

УДК 539.375

© 2006 г. А.В. ЛОВЕЙКИН, А.Ф. УЛИТКО

## АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В НЕСЖИМАЕМОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ КЛИНОВИДНОЙ ТРЕЩИНОЙ

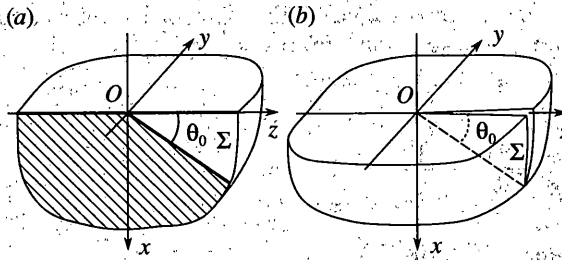
Рассмотрена задача о равновесии упругого несжимаемого полупространства, ослабленного приповерхностной клиновидной трещиной, на стенки которой действует внутреннее давление. Используя представления Папковича – Нейбера, задача сведена к нахождению двух гармонических функций, которые удовлетворяют смешанным краевым условиям. Построение этих функций проводится в сферических координатах с использованием интегральных представлений Меллина и типа Мелера – Фока. Полученное аналитическое решение позволило установить характер распределения напряжений и проанализировать напряженно-деформированное состояние в окрестности точки выхода ребра трещины на свободную поверхность полупространства.

**1. Введение.** Пространственные задачи теории упругости для тел с приповерхностными разрезами или трещинами имеют определенный научно-практический интерес. Это связано с тем, что практически все реальные тела имеют такого рода дефекты. Следовательно, исследование напряженно-деформированного состояния в таких телах является практически важной задачей. В этом направлении следует отметить работы [1–5], в которых рассмотрены тела с приповерхностными или сквозными трещинами, ребра которых перпендикулярны поверхности тела. Особо следует отметить работу [6], авторами которой сделана попытка рассмотреть более общий случай, когда ребро трещины выходит на поверхность тела под произвольным углом. Однако следует отметить, что результаты, полученные в некоторых из перечисленных работ, не удовлетворяют условиям ограниченности упругих перемещений и конечности энергии упругих деформаций и представляются физически необоснованными. Из сказанного выше можно сделать вывод, что вопрос об исследовании напряженно-деформированного состояния в телах с приповерхностными трещинами остается открытым.

**2. Постановка задачи.** В данной работе рассматривается задача статической теории упругости о равновесии упругого несжимаемого полупространства, ослабленного приповерхностной клиновидной трещиной (фиг. 1). Пусть полупространство занимает область  $x > 0$ , а трещина расположена в плоскости  $y = 0$  и занимает там двумерную область  $\Sigma$  (см. фиг. 1). Будем считать, что поверхность полупространства  $x = 0$  свободна от напряжений, а на стенки трещины  $\Sigma$  действует внутреннее давление. В сформулированных предположениях очевидно, что задача будет симметричной по координате  $y$ , и ее решение достаточно искать в четверти пространства  $\Omega = \{x > 0, y > 0\}$  при следующих смешанных краевых условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_x|_{x=0} &= \tau_{xy}|_{x=0} = \tau_{xz}|_{x=0} = 0 \\ \sigma_y|_{y=0} &= -p(x, z), \quad \tau_{yx}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0 \quad (x, z) \in \Sigma \\ u_y|_{y=0} &= 0, \quad \tau_{yx}|_{y=0} = \tau_{yz}|_{y=0} = 0 \quad (x, z) \notin \Sigma \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $p(x, z)$  – функция, описывающая действующее на стенки трещины давление.



Фиг. 1

Представим вектор упругих смещений через гармонические функции Папковича-Нейбера [7]:

$$2Gu = 4(1 - \nu)(\mathbf{i}\Phi_1 + \mathbf{j}\Phi_2) - \text{grad}(x\Phi_1 + y\Phi_2 + \Phi) \quad (2.2)$$

$$\Phi = (1 - 2\nu)(\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2), \quad \Phi_1 = \partial\tilde{\Phi}_1/\partial x, \quad \Phi_2 = \partial\tilde{\Phi}_2/\partial y$$

где  $\Phi, \Phi_1, \Phi_2$  – гармонические функции,  $G, \nu$  – модуль сдвига и коэффициент Пуассона упругого материала. Отсутствие касательных напряжений при  $x = 0$  и при  $y = 0$  приводит к условиям:

$$\partial\tilde{\Phi}_2/\partial x|_{x=0} = 0, \quad \partial\tilde{\Phi}_1/\partial y|_{y=0} = 0 \quad (2.3)$$

При этом для нормальных напряжений и смещений имеют место равенства:

$$\sigma_x|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Phi_1 + \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} \right) \Big|_{x=0} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_2}{\partial z^2} \Big|_{x=0}$$

$$\sigma_y|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \Phi_2 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} \right) \Big|_{y=0} + (1 - 2\nu) \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_1}{\partial z^2} \Big|_{y=0} \quad (2.4)$$

$$2Gu|_{y=0} = 2(1 - \nu)\Phi_2|_{y=0}$$

где  $\varphi$  – окружная координата сферической или цилиндрической систем координат [8]. Область  $\Omega$ , в которой ищется решение, представляет собой пространственный клин с углом разворота граней  $\pi/2$ . Учитывая этот факт, а также геометрию трещины  $\Sigma$  (фиг. 1), видно, что поставленную задачу удобно решать в сферических координатах  $(\rho, \theta, \varphi)$ , связанных с декартовыми соотношениями [8]:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta$$

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < \pi$$

При этом, область  $\Omega$  и трещина  $\Sigma$  определяются следующим образом:

$$\Omega = \{\rho > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi/2\}$$

$$\Sigma = \{\rho > 0, 0 < \theta < \theta_0, \varphi = 0\}$$

Из равенств (2.2) и (2.4) следует, что в случае несжимаемого материала ( $\nu = 1/2$ ) задача сводится к нахождению двух гармонических функций  $\Phi_{1,2}$ , удовлетворяющих на

поверхности  $\Omega$  смешанным краевым условиям, которые с учетом равенств (2.2), (2.3) и (2.4) в сферических координатах будут иметь вид

$$\partial\Phi_1/\partial\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad \partial\Phi_2/\partial\varphi|_{\varphi=\pi/2} = 0 \quad (2.5)$$

$$\sigma_x|_{\varphi=\pi/2} = -\frac{1}{\rho \sin\theta} \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\sigma_y|_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho \sin\theta} \left( \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\varphi^2} \right) \Big|_{\varphi=0} = -p(\rho, \theta) \quad (0 < \theta < \theta_0) \quad (2.7)$$

$$2G\mu_y|_{\varphi=0} = \Phi_2|_{\varphi=0} = 0 \quad (\theta_0 < \theta < \pi) \quad (2.8)$$

В дальнейшем будем считать, что на стенки трещины действует давление

$$p(\rho, \theta) = \frac{\rho \sin\theta}{(\rho^2 + 2\rho \cos\theta + 1)^{5/2}}$$

**3. Построение гармонических функций.** Построение  $\Phi_{1,2}$  базируется на применении интегральных преобразований Меллина по координате  $\rho$  [7] и типа Мелера-Фока по координате  $\theta$  [9, 10]. Представим искомые функции в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-1/2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu a_s(\mu) \cos(\mu\varphi) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu \right\} ds \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-1/2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu b_s(\mu) \cos\left(\mu\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu \right\} ds, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$G_s(\mu) = \Gamma(1/2 - s + \mu)\Gamma(1/2 + s + \mu)$$

где  $a_s(\mu)$ ,  $b_s(\mu)$  – неизвестные функции.

При таком выборе неизвестных функций краевые условия (2.5) уже выполнены. Из условия (2.6), используя формулы интегральных преобразований Меллина [7] и типа Мелера-Фока [9, 10], получим

$$b_s(\mu) = -\frac{a_s(\mu)}{\mu} \sin \frac{\pi\mu}{2} \quad (3.2)$$

Перейдем к удовлетворению смешанных условий (2.7), (2.8). Если подставить в эти условия представления (3.1), продолжить полученные равенства на весь промежуток  $0 < \theta < \pi$  неизвестными функциями, а затем применить интегральное преобразование Меллина [7], то, учитывая (3.2), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu [\mu^2 - \sin^2(\pi\mu/2)] a_s(\mu) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu = \\ &= \begin{cases} -\int_0^\infty p(\rho, \theta) \sin\theta \rho^{1/2-s} d\rho = -\alpha(s) P_{s-1/2}^{-2}(\cos\theta) & (0 < \theta < \theta_0) \\ 0 \\ \sin\theta \int_0^\infty \sigma_y|_{\varphi=0} \rho^{1/2-s} d\rho = \bar{\sigma}_s(\theta) \sin\theta, & (\theta_0 < \theta < \pi) \\ 0 \end{cases} \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} a_s(\mu) \sin(\pi\mu) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu = \begin{cases} \int_0^{\infty} 2Gu_y|_{\varphi=0} \rho^{-1/2-s} d\rho = \bar{u}_s(\theta) & (0 < \theta < \theta_0) \\ 0 & \\ 0, & (\theta_0 < \theta < \pi) \end{cases} \quad (3.4)$$

В полученных равенствах (3.3), (3.4) параметр  $s$  следует считать чисто мнимым числом, функции  $\bar{\sigma}_s(\theta)$ ,  $\bar{u}_s(\theta)$  являются неизвестными функциями

$$\alpha(s) = \frac{\pi(9/4 - s^2)(1/4 - s^2)}{3 \cos(\pi s)}$$

Применяя формулы интегрального преобразования типа Мелера – Фока [9, 10], равенство (3.3) переписывается в виде

$$[\mu^2 - \sin^2(\pi\mu/2)] a_s(\mu) = \int_{\theta_0}^{\pi} \bar{\sigma}_s(\xi) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\xi) d\xi - \alpha(s) \int_0^{\theta_0} P_{s-1/2}^{-2}(\cos\xi) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\xi) \frac{d\xi}{\sin\xi} \quad (3.5)$$

Используя формулу для функций Лежандра отрицательного аргумента, интегралы, зависящие от функций Лежандра, а также тригонометрические разложения этих функций [11], второй интеграл в равенстве (3.5) может быть вычислен в замкнутом виде

$$\int_0^{\theta_0} P_{s-1/2}^{-2}(\cos\xi) P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\xi) \frac{d\xi}{\sin\xi} = \frac{\text{ctg}^{\mu}(\theta_0/2) R_s(\mu)}{\Gamma(1+\mu) \mu^2 - 4}$$

$$R_s(\mu) = \sin^2 \theta_0 \frac{\Gamma(1+\mu)}{\text{ctg}^{\mu}(\theta_0/2)} [P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\theta_0) (P_{s-1/2}^{-2})'(\cos\theta_0) + P_{s-1/2}^{-2}(\cos\theta_0) (P_{s-1/2}^{-\mu})'(-\cos\theta_0)]$$

где  $R_s(\mu)$  – известная функция, которая с учетом свойств функции Лежандра [11] является аналитической при  $\text{Re}\mu > -1$ , а при  $\mu \sim \infty$  ведет себя как  $\text{Const}\mu$ .

Первый интеграл в равенстве (3.5) после замены переменных  $\xi = \pi - \tau$  и применения тригонометрических разложений функций Лежандра [11] можно переписать в виде

$$\int_{\theta_0}^{\pi} \bar{\sigma}_s(\xi) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\xi) d\xi = \frac{\text{ctg}^{\mu}(\theta_0/2)}{\Gamma(1+\mu)} Y_s(\mu)$$

$$Y_s(\mu) = \int_0^{\pi-\theta_0} \bar{\sigma}_s(\pi-\tau) \left( \frac{\text{tg}(\tau/2)}{\text{ctg}(\theta_0/2)} \right)^{\mu} F\left(\frac{1}{2}-s, \frac{1}{2}+s, 1+\mu, \sin^2 \frac{\tau}{2}\right) d\tau \quad (3.6)$$

Во внутренних точках ребра трещины ( $\rho > 0, \theta \sim \theta_0+$ ) напряжения должны иметь корневую особенность, откуда, учитывая определение неизвестной функции  $\bar{\sigma}_s(\theta)$  (см.(3.3)), можно установить, что

$$\bar{\sigma}_s(\theta) \sim \text{Const}/\sqrt{\sin(\theta - \theta_0)}, \quad \theta \sim \theta_0+$$

На основании этого равенства и леммы Ватсона [12] из определения (3.6) следует, что неизвестная функция  $Y_s(\mu)$  аналитична при  $\text{Re}\mu > -1/2$ , а при  $\mu \sim \infty$  ведет себя как  $\text{Const}\mu^{-1/2}$ .

Таким образом, соотношение (3.5) запишется в виде

$$a_s(\mu) \left[ \mu^2 - \sin^2 \frac{\pi\mu}{2} \right] = \frac{\text{ctg}^\mu(\theta_0/2)}{\Gamma(1+\mu)} \tilde{Y}_s(\mu) \tag{3.7}$$

$$\tilde{Y}_s(\mu) = Y_s(\mu) - \alpha(s) \frac{R_s(\mu)}{\mu^2 - 4}$$

где  $Y_s(\mu)$  – аналитическая при  $\text{Re}\mu > -1/2$  функция с простым полюсом в точке  $\mu = 2$ , которая при  $\mu \sim \infty$  ведет себя как  $\text{Const}\mu^{-1/2}$ .

Аналогичным образом из равенства (3.4), используя интегральное преобразование типа Мелера – Фока [9, 10], формулы для функций Лежандра отрицательного аргумента и тригонометрические разложения этих функций [11], получим

$$a_s(\mu) \sin^2(\pi\mu) = -\cos(\pi s) \frac{\text{tg}^\mu(\theta_0/2)}{\Gamma(1+\mu)} X_s(\mu) - \frac{\text{tg}^{-\mu}(\theta_0/2) \pi X_s(-\mu)}{\Gamma(1-\mu) G_s(\mu)} \tag{3.8}$$

$$X_s(\mu) = \mu \int_0^{\theta_0} \frac{u_s(\tau)}{\sin \tau} \left( \frac{\text{tg}(\tau/2)}{\text{tg}(\theta_0/2)} \right)^\mu F\left(\frac{1}{2} - s, \frac{1}{2} + s, 1 + \mu, \sin^2 \frac{\tau}{2}\right) d\tau \tag{3.9}$$

Учитывая то, что стенки трещины должны примыкать к внутренним точкам ребра, следуя асимптотическому разложению  $u_s|_{\varphi=0} \sim \text{Const} \sqrt{\sin(\theta_0 - \theta)}$ ,  $\theta \sim \theta_0-$ , для неизвестной функции  $X_s(\mu)$  из (3.9) на основе леммы Ватсона [12] следует, что она аналитична при  $\text{Re}\mu \geq 0$ , а при  $\mu \sim \infty$  ведет себя как  $\text{Const}\mu^{-1/2}$ .

Исключая из равенств (3.7) и (3.8) неизвестную функцию  $a_s(\mu)$ , придем к функциональному уравнению Винера – Хопфа [13] относительно функций  $X_s(\mu)$ ,  $\tilde{Y}_s(\mu)$ :

$$\frac{\sin^2(\pi\mu)}{\mu^2 - \sin^2(\pi\mu/2)} \tilde{Y}_s(\mu) + d_0^\mu \cos(\pi s) X_s(\mu) = -\frac{\pi}{G_s(\mu)} \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1-\mu)} X_s(-\mu) \tag{3.10}$$

$$d_0 = \text{tg}^2(\theta_0/2)$$

справедливого в полосе  $|\text{Re}\mu| < 1/2$ .

Для решения уравнения (3.10) применим методику Винера – Хопфа [13]. В соответствии с этой методикой основным этапом решения является факторизация коэффициента

$$\frac{\sin^2(\pi\mu)}{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2} = \frac{\pi}{\pi^2/4 - 1} \frac{K_+(\mu)K_+(-\mu)}{\Gamma(1+\mu)\Gamma(1-\mu)} \tag{3.11}$$

$$K_+(\mu) = \frac{\Gamma(1/2 + \mu/2)}{\Gamma(1 + \mu/2)} \frac{1 + \mu}{L_+(\mu)}, \quad L_+(\mu) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + \mu/\beta_k)(1 + \mu/\bar{\beta}_k)}{[1 + \mu/(2k + 1)]^2}$$

Проведенная факторизация базируется на разложении знаменателя в бесконечное произведение по его простым нулям [13], которые расположены в точках  $\mu = \pm 1, \mu = \pm \beta_k, \mu = \pm \beta_k, k \in \mathbb{N}$ . Эти нули разыскивались численно, при этом при больших значениях  $k$  имеет место асимптотическое представление

$$\beta_k = 2k + 1 + i(2/\pi)\ln[2(2k + 1)] + O(\ln k/k), \quad k \sim +\infty \quad (3.12)$$

Учитывая равенство (3.12), асимптотические свойства бесконечных произведений [14] и Г-функции [8, 11], можно получить

$$L_+(\mu) \sim \text{Const}, \quad K_+(\mu) \sim \text{Const}\mu^{1/2}, \quad \text{Re}\mu \geq 0, \quad \mu \sim \infty \quad (3.13)$$

С учетом проведенной факторизации (3.11), уравнение (3.10) можно переписать в виде

$$\frac{G_s(\mu)K_+(\mu)}{\Gamma^2(1 + \mu)} \left[ \frac{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2}{\sin^2(\pi\mu)} \cos(\pi s) d_0^\mu X_s(\mu) - \tilde{Y}_s(\mu) \right] - \frac{3K_+(2)}{16} \alpha^2(s) \frac{R_s(2)}{\mu - 2} - \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} d_0^k \left\{ \frac{p_k}{(\mu - k)^2} + \frac{p_k \ln d_0 - 2k}{\mu - k} \right\} x_k \quad (3.14)$$

$$- \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_0^k p_k}{\mu - k} y_k = \left( 1 - \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{X_s(-\mu)}{K_+(-\mu)} - \frac{3K_+(2)}{16} \alpha^2(s) \frac{R_s(2)}{\mu - 2} -$$

$$- \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} d_0^k \left\{ \frac{p_k}{(\mu - k)^2} + \frac{p_k \ln d_0 - 2k}{\mu - k} \right\} x_k - \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_0^k p_k}{\mu - k} y_k$$

$$p_k = \sin^2(\pi k/2) - k^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

$$x_k = \frac{G_s(k)K_+(k)}{\Gamma^2(1 + k)} X_s(k) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.15)$$

$$y_k = \frac{d}{d\mu} \left( \frac{G_s(\mu)K_+(\mu)}{\Gamma^2(1 + \mu)} X_s(\mu) \right) \Big|_{\mu=k} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

Дополнительные слагаемые в равенстве (3.14) введены так, чтобы левая часть была аналитичной при  $\text{Re}\mu > -1/2$ , а правая – при  $\text{Re}\mu < 1/2$ . При этом, учитывая асимптотические свойства функций  $X_s(\mu), \tilde{Y}_s(\mu), R_s(\mu), K_+(\mu)$  и Г-функции [8, 11], можно установить, что обе части равенства (3.14) стремятся к нулю как  $O(\mu^{-1})$  при  $\mu \sim \infty$  в областях их аналитичности. Тогда на основании принципа аналитического продолжения и теоремы Лиувилля [13] из равенства (3.14) получим равенства

$$\frac{G_s(\mu)K_+(\mu)}{\Gamma^2(1 + \mu)} \left[ \frac{\sin^2(\pi\mu/2) - \mu^2}{\sin^2(\pi\mu)} \cos(\pi s) d_0^\mu X_s(\mu) - \tilde{Y}_s(\mu) \right] - \frac{3K_+(2)}{16} \alpha^2(s) \frac{R_s(2)}{\mu - 2} - \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_0^k p_k}{\mu - k} y_k \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} d_0^k \left\{ \frac{p_k}{(\mu-k)^2} + \frac{p_k \ln d_0 - 2k}{\mu-k} \right\} x_k = 0 \\
 & \left( 1 - \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{X_s(\mu)}{K_+(\mu)} + \frac{3K_+(2)}{16} \alpha^2(s) \frac{R_s(2)}{\mu+2} + \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_0^k p_k}{\mu+k} y_k - \\
 & -\frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} d_0^k \left\{ \frac{p_k}{(\mu+k)^2} - \frac{p_k \ln d_0 - 2k}{\mu+k} \right\} x_k = 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

определяющие неизвестные функции  $X_s(\mu)$ ,  $\tilde{Y}_s(\mu)$  и справедливые во всей комплексной плоскости  $\mu$ . Для полного определения функций  $X_s(\mu)$ ,  $\tilde{Y}_s(\mu)$  из равенств (3.16), (3.17) следует определить неизвестные величины  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $y_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ). Для этого, учитывая определение (3.15), во-первых, в равенстве (3.17) последовательно положим  $\mu = m = 1, 2, \dots$ . Получим первый набор уравнений относительно указанных неизвестных

$$\begin{aligned}
 & A_m(s) x_m - \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} d_0^k \left\{ \frac{p_k}{(m+k)^2} - \frac{p_k \ln d_0 - 2k}{m+k} \right\} x_k + \\
 & + \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=2}^{\infty} d_0^k \frac{p_k}{m+k} y_k = -\frac{3K_+(2)}{16} \alpha^2(s) \frac{R_s(2)}{m+2} \quad (m = 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$A_m(s) = \left( 1 - \frac{\pi^2}{4} \right) \frac{\Gamma^2(1+m)}{G_s(m)} K_+^{-2}(m)$$

Во-вторых, продифференцируем равенство (3.17) по  $\mu$  и в полученном соотношении последовательно положим  $\mu = m = 2, 3, \dots$ . Получим еще один набор уравнений, которые замыкают систему относительно неизвестных  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) и  $y_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned}
 & A_m(s) y_m + \{ 2\psi(1+m) - \psi(1/2-s+m) - \psi(1/2+s+m) - \\
 & - 2/(m+1) - \psi(1/2+m/2) + \psi(1+m/2) + 2c_m \} A_m(s) x_m + \\
 & + \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} d_0^k \left[ \frac{2p_k}{(m+k)^3} - \frac{p_k \ln d_0 - 2k}{(m+k)^2} \right] x_k - \\
 & - \frac{\cos(\pi s)}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_0^k p_k}{(m+k)^2} y_k = \frac{3K_+(2)}{16} \alpha^2(s) \frac{R_s(2)}{(m+2)^2} \quad (m = 2, 3, \dots) \\
 & c_m = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \operatorname{Re} \frac{1}{m+\beta_j} - \frac{1}{m+2j+1} \right)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

где  $\psi(z)$  – логарифмическая производная  $\Gamma$ -функции [8, 11].

Исследуя полученную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (3.18), (3.19), отметим, что она является квазивполне регулярной с ограниченными в совокупности свободными членами, если  $0 < d_0 < 1$ , т.е. при  $0 < \theta_0 < \pi/2$ . По этому пред-

ставления (3.1) для искомых гармонических функций  $\Phi_{1,2}$  можно использовать лишь при указанных ограничениях на  $\theta_0$ .

Анализируя свойства решений полученной бесконечной системы (3.18), (3.19), можно установить, что из регулярности системы и мероморфности ее коэффициентов как функций от  $s$  следует, что решения этой системы представляют собой мероморфные в комплексной плоскости  $s$  функции, полюса которых совпадают с нулями основного определителя системы. Кроме того, учитывая определение неизвестных (3.15) и асимптотические свойства функции  $X_s(\mu)$ , при каждом фиксированном  $s \in \mathbb{C}$  решения системы (3.18), (3.19) ведут себя следующим образом

$$x_k = x_k(s) \sim C(s)/k, \quad y_k = y_k(s) = O(k^{-1}), \quad k \sim \infty \quad (3.20)$$

что позволяет численно решать эту бесконечную систему методом редукции к конечной.

Переходя к рассмотрению случая  $\pi/2 \leq \theta_0 < \pi$ , отметим, что представив искомые гармонические функции  $\Phi_{1,2}$  в виде разложений

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-1/2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu a_s(\mu) \cos(\mu\varphi) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\theta) d\mu \right\} ds \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-1/2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \mu b_s(\mu) \cos\left(\mu\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right) G_s(\mu) P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\theta) d\mu \right\} ds \end{aligned} \quad (3.21)$$

аналогичных (3.1) [7, 9, 10], в рамках изложенного подхода задача сводится к функциональному уравнению Винера – Хопфа [13]:

$$\frac{\pi \tilde{Y}_s(-\mu)}{G_s(\mu)\Gamma(1-\mu)} = \frac{\cos(\pi s) d_0^{-\mu} \tilde{Y}_s(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} + \frac{X_s(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} \left\{ \mu^2 - \sin^2 \frac{\pi\mu}{2} \right\} \quad (3.22)$$

относительно тех же неизвестных функций и справедливо в той же полосе  $|\operatorname{Re}\mu| < 1/2$ . Применение метода Винера – Хопфа позволяет свести уравнение (3.22) к квазиполне регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & [-\ln d_0 - 2 + 4c_0 + 2\psi(1/2 + s) - \psi(1) - \psi(1/2) - \pi \operatorname{tg}(\pi s)] x_0 + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cos(\pi s) d_0^{-\lambda_k} x_k}{4\lambda_k - \pi \sin(\pi\lambda_k) \lambda_k + 1} = \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \\ & \frac{L_+^{-2}(\lambda_m) \lambda_m + \Gamma^2(1/2 + \lambda_m/2) \Gamma^2(1 + \lambda_m)}{\pi^2/4 - 1} \frac{x_m + \frac{x_0}{\lambda_m}}{G_s(\lambda_m) \Gamma^2(1 + \lambda_m/2)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos(\pi s) d_0^{-\lambda_k} \lambda_k x_k}{4\lambda_k - \pi \sin(\pi\lambda_k) \lambda_k + 1 \lambda_m + \lambda_k} = -\frac{\alpha_1(s)}{\lambda_m - 2} - \frac{\alpha_2(s)}{\lambda_m + 2} \quad (m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\alpha_1(s) = \frac{3\sqrt{\pi}\alpha(s)}{\pi^2 - 4} L_+^{-1}(2) R_s(2)$$

$$\alpha_2(s) = \frac{\alpha(s)}{48} \sqrt{\pi} d_0^{-2} L_+(2) \left( \frac{1}{4} - s^2 \right) \left( \frac{9}{4} - s^2 \right) R_s(2)$$



$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2k} = \beta_k, \quad \lambda_{2k+1} = \bar{\beta}_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

относительно неизвестных

$$x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{1 - \pi^2/4} \tilde{Y}_s(0)$$

$$x_k = L_+(k) \frac{\Gamma(1 + k/2)}{\Gamma(1/2 + k/2)\Gamma^2(1 + k)} G_s(k) \tilde{Y}_s(\lambda_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Решения бесконечной системы (3.23) по аналогии с решениями системы (3.18), (3.19) являются мероморфными функциями аргумента  $s$ , полюса которых совпадают с нулями основного определителя системы (3.23), и имеют асимптотику, аналогичную (3.20).

**4. Анализ напряженно-деформированного состояния.** Запишем выражения для нормальных напряжений в плоскости трещины  $y = 0$  (или  $\varphi = 0$ ). Используя равенства (2.4) (для случая  $\nu = 1/2$ ) и представления (3.1) или (3.21) для гармонических функций  $\Phi_{1,2}$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{y=0} = \sigma_y|_{\varphi=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-3/2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mu^2 - \sin^2(\pi\mu/2) G_s(\mu)}{\sin(\pi\mu)} \frac{G_s(\mu)}{\Gamma(\mu)} \times \right. \\ &\times \left. \left( \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right)^\mu X_s(\mu) \frac{P_{s-1/2}^{-\mu}(-\cos\theta)}{\sin\theta} d\mu \right\} ds \end{aligned}$$

В случае, когда  $\theta_0 < \theta < \pi$ , внутренний интеграл в полученном равенстве можно считать, замыкая контур интегрирования в полуплоскости  $\operatorname{Re}\mu > 0$  и вычисляя сумму вычетов по простым полюсам подынтегрального выражения в точках  $\mu = k = 2, 3, \dots$ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{\varphi=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-3/2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k p_k G_s(k)}{\pi \Gamma(k)} \left( \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right)^k \\ &X_s(k) \frac{P_{s-1/2}^{-k}(-\cos\theta)}{\sin\theta} ds, \quad \rho > 0, \quad \theta_0 < \theta < \pi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Рассмотрим случай, когда  $0 < \theta_0 < \pi/2$ . В этом случае, используя определение неизвестных (3.15) бесконечной системы (3.18), (3.19), равенство (4.1) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \sigma_y|_{\varphi=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-3/2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k p_k \Gamma(1+k)}{\pi K_+(k)} \\ &\left( \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right)^k x_k(s) \frac{P_{s-1/2}^{-k}(-\cos\theta)}{\sin\theta} ds, \quad \rho > 0, \quad \theta_0 < \theta < \pi \end{aligned} \quad (4.2)$$

Анализируя выражение (4.2) с учетом асимптотик (3.20), (3.13), несложно установить, что при подходе к внутренним точкам ребра трещины ( $\theta \sim \theta_0+$ ,  $\rho > 0$  – фиксировано) напряжения имеют классическую корневую особенность

$$\sigma_y|_{\varphi=0} \sim K(\varphi)/\sqrt{r}, \quad r \sim 0+$$

$\theta_0/\pi$	$s_1$	$\gamma$	$\theta_0/\pi$	$s_1$	$\gamma$
0	2.5	1	0.5	1.1684	-0.3316
0.1	2.4913	0.9913	0.6141	1.5	-0.5
0.2	2.2317	0.7317	0.7	0.9024	-0.5976
0.3	1.7093	0.2093	0.8	0.8065	-0.6935
0.3581	1.5	0	0.9	0.7173	-0.7827
0.4	1.3818	-0.1182	1	0.5	-1

где под  $r$  следует понимать расстояние до фиксированной точки, лежащей на ребре трещины, а под  $\rho$  – расстояние от этой точки до вершины трещины. При этом для коэффициента интенсивности  $K$  справедливо

$$K(\rho) = \text{Const} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\theta_0}{2} \frac{1}{2\pi i} C(s) \rho^{s-1} ds$$

Для исследования характера распределения напряжений в окрестности точки выхода ребра трещины на поверхность полупространства, точки  $O$  ( $\rho \sim 0+$ ), следует определить расположение полюсов подынтегрального выражения (4.2), которые совпадают с полюсами решений бесконечной системы (3.18), (3.19)  $x_k(s)$  ( $k = 2, 3, \dots$ ), лежащими в нулях основного определителя этой системы. Анализ расположения нулей основного определителя системы (3.18), (3.19) проводился численно. При этом установлено, что все нули действительные и расположены симметрично относительно  $s = 0$ , а их расположение зависит от значения угла раскрытия трещины  $\theta_0$ . Поведение напряжений при  $\rho \sim 0+$  определяется положительными нулями определителя системы (3.18), (3.19). Численные расчеты показали, что существует такое критическое значение  $\theta_0 = \theta_0^* \approx 0.3581\pi$ , которое определяет три различных случая.

(а) Если  $0 < \theta_0 < \theta_0^*$ , то наименьшими положительными нулями определителя системы (3.18), (3.19) будут  $s = 3/2$  и  $s = s_1 > 3/2$  (значения  $s_1$  представлены в таблице). Эти нули простые и  $s_1 \rightarrow 3/2$  при  $\theta_0 \rightarrow \theta_0^*$ . Сдвигая контур интегрирования в равенстве (4.2) вправо вдоль действительной оси комплексной плоскости  $s$  и оставляя вычеты только в простых полюсах  $s = 3/2$  и  $s = s_1$ , получим

$$\sigma_y|_{\phi=0} \sim K_1(\theta) + K_2(\theta)\rho^\gamma, \quad \rho \sim 0+, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi \tag{4.3}$$

где  $\phi = s_1 - 3/2$ . Значения показателя  $\gamma$  представлены в таблице, из которой видно, что напряжения при подходе к точке  $O$  (фиг. 1) остаются ограниченными.

(б) Если  $\theta = \theta_0^*$ , то наименьшим положительным нулем определителя системы (3.18), (3.19) является  $s = s_1 = 3/2$ . В отличие от предыдущего случая – это нуль второго порядка. Тогда аналогично сдвигая контур интегрирования в (4.2) и оставляя вычет в полюсе второго порядка подынтегрального выражения  $s = 3/2$ , получим

$$\sigma_y|_{\phi=0} \sim K_1(\theta) + K_2(\theta) \ln \rho, \quad \rho \sim 0+, \quad \theta_0 < \theta \leq \pi \tag{4.4}$$

В этом случае в точке  $O$  (фиг. 1) напряжения имеют логарифмическую особенность.

(с) Если  $\theta_0^* < \theta_0 < \pi/2$ , то наименьшими положительными нулями определителя системы (3.18), (3.19) будут простые нули в точках  $s = s_1 \in (1/2, 3/2)$  (см. таблицу) и  $s = 3/2$ . Сдвигая контур в (4.2) аналогично двум предыдущим случаям, получим, что поведение напряжений описывается асимптотической формулой (4.3), однако показатель  $\gamma$  будет отрицательным, т.е. напряжения в этом случае имеют в точке  $O$  (фиг. 1) локальную степенную особенность.

Рассматривая случай  $\pi/2 \leq \theta_0 < \pi$ , отметим, что в этом случае подынтегральное выражение (4.1) определяется решениями бесконечной системы (3.23), которые имеют полюса, совпадающие с нулями основного определителя этой системы. Анализ расположения этих нулей показал, что они так же будут действительными. При этом для всех  $\pi/2 \leq \theta_0 < \pi$  наименьшими положительными нулями определителя будут простые нули в точках  $s = s_1 \in (1/2, 3/2)$  и  $s = 3/2$ . Тогда, сдвигая контур интегрирования в (4.1) аналогично предыдущим случаям, получим, что характер распределения напряжений при  $\pi/2 \leq \theta_0 < \pi$  описывается асимптотической формулой (4.3), а значения показателя  $\gamma$  представлены в таблице. Из полученных результатов видно, что напряжения в рассматриваемом случае имеют в вершине трещины, точке  $O$  (фиг. 1), локальную степенную особенность, которая усиливается с увеличением угла  $\theta_0$ . При  $\theta_0 \approx 0.6141\pi$  в точке  $O$  реализуется классическая корневая особенность, как и на ребре трещины.

Анализируя полученные результаты, отметим, что при  $0 < \theta_0 < \theta_0^*$  в вершине трещины отсутствует концентрация напряжений. Этот факт может быть связан с тем, что при "малых" углах  $\theta_0$  в окрестности точки  $O$  (фиг. 1) стенки трещины вместо того, чтобы расходиться под действием внутреннего давления, сходятся и вступают в контакт. Для ответа на этот вопрос проанализируем нормальные смещения стенок трещины. На основании равенств (2.4), представления (3.1) для гармонической функции  $\Phi_2$  и соотношений (3.2), (3.7) можно записать

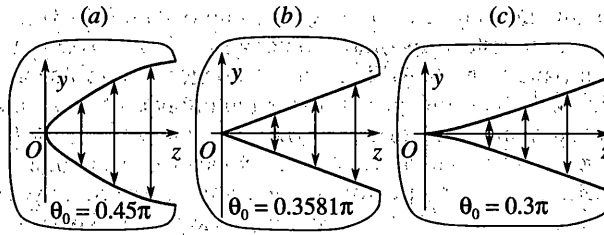
$$4Gu_y|_{\varphi=0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-1/2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right)^{-\mu} \frac{G_s(\mu)}{\Gamma(1+\mu)} \frac{\sin(\pi\mu)}{\mu^2 - \sin^2(\pi\mu/2)} \right. \\ \left. \left[ Y_s(\mu) - \alpha(s) \frac{R_s(\mu)}{\mu-4} \right] P_{s-1/2}^{-\mu}(\cos\theta) d\mu \right\} ds$$

При  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  (на стенках трещины) внутренний интеграл вычисляется путем замыкания контура интегрирования в полуплоскости  $\operatorname{Re}\mu > 0$  и вычисления суммы вычетов по простым полюсам в точках  $\mu = 2, \mu = \lambda_k$  ( $k = 2, 3, \dots$ ). Используя при  $0 < \theta_0 < \pi/2$  равенство (3.16), полученное выражение может быть переписано в виде

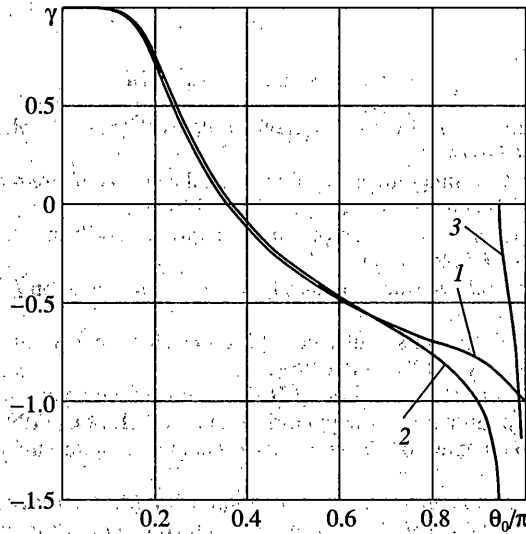
$$4Gu_y|_{\varphi=0} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \rho^{s-1/2} \cos(\pi s) \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(1)}(\theta) d_0^k x_k(s) + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{\infty} f_k^{(2)}(\theta) d_0^k y_k(s) \right\} ds, \quad \rho > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 \quad (4.5)$$

где  $f_k^{(1,2)}$  — известные функции, имеющие громоздкие выражения.

Из полученного соотношения следует, что форма берегов трещины в окрестности вершины, точки  $O$  (см. фиг. 1), также определяются положительными полюсами решений бесконечной системы (3.18), (3.19), которые в свою очередь определяются ну-



Фиг. 2



Фиг. 3

лями определителя этой системы. При этом ближайшим к оси  $\text{Re } s = 0$  полюсом подынтегрального выражения (4.5) будет простой полюс в точке  $s = s_1$ . Точка  $s = 3/2$  будет устранимой особой точкой за счет нуля множителя  $\cos(\pi s)$ . Сдвигая контур интегрирования в комплексной плоскости вдоль действительной оси и оставляя только вычет в простом полюсе  $s = s_1$ , получим

$$u_y|_{\varphi=0} \sim u_0(\theta) \rho^{\gamma+1}, \quad \rho \sim 0+, \quad 0 \leq \theta < \theta_0 \quad (4.6)$$

коэффициент  $u_0(\theta)$  является известной, положительной и непрерывной функцией, которая при  $\theta \sim \theta_0-$  ведет себя как  $\text{Const} \sqrt{\sin(\theta_0 - \theta)}$ . Отметим, что (4.6) остается справедливым при всех  $0 < \theta_0 < \pi$ .

Используя полученное асимптотическое равенство (4.6) и свойства коэффициента  $u_0(\theta)$  можно получить формы берегов трещины в окрестности ее вершины при различных значениях  $\theta_0$ , которые представлены на фиг. 2 (вид на полупространство сверху). Из полученных рисунков видно, что при “малых”  $\theta_0$  ( $\theta_0 < 0.3581\pi$ ), когда в вершине трещины (точке  $O$ ) отсутствует концентрация напряжений, берега трещины стремятся вступить в контакт, однако они “соприкасаются” лишь в самой вершине.

Сравним полученные результаты с результатами работы [6]. Так авторами работы [6] в случае несжимаемого материала ( $\nu = 1/2$ ) для нормальных напряжений в окрест-

ности вершины трещины получено равенство, аналогичное (4.3), в котором, однако, отсутствует слагаемое, соответствующее полюсу  $s = 3/2$ , и которое дает логарифмическую особенность в равенстве (4.4). На фиг. 3 представлено сравнение показателей особенности  $\gamma$ : кривой 1 показаны результаты данной работы, на кривых 2 и 3 показаны значения действительной и мнимой части  $\gamma$ , полученные в [6]. Следует отметить, что при  $0 < \theta_0 < 0.7\pi$  результаты работ хорошо согласуются. Однако, при  $\theta_0 > 0.7\pi$  показатель особенности, полученный в [6], начинает стремительно убывать с ростом  $\theta_0$ , и наступает такой момент,  $\theta_0 \approx 0.9\pi, \dots, \pi$ , когда  $\text{Re} \gamma < -1$ . Тогда из результатов [6], учитывая (4.6), следует, что при  $\theta_0 \approx 0.9\pi, \dots, \pi$  нормальные смещения стенок трещины в окрестности точки  $O$ , точки выхода ребра трещины на поверхность полупространства (см. фиг. 1), становятся неограниченными, что представляется физически необоснованным.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Folias E.S.* On the 3-dimensional theory of cracked plates // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1975. V. 42. № 3. P. 663–674.
2. *Shmueli M., Alterman Z.* A three-dimensional numerical analysis of stress distribution in the vicinity of a crack tip // Isr. J Technol. 1971. V. 9. № 5. P. 523–530.
3. *Bentem J.P.* State of stress at the vertex of a quarter-infinite crack in a half-space // Int. J. Solids Structures. 1977. V. 13. № 5. P. 479–492.
4. *Bažant Z.P., Estenssoro L.F.* Surface singularity and crack propagation // Int. J. Solids Structures. 1979. V. 15. № 4. P. 405–426.
5. *Ghahremani F., Shih C.F.* Corner singularities of 3-dimencional planar interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. № 1. P. 61–68.
6. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Лапина О.Н. Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 5. С. 146–153.
7. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
8. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 379 с.
9. Парфененко Д.Н., Улитко А.Ф. Об одном новом интегральном преобразовании и использовании его в контактных задачах теории упругости // Докл. АН УССР. Сер. А. 1988. № 11. С. 53–58.
10. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Интегральные разложения, родственные преобразованиям Мелера – Фока // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 9. С. 1515–1523.
11. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. V. 1. N.Y. ets.: McGraw-Hill, 1953. 302 p.
12. Федорюк В.Ф. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
13. *Nobl V.* Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. L. ect.: Pergamon Press, 1958. 246 p.
14. *Mitra R., Lee S.W.* Analytical techniques in the theory of guided waves. N. Y. ect: Macmillan, 1971. 302 p.

Киев

Поступила в редакцию  
19.10.2004