно удовлетворяют уравнению закона сохранения (2.3), которое записывается следующим образом:

$$(g\sigma_r)' + \frac{g}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) - \frac{1}{2}g'\sigma_r = 0 \quad (5.10)$$

Предположим теперь, что  $g = 1 + f(r)$ , причем амплитуда функции  $f(r)$  значительно меньше единицы. Осуществляя преобразование равенств (5.8) и (5.10) с учетом малости функции  $f$ , получим

$$\chi\sigma_r = \frac{t}{2r}, \quad \chi\sigma_\theta = \frac{1}{2} \left( t' + \frac{t^2}{2} \right) \quad (5.11)$$

$$\sigma'_r + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{2}t\sigma_r = 0, \quad t = f' \quad (5.12)$$

Сравнивая уравнение (5.12) с уравнением равновесия теории упругости (5.1), можно заключить, что

$$t = 2h'/h \quad (5.13)$$

т.е. функция  $t$  определяет некоторый закон изменения толщины диска по радиусу. Для того, чтобы найти этот закон, воспользуемся уравнением совместности деформаций (2.7), которое в рассматриваемой задаче совпадает с соответствующим уравнением теории упругости (5.2). Выражая деформации через напряжения с помощью закона Гука (3.2), а напряжения через функцию  $t$  согласно соотношениям (5.11), получим следующее уравнение:

$$r^2 t'' + r t' - t = 0$$

Общее решение этого уравнения необходимо подставить в соотношение (5.11) для  $r$  и определить постоянные из граничных условий (5.3). В результате найдем

$$t = -\frac{2\chi q R_1^2 r \left( \frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right)}{R_2^2 - R_1^2} \quad (5.14)$$

Подстановка этого выражения в равенства (5.11) приводит к следующим выражениям для напряжений:

$$\sigma_r = -\frac{q R_1^2 \left( \frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right)}{R_2^2 - R_1^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{q R_1^2 \left( \frac{R_2^2}{r^2} + 1 \right)}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{\chi q^2 R_1^4 r^2 \left( \frac{R_2^2}{r^2} - 1 \right)^2}{(R_2^2 - R_1^2) r^2}$$

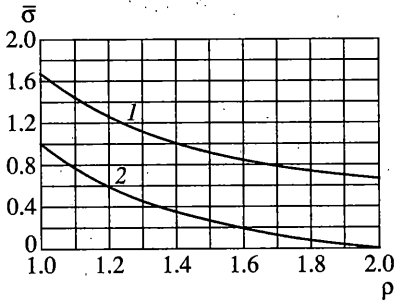
При  $\chi = 0$  эти напряжения совпадают с решением теории упругости (5.5). Толщина диска  $h$  определяется в результате интегрирования уравнения (5.13), в котором  $t$  имеет форму (5.14). Определяя постоянную интегрирования из условия  $h(r=R_1) = h_1$ , окончательно получим

$$h = h_1 \rho^{-\alpha} e^{\beta(\rho^2 - 1)} \quad (5.15)$$

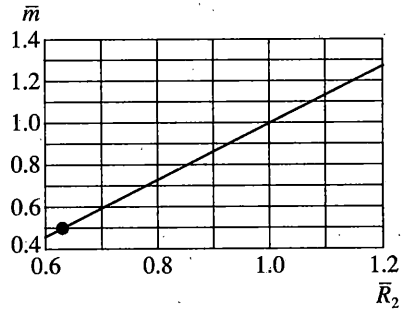
$$\rho = \frac{r}{R_1}, \quad \alpha = \frac{\chi q R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}, \quad \beta = \frac{\alpha R_1^2}{2 R_2^2} \quad (5.16)$$

Для иллюстрации полученного результата рассмотрим диск с радиусом  $R_1^0 = 250$  мм,  $R_2^0 = 500$  мм. Предположим сначала, что диск имеет постоянную толщину  $h_0$ , и обозначим массу диска через  $m_0$ . Зависимости относительных кольцевых и радиальных напряжений  $\bar{\sigma}_\theta = \sigma_\theta/q$  (кривая 1) и  $\bar{\sigma}_r = \sigma_r/q$  (кривая 2) от безразмерного радиуса  $\rho = r/R_1^0$ , построенные с помощью формулы (5.5), показаны на фиг. 1. Заметим, что в дальнейшем сравниваются только кольцевые напряжения рассматриваемых вариантов диска. Относительные напряжения  $\bar{\sigma}_r$  во всех случаях изменяются от  $-1$  при  $\rho = 1$  до  $0$  при  $\rho = R_2/R_1$  по законам близким к показанному на фиг. 1. Максимальное значение  $\bar{\sigma}_\theta$  реализуется на внутреннем контуре и составляет  $\bar{\sigma}_\theta^0 = 1.67$ .

Рассмотрим диск с переменной толщиной, изменяющейся в соответствии с равенством (5.15), и получим решение задачи классической теории упругости. Для этого равенство (5.15) для толщины необходимо подставить в уравнения равновесия (5.1) и проинтегрировать его совместно с уравнением совместности деформаций (5.4) и граничными условиями (5.3). Заметим, что выражение (5.15) включает два независи-



Фиг. 1

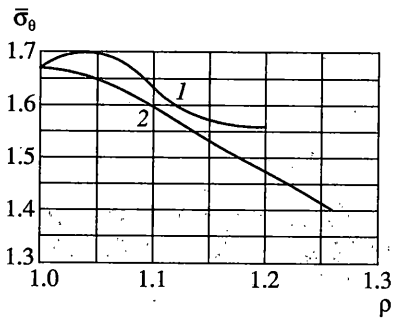


Фиг. 2

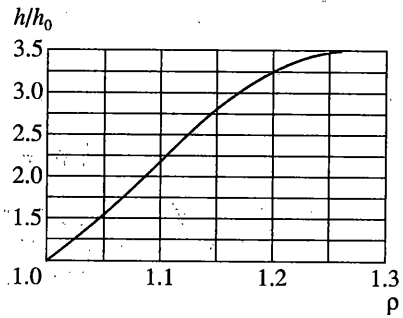
мых параметра  $h_1$  и  $\alpha$ . Параметр  $h_1$  принимается равным  $h_0$ , т.е. считается, что на контуре отверстия все диски имеют толщину равную толщине исходного диска. Параметр  $\alpha$  находится из условия  $\bar{\sigma}_\theta(\rho=1) = \bar{\sigma}_\theta^0$ , т.е. принимается, что напряжения на нагруженной поверхности диска равны максимальным напряжениям в исходном диске с постоянной толщиной  $h_0$ .

Приведем результаты численного решения для дисков, у которых  $\nu = 0.3$ , радиус отверстия равен радиусу исходного диска  $R_1 = R_1^0 = 250$  мм, а наружный радиус  $R_2$  варьируется.

При  $R_2 = R_2^0 = 500$  мм, т.е. при наружном радиусе, равном радиусу исходного диска, имеем  $\alpha = 0$  и  $h = h_0$ , т.е. получаем диск постоянной толщины. При  $R_2 > R_2^0$  параметр  $\alpha$  оказывается положительным и толщина диска уменьшается при увеличении  $r$ , а при  $R_2 < R_2^0$  параметр  $\alpha$  является отрицательным и толщина возрастает при увеличении  $r$ . Заметим, что во всех случаях параметр  $\alpha$  оказывается достаточно малым. В частности, при  $R_2 = 1.2R_2^0$  имеем  $\alpha = 1.64 \cdot 10^{-4}$ , а при  $R_2 = 0.6R_2^0$  получаем  $\alpha = -5.82 \cdot 10^{-4}$ . Существенно, что в зависимости от  $R_2$  изменяется и масса диска. Как следует из фиг. 2, зависимость относительной массы  $\bar{m} = m/m_0$  от параметра  $\bar{R}_2 = R_2/R_2^0$  является линейной и показывает, что при  $\bar{R}_2 < 1$  имеется возможность снижения массы диска по сравнению с диском постоянной толщины. Однако наружный радиус диска может быть снижен только до некоторого предела, определяемого величиной кольцевых напряжений  $\sigma_\theta$ . В качестве примера на фиг. 3 показано распределение  $\bar{\sigma}_\theta$  для диска с отношением  $R_2/R_2^0 = 0.6$  (кривая 1). Из графика следует, что в окрестности отверстия напряжение  $\bar{\sigma}_\theta$  превосходит допустимое значение  $\bar{\sigma}_\theta^0 = 1.67$ . Таким образом, может быть поставлена задача о выборе минимального наружного радиуса диска, при котором кольцевые напряжения не превышают допустимой величины. В результате расчета установлено, что такой величиной является  $R_2 = 0.633R_2^0 = 316.5$  мм. Распределение кольцевых напряжений по радиусу такого диска показано на фиг. 3 (кривая 2). На фиг. 4 представлен закон изменения толщины по радиусу рассматриваемого диска, соответствующий равенству (5.15). Заметим, что толщина диска увеличивается при удалении от нагруженного отверстия несмотря на то, что максимальные напря-



Фиг. 3



Фиг. 4

жения действуют на контуре отверстия (фиг. 1). Масса полученного диска оказывается вдвое меньше массы исходного диска постоянной толщины (она соответствует точке на зависимости, показанной на фиг. 2).

Таким образом, приведенный пример подтверждает предположение о том, что информация о геометрии напряженного пространства, следующая из геометрической теории упругости, может быть использована для решения задачи об оптимальном распределении материала в нагруженном упругом теле.

**6. Заключение.** Отметим, что решение задачи геометрической теории упругости, построенной выше, в линейном приближении аналогично решению задачи классической теории упругости, сформулированной в напряжениях. При этом функции напряжений, вводимые в геометрической теории с помощью преобразований Эйнштейна, на котором основана общая теория относительности, определяют геометрию напряженного пространства. Эти функции находятся из уравнений совместности деформаций, следующих из условия инвариантности преобразования Эйнштейна относительно деформаций, и определяют в общем случае риманово пространство, кривизну которого предлагается рассматривать как неоднородность евклидова пространства, порождаемую напряжениями. Дальнейшая интерпретация этого пространства как конструкции, в которой материал распределяется в соответствии с неоднородностью пространства, позволяет получить информацию о рациональной форме конструкции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Синг Д. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 423 с.
2. Шмутцер Э. Теория относительности. Современное представление. М.: Мир, 1981. 230 с.
3. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д. Гравитация. Т. 2. Бишкек: Айнштайн, 1996. 526 с.
4. Кильчевский Н.А. Основы тензорного исчисления с приложениями к механике. Киев: Наук. думка, 1972. 148 с.
5. Васильев В.В. Напряженное состояние твердых тел и некоторые геометрические эффекты // Изв. АН. МТТ. 1989. № 5. С. 30–34.
6. Васильев В.В., Федоров Л.В. К задаче теории упругости, сформулированной в напряжениях // Изв. РАН. МТТ. 1996. № 2. С. 82–92.
7. Власов В.З. Уравнения неразрывности деформаций в криволинейных координатах // Избр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 558 с.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 703 с.
9. Раевичский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.