

© 2006 г. **А.О. ВАТУЛЬЯН, А.Н. СОЛОВЬЕВ**

**О РЕКОНСТРУКЦИИ ПЛОСКИХ ТРЕЩИН  
В УПРУГОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ТЕЛЕ  
С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИХ БЕРЕГОВ**

Предложен способ идентификации плоских трещин в упругой теплопроводной среде, основанный на реконструкции источников тепла, которыми моделируется ударное и фрикционное взаимодействие их берегов при внешнем гармоническом механическом воздействии. Информацией для процедуры реконструкции является установившееся, после некоторого времени воздействия, температурное поле на границе тела. С помощью функционала взаимности задача о нахождении параметров плоскости, содержащей трещины, сводится к решению некоторых трансцендентных уравнений; детально изучен плоский случай. Обсуждены результаты вычислительных экспериментов.

**1. Введение.** Некоторые широко распространенные практические методы неразрушающего контроля сплошности упругих конструкций и качества соединения их элементов основаны на ультразвуковом механическом воздействии на эти тела. Обычно при моделировании колебаний тел с трещинами считается, что берега трещин не взаимодействуют [1]. В рамках этого допущения в последние годы решен ряд обратных задач (ОЗ) теории трещин о восстановлении их параметров по известному полю перемещений на границе тела (например [2–5]). Как правило, в этом случае системы операторных уравнений для решения ОЗ формулируются на основе идеологии теории потенциала и приводят к сложным нелинейным системам интегральных уравнений. При этом для успешной процедуры реконструкции необходимо ультразвуковое воздействие порядка сотен килогерц. В то же время отметим, что когда исследуемые тела содержат трещины, то они являются источниками сигналов акустической эмиссии и зонами, в которых происходит более интенсивная, по сравнению с остальным объемом, диссипация энергии. Облучаемые низкочастотными ультразвуковыми волнами (в диапазоне от 20 до 40 кгц) трещины в изделиях могут колебаться, индуцируя локальный нагрев в области дефекта. В последнее время ряд методов использует в целях идентификации дефектов обнаружение этого индуцированного нагрева, применяя современную тепловизионную технику с разрешением в сотую долю градуса [6, 7]. Явления разогрева связаны с отражением упругих волн от берегов трещины и взаимодействием берегов трещины между собой, которое происходит с конечными скоростями и может быть описано двумя механическими процессами: ударом и скольжением с трением берегов трещины относительно друг друга. Задача об интерфейсной трещине с учетом нелинейного взаимодействия берегов рассмотрена [8]. Некоторые статические контактные задачи с учетом трения между слоями с неизвестной областью контакта рассматриваются в [9]. Следует отметить, что даже при известной конфигурации дефекта область контакта берегов изменяется во времени и является неизвестной. В силу этого обстоятельства математическое моделирование подобных прямых задач может быть достаточно осуществлено лишь в рамках нестационарных контактных задач теории упругости и термоупругости с неизвестной областью контакта. В

последнее время ряд подобных задач теории трещин в упругой постановке с переменной областью контакта, но без учета ударных явлений и диссипации энергии, был исследован в [10, 11]. Решение таких прямых краевых задач теории упругости представляет сложную математическую проблему и возможно лишь на основе численных методов. Если относительные размеры трещины не слишком велики, то при постановке обратной задачи об ее идентификации влияние трещины на механические и тепловые поля внутри и на границе тела может быть приближенно заменено воздействием неизвестных источников в рамках модели несвязанной термоупругости. Таким образом, задача о реконструкции трещины сводится к определению геометрического носителя предполагаемых источников возмущений, причем их интенсивность может оставаться неизвестной. Наличие априорной информации о том, что трещина (или система трещин) расположена в некоторой плоскости, значительно упрощает процедуру их реконструкции и приводит для определения параметров плоскости к системе трансцендентных уравнений; в двумерном случае это предположение позволяет получить явные формулы. После этого реконструкция “источников-трещин” проводится с помощью схем, предложенных в [12–14] для обнаружения областей разрыва в компонентах физических полей.

**2. Постановка задачи.** Пусть анизотропное упругое теплопроводное тело, занимающее конечную односвязную область  $V$  с границей  $S$ , совершает колебания под действием некоторой механической нагрузки, изменяющейся по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ , причем тело ослаблено системой трещин  $\Gamma = \bigcup_{p=1}^M \Gamma_p$  ( $\Gamma_p = \Gamma_p^+ \cup \Gamma_p^-$ ),

которые моделируются разрезами, расположенными в сечении  $S_{cr}$  области  $V$  некоторой поверхностью  $\Pi$ . Берега трещин взаимодействуют между собой, в результате чего происходит их разогрев. Предположим, что через некоторое время после начала колебаний в теле установился стационарный температурный режим, который определяется неизвестным источником тепла  $W(\underline{x}, \omega)$ . Заметим, что источники тепла имеют компактный носитель, а формулировка прямой задачи по нахождению температуры в рассматриваемом теле определяется краевой задачей несвязанной теории термоупругости [15], причем для определения распределения температуры в теле получается обобщенное уравнение теплопроводности для анизотропной среды

$$k_{ij} \Theta_{,ij} = -W \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \underline{x} \in V \quad (2.1)$$

(где  $k_{ij}$  – компоненты симметричного тензора теплопроводности) с краевыми условиями на внешней границе  $S$ , на которой происходит свободный теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру  $\Theta_0$ :

$$\phi = k_{ij} \Theta_{,j} n_i |_S = -h(\Theta - \Theta_0) |_S \quad (2.2)$$

При постановке обратной задачи, в которой определению подлежит уравнение поверхности  $\Pi$  и геометрия трещин, будем считать, что на границе  $S$  известна температура  $\Theta$ :

$$\Theta |_S = \psi \quad (2.3)$$

*Замечание.* В случае изотропного материала задача (2.1), (2.2) переходит в краевую задачу для уравнения Пуассона.

**3. Регистрация трещин.** Трещины в теле могут быть обнаружены по несогласованности между граничными распределениями температуры для тела с “трещинами-источниками” и без них. В качестве меры этой несогласованности введем в рассмотрение линейный функционал

$$F(\Theta^*) = \int_S (k_{ij} \Theta_{,ij}^* n_i \psi - \Theta^* \phi) dS \quad (3.1)$$

на множестве пробных решений  $\Theta^*$ , удовлетворяющих однородному уравнению (2.1) в области  $V$  без трещин и без источников

$$k_{ij} \Theta_{,ij}^* = 0, \quad x \in V \quad (3.2)$$

Применяя теорему взаимности в термоупругости, нетрудно показать, что

$$\int_{\Gamma^+} W(x, \omega) \Theta^* dS = F(\Theta^*) \quad (3.3)$$

В случае, когда “трещины-источники” отсутствуют, функционал  $F(\Theta^*)$  тождественно равен нулю. Отметим, что функционал (3.1) в постановке настоящей работы, когда температура и тепловой поток известны на всей границе тела, может быть вычислен для любого пробного  $\Theta^*$  температурного поля. Задача идентификации трещины сводится к определению носителя  $\Gamma^+$  из (3.3). Наиболее просто решается обратная задача об определении носителя трещины в случае априорной информации о том, что поверхность  $\Pi$  представляет собой плоскость.

**4. Выбор пробных решений и определение плоскости  $\Pi$ .** Из равенства (3.3) при различном выборе пробных решений может быть получена система уравнений для нахождения носителя  $W(x, \omega)$  источников тепла, моделирующих трещины с взаимодействующими берегами. Первым этапом этой процедуры является определение плоскости  $\Pi$ , содержащей дефекты, которая может быть задана тремя независимыми параметрами (например, двумя углами Эйлера и расстоянием  $s$  от этой плоскости от начала координат). Пробные решения выбираются таким способом, который позволяет построить систему уравнений, определяющих параметры плоскости  $\Pi$ , исключив при этом неизвестную интенсивность источников.

Для построения разрешающей системы уравнений введем новую систему координат  $Ox_1x_2x_3$ , в которой плоскость  $\Pi$  имеет уравнение  $X_3 = c$ . Положение такой системы координат относительно исходной определяется двумя углами Эйлера – ( $\varphi$  и  $\theta$ ), причем первый задает поворот вокруг оси  $x_3$ , второй – вокруг оси  $X_1$ . Обозначим через  $\Xi$  и  $\Xi^*$  соответственно – решение краевой задачи (2.1), (2.2) и пробное решение (3.2) в новой системе координат.

В качестве таких пробных решений могут быть использованы, например, следующие линейно независимые решения уравнений (3.2)

$$\begin{aligned} \Xi_0^* &= 1, \quad \Xi_1^* = X_1, \quad \Xi_2^* = X_2, \quad \Xi_3^* = X_3 \\ \Xi_4^* &= k_{33}^* X_1 X_3 - k_{13}^* X_3^2, \quad \Xi_5^* = k_{33}^* X_2 X_3 - k_{23}^* X_3^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $k_{ij}^* = a_{ip} a_{jq} k_{pq}$ ,  $X_i = a_{ij} x_j$ ,  $a_{ij}$  – компоненты матрицы перехода к новой системе координат. Такой выбор системы пробных решений позволяет получить относительно шести неизвестных  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $c$  и  $I_1, I_2, I_3$ :

$$I_i = \int_{\Gamma^+} W X_i dS \quad (i = 1, 2), \quad I_3 = \int_{\Gamma^+} W dS$$

систему шести трансцендентных уравнений

$$I_i = H_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad cI_3 = H_4 \quad (4.2)$$

$$k_{33}^*cI_1 - k_{13}^*c^2I_3 = H_5, \quad k_{33}^*cI_2 - k_{23}^*c^2I_3 = H_6$$

$$H_i = F(\Xi_{i-1}^*) \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

Неизвестные  $I_1, I_2, I_3$  входят в эту систему линейно, что позволяет их исключить и для углов  $\varphi$  и  $\theta$  получить систему двух тригонометрических уравнений:

$$H_4(k_{33}^*H_1 - k_{13}^*H_4) = H_5H_3 \quad (4.3)$$

$$H_4(k_{33}^*H_2 - k_{23}^*H_4) = H_6H_3 \quad (4.4)$$

при этом расстояние  $c$  вычисляется по формуле

$$c = H_4/H_3 \quad (4.5)$$

Наиболее просто это осуществляется в изотропном случае, когда  $k_{ij} = \delta_{ij}$  и в качестве пробных решений можно выбрать систему шести функций, являющихся решениями уравнения Лапласа:

$$\Xi_0^* = 1, \quad \Xi_1^* = X_1, \quad \Xi_2^* = X_2, \quad \Xi_3^* = X_3, \quad \Xi_4^* = X_1X_3, \quad \Xi_5^* = X_2X_3 \quad (4.6)$$

Тогда система уравнений (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} & (F_1 \sin \varphi \sin \theta - F_2 \cos \varphi \sin \theta + F_3 \cos \theta)(F_1 \cos \varphi + F_2 \sin \varphi) = \\ & = - \int_S \phi dS [ (F_{11} - F_{22}) \sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + F_{12} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \sin \theta + \\ & + F_{13} \cos \varphi \cos \theta + F_{23} \sin \varphi \cos \theta ] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & (F_1 \sin \varphi \sin \theta - F_2 \cos \varphi \sin \theta + F_3 \cos \theta) \times \\ & \times (-F_1 \sin \varphi \cos \theta + F_2 \cos \varphi \cos \theta + F_3 \sin \theta) = - \int_S \phi dS \times \\ & \times [ -F_{11} \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - F_{22} \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + F_{33} \sin \theta \cos \theta + \\ & + 2F_{12} \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \cos \theta - F_{13} \sin \varphi (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \\ & + F_{23} \cos \varphi (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) ] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$F_i = F(x_i, \omega), \quad F_{ij} = F(x_i, x_j, \omega)$$

После решения системы (4.7), (4.8) расстояние от начала координат до плоскости  $\Pi$  находится по формуле (4.5), которая примет вид

$$c = (F_1 \sin \varphi \sin \theta - F_2 \cos \varphi \sin \theta + F_3 \cos \theta) \left( - \int_S \phi dS \right)^{-1} \quad (4.9)$$

В случае плоской задачи, когда температура  $\Theta = \Theta(x_2, x_3)$ , в (4.7), (4.8) следует положить  $\varphi = 0$ ,  $F_1 = 0$ , и для нахождения угла  $\theta$  получим уравнение

$$a_2 \tan^2 \theta + a_1 \tan \theta - a_2 = 0$$

$$a_2 = - \int_S \phi dS F_{23} - F_2 F_3, \quad a_1 = - \int_S \phi dS (F_{22} - F_{33}) + F_3^2 - F_2^2 \quad (4.10)$$

а для определения  $c$  соответственно, соотношение

$$c = (-F_2 \sin \theta + F_3 \cos \theta) \left( - \int_S \phi dS \right)^{-1} \quad (4.11)$$

При  $a_2 \neq 0$  и  $a_1 \neq 0$  уравнение (4.10) имеет два корня, причем очевидно, что углы, им соответствующие, разнятся на  $\pi/2$ . Проблема выбора единственного решения может быть решена следующим образом. Уравнение (4.10) при  $a_2 = 0$  имеет решение  $\theta = 0$ , причем это решение единственное. Это обстоятельство указывает простой алгоритм отбора единственного решения (в котором выбор исходной системы координат согласуется с приведенным условием). Для системы уравнений (4.7), (4.8) построение такого алгоритма связано с решением  $\varphi = 0$ ,  $\theta = 0$ , условием существования которого являются равенства

$$a_3 = - \int_S \phi dS F_{13} - F_1 F_3 = 0, \quad a_2 = - \int_S \phi dS F_{23} - F_2 F_3 = 0 \quad (4.12)$$

В случае одиночной трещины независимо от нахождения параметров плоскости можно указать координаты  $(x_{10}, x_{20}, x_{30})$  внутренней точки трещины, которая соответствует "центру тяжести" теплового источника

$$x_{i0} = F_i / \left( - \int_S \phi dS \right) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.13)$$

В случае нескольких трещин, расположенных в одной плоскости (в двумерном случае на прямой), очевидно, указанная точка принадлежит этой плоскости (прямой). Это обстоятельство, даже в случае множественных трещин, с использованием различных схем ультразвукового облучения тела (изменение частоты, поверхности облучения и т.п.), в результате чего изменяется конфигурация источника и положение его "центра тяжести", позволяет без решения уравнений (4.7), (4.8) определять параметры плоскости по трем точкам (и прямой по двум точкам).

В предположении о малости размера трещины удалось получить формулы для определения центра и длины одиночной трещины. В этом случае реконструкция осуществляется в два этапа. Опишем эту процедуру для краткости в плоском случае. На первом этапе определяются параметры  $c$  и  $\theta$ , как описано выше. Далее осуществляется переход к новой системе координат  $X_2 = x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta$ ,  $X_3 = -x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta$ . При этом для координат точек трещины выполнено условие  $-l_0 + d_0 \leq X_2 \leq d_0 + l_0$ , где  $d_0$  и  $l_0$  координата центра и полудлина трещины соответственно. Исходя из структуры решения краевых задач для уравнений эллиптического типа с трещиной примем следующий закон изменения плотности источника

$$W(X_2) = \sqrt{(d_0 + l_0 - X_2)(X_2 - d_0 + l_0)} w_0(X_2)$$

Таблица 1

$k$	$f_k^0$	$f_k^1$	$\zeta_1$	$\zeta_2$
1	6.5166	6.3598		
2	8.3254	7.9682		
3	9.5713	9.1547		
4	23.3079	20.9704	-----*-----	
5	25.1315	23.1150	-----*--	-----
6	26.2555	23.7362		-----*
7	29.6874	29.1016	--*-----*	
8	36.6587	32.2604	-----*--	-----*
9	37.0323	34.7495	--*-----	-----
10	40.2789	39.8237	--*-----	--*-----
11	42.2030	40.8941	-----*	

Осуществим замену переменной  $X_2 = d_0 + l_0 t, t \in [-1, 1]$  и, в предположении малости  $l_0$  примем  $W = l_0 \sqrt{1 - t^2} (w_0 + l_0 w_1 t)$ . В этом случае легко вычисляются функционалы

$$J_j = \int_l W X_2^j dl$$

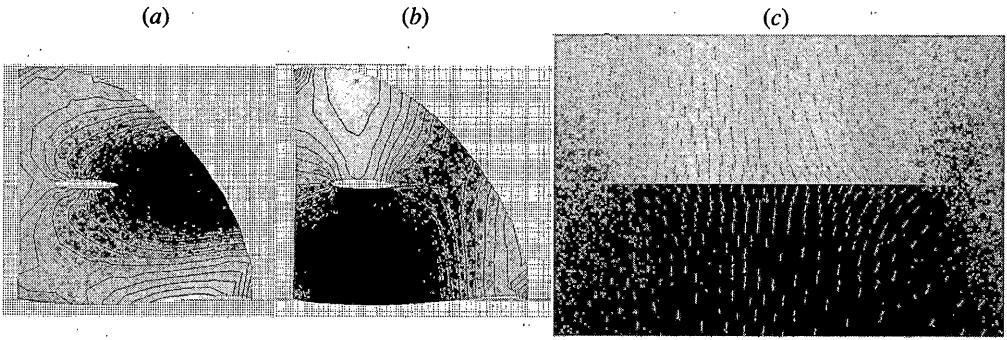
$$J_0 = 1/2\pi l_0^2 w_0, \quad J_1 = 1/2\pi (l_0^2 w_0 d_0 + 1/4 l_0^4 w_1)$$

$$J_2 = 1/2\pi (l_0^2 w_0 d_0^2 + 1/2 d_0 l_0^4 w_1 + 1/4 l_0^4 w_0)$$

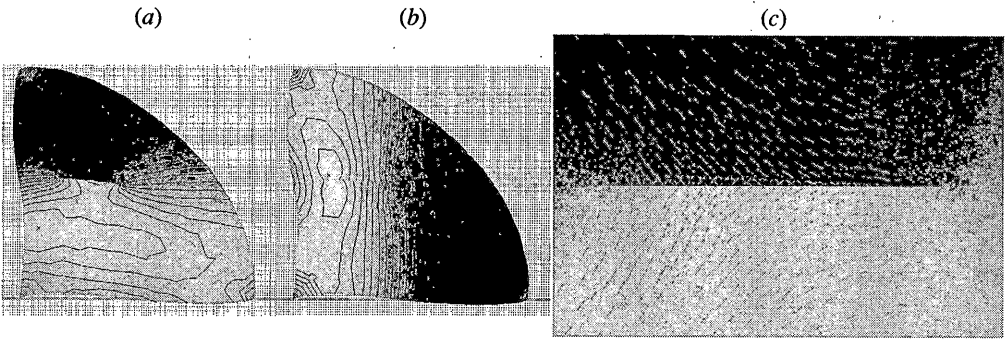
через значения которых определяются параметры трещины

$$d_0 = J_1 J_0^{-1} + O(l_0^2), \quad l_0 = 2 J_0^{-1} (J_2 J_0 - J_1^2)^{1/2} \tag{4.14}$$

**5. Численные эксперименты.** Численные эксперименты были проведены для задачи о реконструкции прямолинейных трещин в плоской изотропной области в виде четверти окружности. Первым шагом вычислительного эксперимента было изучение компонент вектора смещений внутри тела, в частности в окрестности трещины, на примере установившихся колебаний (рабочий диапазон частот 20–40 кГц) рассматриваемой области (материал области – сталь, радиус окружности – 0.1 м). На криволинейную границу области действует равномерно распределенное давление с амплитудой  $q = 10^4$  Н/м, угловые точки области закреплены, прямолинейные границы свободны от нагрузок. Тело ослаблено прямолинейной трещиной, моделируемой отверстием, у которого отношение поперечного размера к продольному размеру составляло  $10^{-6}$ , берега трещины не взаимодействовали между собой. Представленные ниже результаты модального и гармонического анализа получены для горизонтально ориентированной трещины длины 0.03 м, центр которой находился в точке с координатами (0.03, 0.05). Расчеты собственных частот и волновых полей проведены с помощью конечно-элементного комплекса ACELAN [16] (при этом КЭ сетка содержала 994 узла). В табл. 1 представлены первые одиннадцать собственных частот  $f_k$  (в кГц) для тела без дефекта  $f_k^0$  и с трещиной  $f_k^1$ . Отметим снижение резонансных частот для тела с трещиной, которое составляет около 10% для 4-ой моды и менее 1.5% для 7-ой и 10-ой мод.



Фиг. 1

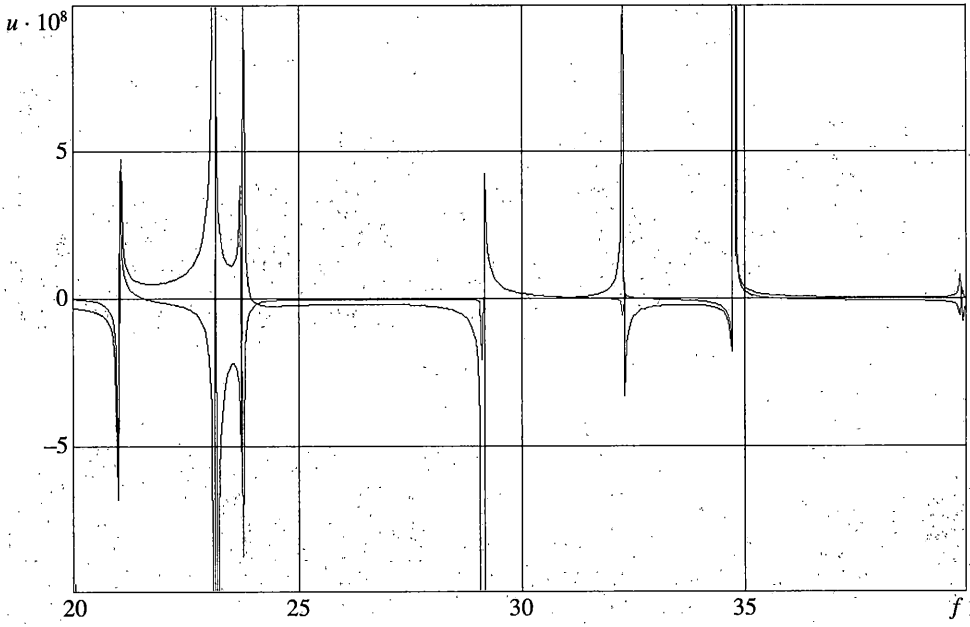


Фиг. 2

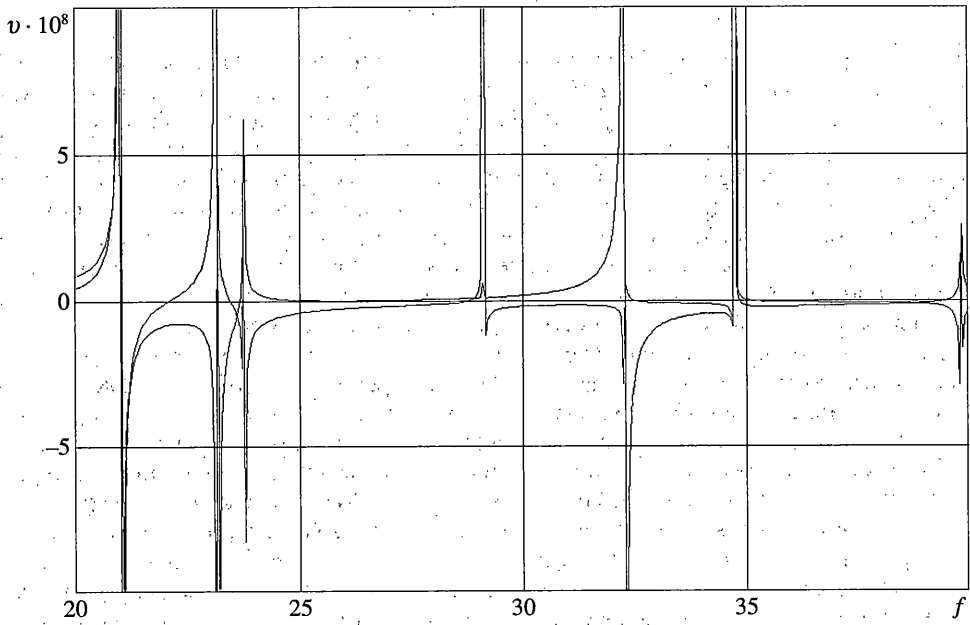
В четвертом и пятом столбцах таблицы 1 схематически показаны расположения максимального поперечного  $\zeta_1$  и продольного раскрытия  $\zeta_2$  трещины. Эти схемы указывают на тот факт, что амплитуда колебаний берегов трещины, а, следовательно, и структура источника тепловыделения существенным образом зависит от частоты. Так, например, на четвертой резонансной частоте основной причиной теплообразования будет удар берегов друг о друга, в то время, как на шестой частоте этой причиной выступает взаимное трение берегов. Это иллюстрируется фиг. 1, 2, на которых, на деформированном изображении области представлены распределения горизонтального (a) и вертикального (б) смещений, а также векторное поле (c) смещений в окрестности трещины на четвертой (фиг. 1) и шестой (фиг. 2) резонансной частотах.

Следует отметить, что моды колебаний, соответствующие первым трем частотам, характеризуются слабым взаимодействием берегов трещины (разрыв поля смещений на трещине невелик). На фиг 3 и 4 показаны АЧХ горизонтального (фиг. 3) и вертикального (фиг. 4) смещений средней точки верхнего берега трещины при различных способах ультразвукового облучения тела, в частности, рассмотрены случаи облучения криволинейной и нижней грани равномерным давлением. По анализу кривых, представленных на этих рисунках, можно оценить эффективность возбуждения мод колебаний в рассмотренном частотном интервале с помощью различных схем облучения.

Вторым шагом численного эксперимента было решение прямой задачи стационарной теплопроводности для рассматриваемого тела, при этом “трещины-источники” моделировались областями с прямолинейными границами, поперечный размер которых на несколько порядков был меньше продольного. В этих областях задавалось различное распределение массовых источников тепла, моделирующее различные схе-

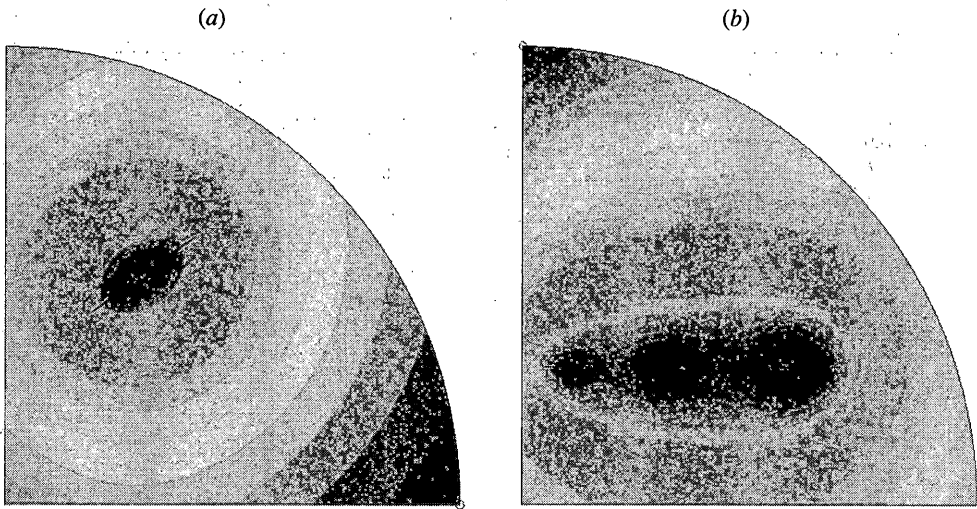


Фиг. 3



Фиг. 4





Фиг. 5

мы ультразвукового облучения. В частности, проведены расчеты для следующих конфигураций источников: 1.  $W = W_0$ ; 2.  $W = W_0 \exp(-100[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2])$  (максимум в центре); 3.  $W = W_0 \exp(-100[(x - x_0 - L/2)^2 + (y - y_0)^2])$ ; 4.  $W = W_0 \exp(-100[(x - x_0 + L/2)^2 + (y - y_0)^2])$  (смещенные максимумы); 5.  $W = W_0((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - ((x - x_0)^4 + (y - y_0)^4))$  (два максимума).

На границе области задавались условия свободного теплообмена с окружающей средой нулевой температуры, при этом безразмерные коэффициенты теплопроводности и теплообмена, а также безразмерный радиус были приняты равными единице. Прямая задача о стационарном распределении температуры решалась с помощью конечно-элементного пакета FlexPDE. На фиг. 5 представлены распределения температуры при первом типе источника для одиночной трещины и системы трех трещин, расположенных на одной прямой (при этом наибольшая и наименьшая температуры отмечены одинаковой интенсивностью штриховки).

В численном эксперименте изучалось влияние угла наклона трещины на точность восстановления параметров носителя, эти результаты представлены в табл. 2 для одиночной трещины с центром в точке  $x_0 = 0.3$ ,  $y_0 = 0.5$  длиной  $L = 0.3$  при первом типе источника.

Приведенные в табл. 2 данные (во втором столбце представлены значения найденного угла ( $\tilde{\theta}$ ), третий столбец – расстояние до трещины ( $\tilde{c}$ ), четвертый столбец ( $\tilde{c}$  – найденное расстояние) показывают высокую точность определения угла и расстояния во всем диапазоне возможного изменения угла наклона трещины.

Расчеты, представленные в табл. 3 (во втором столбце представлены значения найденного угла ( $\tilde{\theta}$ ), третий столбец ( $\tilde{c}$  – найденное расстояние), показывают зависимость точности восстановления параметров носителя горизонтальной трещины с центром в точке  $x_0 = 0.3$ ,  $y_0 = 0.5$  от ее длины. Отметим, что трещины, размер которых составляет 0.5% характерного размера тела, восстанавливаются с погрешностью, не превышающей 5%.

Для горизонтальной трещины с параметрами  $x_0 = 0.3$ ,  $y_0 = 0.5$  и длиной  $L = 0.3$  зависимость восстановленных параметров ориентации и внутренней точки от типа (номер  $N$ ) источника приведена в табл. 4 (во втором столбце представлены значения найденного

Таблица 2

$\theta$	$\tilde{\theta}$	$c$	$\tilde{c}$
0.0	0.0016	0.5000	0.4995
$\pi/10$	0.3148	0.3828	0.38275
$\pi/5$	0.6297	0.2282	0.2274
$3\pi/10$	0.9412	0.0512	0.0519
$2\pi/5$	1.2563	-0.1308	-0.1306
$\pi/2$	1.5708	-0.3000	-0.2998
$-\pi/10$	-0.3135	0.5682	0.51816
$-\pi/5$	-0.6248	0.5808	0.5810
$-3\pi/10$	-0.9426	0.5366	0.53657
$-2\pi/5$	-1.2575	0.4398	0.4395

Таблица 3

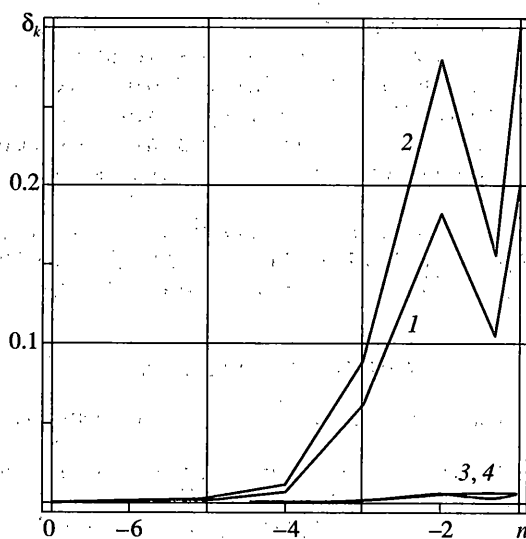
$L$	$\tilde{\theta}$	$\tilde{c}$
0.03	0.0016	0.4995
0.02	0.0026	0.4992
0.01	0.0037	0.4989
0.005	-0.0038	0.5011
0.001	-0.4348	0.4826

Таблица 4

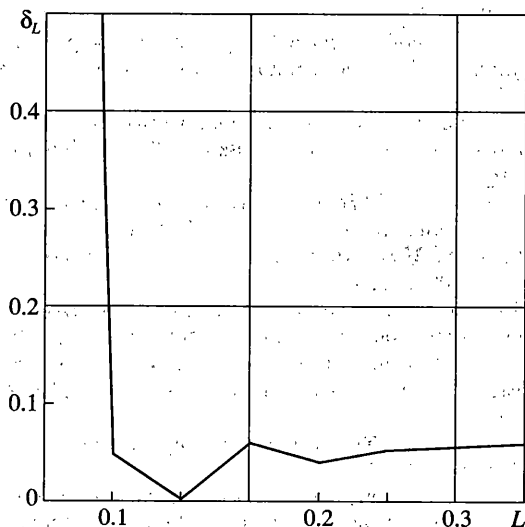
$N$	$\tilde{\theta}$	$\tilde{c}$	$\tilde{x}_0$ $x_0 \in [0.15; 0.45]$	$\tilde{y}_0$ $y_0 = 0.5$
1	0.0016	0.4995	0.30	0.49999
2	0.0009	0.4997	0.30	0.49998
3	0.0002	0.4999	0.3648	0.50001
4	0.0057	0.4987	0.2352	0.50001
5	0.0004	0.4999	0.30	0.50002

угла ( $\tilde{\theta}$ ), третий столбец – найденное расстояние ( $\tilde{c}$ ), четвертый и пятый столбцы – найденные координаты внутренних точек ( $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$ ). Последние два столбца показывают высокую точность определения точки на носителе и возможность его реконструкции с помощью изменения конфигурации источника.

Для наклонной трещины ( $x_0 = 0.3$ ,  $y_0 = 0.5$ ,  $L = 0.3$ ,  $\theta = 0.62832$ , источник первого типа) на фиг. 6 представлены результаты, отражающие зависимость  $\delta_k$  относительной погрешности восстановления от случайной погрешности входных данных –  $\varepsilon \times 10^{-n}$ , где  $\varepsilon$  – случайная величина, распределенная на  $[-1; 1]$ . Цифрой 1 отмечена  $\delta_1$  относительная погрешность в нахождении угла  $\theta$ , цифрой 2 –  $\delta_2$  погрешность нахождения расстояния  $c$ , цифрами 3 и 4 – погрешности  $\delta_3$  и  $\delta_4$  нахождения координат внутренней



Фиг. 6



Фиг. 7

точки  $x_0$  и  $y_0$ . Следует отметить, что если угол наклона и расстояние до носителя уже при 1%-ой погрешности в входных данных составляет 18%, то координаты внутренней точки трещины даже при 10% погрешности входных данных находятся с погрешностью менее 1%.

Для горизонтальной трещины ( $x_0 = 0.3$ ,  $y_0 = 0.5$ , источник  $W = W_0 \sqrt{(x - (x_0 - L/2))(x_0 + L/2 - x)}$  повторял заложенную априорную конфигурацию) на фиг. 7 представлена  $\delta_L$  относительная погрешность восстановления длины трещины  $L$  по асимптотическим формулам (3.14) в зависимости от размера трещины. При

этом, также следует отметить высокую точность восстановления центра трещины (относительная погрешность менее 0.0001%), длина трещины восстанавливается с погрешностью менее 5%–6% для трещины, размер которой составляет 5%–35% от характерного размера области. Отметим, что при уменьшении длины трещины точность решения прямой задачи приходилось увеличивать. Это обстоятельство указывает на то, что для обнаружения малых трещин потребуется более точная аппаратура.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-01124, 03-07-90411, 05-01-00734), гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ НШ-2113.2003 и госконтракта ФАНИ № 02.445.11.7042.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239 с.
2. *Vannour T., Ben Abda A., Jaoua M.* A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks // *Inverse Problems*. 1997. № 13. № 4. P. 899–917.
3. *Alves C.J.S., Ha Duong T.* On inverse scattering by screens // *Inverse Problems*. 1997. V. 13. № 5. P. 1161–1176.
4. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Определение ориентации плоских трещин в упругом теле // *Теорет. и прикл. механика*. Харьков: "Основа". 2003. Т. 37. С. 141–145.
5. *Ватульян А.О.* Об определении конфигурации трещины в анизотропной среде // *ПММ*. 2004. Т. 68. Вып. 1. С. 180–188.
6. *Ермолов И.Н., Ланге Ю.В., Шербинский В.Г.* Прогресс в ультразвуковом контроле (по материалам 15-й Международной конференции). 1. Новые методы и аппаратура // *Контроль. Диагностика*. 2002. № 3.
7. *Ковалев А.В.* Поисковые технические средства на основе методов интроскопии // *Акустические поисковые системы. Специальная техника*. 2000. № 2. <http://st.ess.ru/publications/articles/kovalev4/kovalev.htm>
8. *Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н.* Трещина на границе раздела материалов с нелинейным взаимодействием берегов: Препринт № 619. М.: ИПМ РАН, 1998. 42 с.
9. *Александров В.М., Чебаков М.И.* Аналитические методы в контактных задачах теории упругости М. Физматлит, 2004. 302 с.
10. *Zozulya V.V., Men'shikov A.V.* About one 3D contact problem of fracture mechanics in a case of normal action of tension-compression wave // *Intern. Appl. Mech*. 2002. V. 38. № 7. P. 74–78.
11. *Зозуля В.В., Меньшиков А.В.* Контакт берегов плоской эллиптической трещины при нормальном падении гармонической волны растяжения – сжатия // *Теорет. и прикл. механика*. 2003. Вып. 37. С. 168–172.
12. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Об определении дефектов в составном упругом теле // *Дефектоскопия*. 2004. Т. № 5. С. 15–23.
13. *Соловьев А.Н.* Идентификация интерфейсной трещины. // *Современные проблемы механики сплошной среды: Тр. 8-й Междунар. науч. конф. Ростов-на-Дону*, 2002. Т. 1. С 163–169.
14. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Некоторые полуявные алгоритмы реконструкции интерфейсных трещин // *Изв. вузов. Северо-Кавк. регион. Естествов. науки*. 2003. № 3. С. 20–24.
15. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
16. *Белоконь А.В., Еремеев В.А., Наседкин А.В., Соловьев А.Н.* Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости // *ПММ*. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 381–393.

Ростов на/Дону

Поступила в редакцию  
2.08.2004