МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2006

УДК 539.375

© 2006 г. В.М. АЛЕКСАНДРОВ

ПРОДОЛЬНАЯ ТРЕЩИНА В ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНЯМИ

Рассмотрена задача о плоской деформации полосы с продольной трещиной, берега которой нагружены равномерным давлением. Предполагается, что трещина симметрично расположена относительно свободных от напряжений граней полосы. С помощью интегрального преобразования Фурье задача сведена к интегральному уравнению первого рода с сингулярным ядром относительно производной от функции, описывающей раскрытие трещины. Регулярным и сингулярным асимптотическими методами построены решения указанного интегрального уравнения соответственно при больших и малых значениях безразмерного параметра, характеризующего толщину полосы. Приведен конкретный числовой пример.

Аналогичная задача о трещине в изотропной полосе рассмотрена ранее в [1, 2].

1. Постановка задачи и исходные соотношения. Пусть упругая ортотропная полоса толщины $2h$ занимает область $|x| < \infty$, $-h \le y \le h$. Будем предполагать, что грани полосы $y = -h$ и $y = h$ свободны от напряжений, а на оси $y = 0$ находится трещина длины $|x| \le a$. Берега трещины нагружены равномерным давлением q.

В силу сказанного для задачи будем иметь следующие граничные условия:

$$\begin{gathered}\sigma_y(x, \pm h) = \tau_{xy}(x, \pm h) = 0 \ (|x| < \infty) \\ \tau_{xy}(x, 0) = 0 \ (|x| < \infty), \quad \upsilon(x, 0) = 0 \ (|x| > a) \\ \sigma_y(x, 0) = -q \ (|x| \le a)\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь υ – перемещение по оси y; σ_y и τ_{xy} – нормальное и касательное напряжения.

Примем, что полоса находится в условиях плоской деформации. Тогда формулы закона Гука для полосы можно представить в виде [3]:

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{1 - \nu_{31}\nu_{13}}{E_1}\sigma_x - \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2}\sigma_y \\ \varepsilon_y = -\frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1}\sigma_x + \frac{1 - \nu_{32}\nu_{23}}{E_2}\sigma_y \\ \gamma_{xy} = G_{12}^{-1}\tau_{xy} \\ \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{32}\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}\nu_{23}}{E_2}\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь σ_x – нормальное напряжение; ε_x, ε_y и γ_{xy} – деформации; ν_{12}, ν_{21}, ν_{31}, ν_{13}, ν_{23}, ν_{32} – коэффициенты Пуассона; E_1 и E_2 – модули Юнга; G_{12} – модуль сдвига (всего семь независимых механических постоянных). К формулам (1.2) нужно добавить уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{1.3}$$

уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{1.4}$$

а также соотношение

$$\upsilon = \int \varepsilon_y dy \tag{1.5}$$

2. Вывод интегрального уравнения задачи. Полагая

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \gamma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{2.1}$$

удовлетворим уравнениям равновесия (1.3). Подставляя затем выражение (2.1) в (1.2), а преобразованные выражения (1.2) в свою очередь в уравнение (1.4), получим для функции Эри следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + 2A\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + B\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0$$

$$A = \frac{E_1[E_2 - G_{12}(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})]}{G_{12}E_2(1 - \nu_{31}\nu_{13})}, \quad B = \frac{E_1(1 - \nu_{32}\nu_{23})}{E_2(1 - \nu_{31}\nu_{13})} \tag{2.2}$$

Далее предполагаем, что $A > 0$, $B > 0$ и $A^2 > B$. Эти неравенства выполняются для многих ортотропных материалов, в частности, для стеклопластиков, описанных в табл. 7 [3].

Сначала с учетом симметрии задачи (1.1) относительно координаты y рассмотрим вспомогательную задачу с граничными условиями

$$\sigma_y(x, h) = \tau_{xy}(x, h) = 0 \ (|x| < \infty)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \ (|x| < \infty), \quad \upsilon(x, 0) = \tilde{\gamma}(x) \ (|x| < \infty) \tag{2.3}$$

$$\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x) \ (|x| \le a), \quad \tilde{\gamma}(x) = 0 \ (|x| > a)$$

Разыскивая функцию Эри в виде интеграла Фурье по x:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(y, \alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \tag{2.4}$$

из уравнения (2.2) найдем следующее выражение для трансформанты Фурье $\Phi^*(y, \alpha)$:

$$\Phi^*(y, \alpha) = c_1 \operatorname{sh}(\kappa_1 \alpha y) + c_2 \operatorname{ch}(\kappa_1 \alpha y) + c_3 \operatorname{sh}(\kappa_2 \alpha y) + c_4 \operatorname{ch}(\kappa_2 \alpha y)$$

$$\kappa_1 = \sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}}, \quad \kappa_2 = \sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}} \tag{2.5}$$

где c_k ($k = 1, 2, 3, 4$) – функции от α, которые нужно определить из факта выполнения граничных условий (2.3). Производя это определение, в результате решения вспомогательной задачи (2.3) найдем соотношение

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{\theta}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\Gamma(\alpha)L(\alpha h)e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$L(u) = \frac{2\kappa_1\kappa_2(1-\operatorname{ch}\kappa_1 u\operatorname{ch}\kappa_2 u)+(\kappa_1^2+\kappa_2^2)\operatorname{sh}\kappa_1 u\operatorname{sh}\kappa_2 u}{(\kappa_1-\kappa_2)(\kappa_1\operatorname{sh}\kappa_1 u\operatorname{ch}\kappa_2 u-\kappa_2\operatorname{ch}\kappa_1 u\operatorname{sh}\kappa_2 u)} \tag{2.6}$$

$$\theta = \frac{\kappa_1\kappa_2 E_2}{(\kappa_1+\kappa_2)(1-\nu_{32}\nu_{23})}$$

где $\Gamma(\alpha)$ – трансформанта Фурье разрывной функции $\tilde{\gamma}(x)$ вида (2.3), определяемая формулой

$$\Gamma(\alpha) = \int_{-a}^{a}\gamma(\xi)e^{i\alpha\xi}d\xi \tag{2.7}$$

Перейдем к основной задаче. Удовлетворяя с помощью соотношений (2.6) и (2.7) последнему граничному условию (1.1) (остальные условия (1.1) уже удовлетворены в ходе получения соотношения (2.6)), придем к сингулярному интегральному уравнению относительно производной от функции $\gamma(x)$, описывающей перемещения точек берегов трещины

$$\int_{-a}^{a}\gamma'(\xi)M\left(\frac{\xi-x}{h}\right)d\xi = -\frac{\pi h}{\theta}q \quad (|x|\le a) \tag{2.8}$$

$$M(t) = \int_0^{\infty}L(u)\sin ut\,du \tag{2.9}$$

Можно показать [4], что при всех значениях безразмерного параметра $\lambda = h/a$, характеризующего относительную толщину полосы, решение уравнения (2.8) имеет структуру

$$\gamma'(x) = \frac{\omega(x)}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{2.10}$$

где $\omega(x)$ – по крайней мере непрерывная функция.

3. Асимптотическое решение при большой относительной толщине полосы. Отметим, что функция $L(u)$, определяемая второй формулой (2.6), обладает свойствами

$$L(u) = 1+O(e^{-2\kappa u}) \quad (u\to\infty,\ \kappa = \inf(\kappa_1, \kappa_2))$$

$$L(u) = l_1u^3+l_2u^5+O(u^7) \quad (u\to 0) \tag{3.1}$$

$$l_1 = \frac{1}{12}\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2), \quad l_2 = -\frac{1}{120}\kappa_1\kappa_2(\kappa_1^3+\kappa_1^2\kappa_2+\kappa_1\kappa_2^2+\kappa_2^3)$$

На основании соотношений (3.1) ядро (2.9) интегрального уравнения (2.8) можно представить в форме [2, 5]:

$$M(t) = \frac{1}{t} - \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i+1}$$
$$a_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\int_0^{\infty}[1-L(u)]u^{2i+1}du \tag{3.2}$$

Ряд в выражении (3.2) для $M(t)$ абсолютно сходится при $|t| < 2\text{к}$.

Подставим $M(t)$ в форме (3.2) в уравнение (2.8). Будем иметь

$$\int_{-a}^{a}\frac{\gamma'(\xi)}{\xi - x}d\xi = -\frac{\pi q}{\theta} + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_i}{h^{2i+2}}\int_{-a}^{a}\gamma'(\xi)(\xi - x)^{2i+1}d\xi \ (|x| \le a) \tag{3.3}$$

Ищем решение интегрального уравнения (3.3) в форме ряда

$$\gamma'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)h^{-2n} \tag{3.4}$$

Подставляя выражение (3.4) в уравнение (3.3) и приравнивая в нем члены справа и слева при одинаковых степенях h^{-2}, придем [5] к бесконечной системе последовательно решаемых интегральных уравнений относительно функций $\psi_n(x)$. Приведем результат такого решения с точностью до членов порядка λ^{-8}:

$$\gamma'(x) = -\frac{qx}{\theta\sqrt{a^2 - x^2}}\left\{1 + \frac{1}{2\lambda^2}a_0 + \frac{1}{\lambda^4}\left[\frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}a_1\left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{3}{4}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\lambda^6}\left[\frac{1}{8}a_0^3 + \frac{1}{8}a_0a_1\left(\frac{6x^2}{a^2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}a_2\left(\frac{5x^4}{a^4} + \frac{5x^2}{a^2} - \frac{15}{4}\right)\right]\right\} + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right) \tag{3.5}$$

Формулу (3.5) практически можно использовать при $\lambda \ge 2$.

4. Асимптотическое решение при малой относительной толщине полосы (вырожденное решение). Проинтегрируем уравнение (2.8) три раза по x. Будем иметь

$$\int_{-a}^{a}\gamma'(\xi)N\left(\frac{\xi - x}{h}\right)d\xi = \frac{\pi}{6\theta h^2}(qx^3 + \tilde{D}h^2x) \ (|x| \le a) \tag{4.1}$$

$$N(t) = \int_0^{\infty}\frac{L(u)}{u^3}\cos ut\,du \tag{4.2}$$

где $\tilde{D}$ – пока произвольная постоянная.

Как будет показано в этом и следующем пунктах, интегральное уравнение (4.1) более нежели интегральное уравнение (2.8) приспособлено для исследования случая полосы малой относительной толщины. Однако уравнение (4.1) не эквивалентно уравнению (2.8). Его общее решение дается формулой [6, 7]:

$$\gamma'(x) = \frac{\Omega(x)}{(a^2 - x^2)^{3/2}} \tag{4.3}$$

где функция $\Omega(x)$ имеет по крайней мере непрерывную первую производную. Заметим, что эквивалентность уравнений восстановится и структура (4.3) перейдет в структуру (2.10), если $\Omega(\pm a) = 0$. Этого можно добиться соответствующим выбором постоянной $\tilde{D}$ (см. п. 5).

Для построения вырожденного (проникающего, внешнего) решения интегрального уравнения (4.1) при малых значениях параметра λ произведем в уравнении (4.1) следующие замены:

$$x' = \frac{x}{h}, \quad \xi' = \frac{\xi}{h}, \quad \gamma'(\xi' h) = \varphi(\xi') \tag{4.4}$$

В результате получим

$$\int_{-1/\lambda}^{1/\lambda} \varphi(\xi) N(\xi - x) d\xi = \frac{\pi}{6\theta}(qx^3 + \tilde{D}x) \left(|x| \le \frac{1}{\lambda}\right) \tag{4.5}$$

Штрихи у новых переменных здесь и ниже опускаем.

Устремим в интегральном уравнении (4.5) параметр λ к нулю. Будем иметь

$$\begin{gathered} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) N(\xi - x) d\xi = \pi p(x) \ (|x| < \infty) \\ p(x) = (qx^3 + \tilde{D}x)/(6\theta) \end{gathered} \tag{4.6}$$

Решение уравнения (4.6) находим применением теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье [8]. С учетом представления (4.2) имеем

$$\begin{gathered} \Phi(u) = u^3 P(u)/L(u) \\ \Phi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{iu\xi} d\xi, \quad P(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) e^{iu\xi} d\xi \end{gathered} \tag{4.7}$$

Возвращаясь в (4.7) к оригиналам, найдем

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^3}{L(u)} \sin uxdu \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi) \sin u\xi d\xi \tag{4.8}$$

Для внутреннего интеграла в (4.8) имеем выражение

$$\frac{1}{3\theta} \int_0^{\infty} (q\xi^3 + \tilde{D}\xi) \sin u\xi d\xi = \frac{\pi}{3\theta}[q\delta'''(u) - \tilde{D}\delta'(u)] \tag{4.9}$$

где $\delta'''(u)$ и $\delta'(u)$ – третья и первая производные от дельта-функции представимой косинус–интегралом Фурье [9]:

$$\pi\delta(u) = \int_0^{\infty} \cos u\xi d\xi \tag{4.10}$$

Подставим теперь (4.9) в (4.8) и, пользуясь известными свойствами дельта–функции, вычислим в (4.8) внешний интеграл. В результате, возвращаясь к старым переменным и функции $\gamma'(x)$ согласно (4.4), окончательно найдем

$$\gamma'(x) = \frac{1}{6\theta h^3}[q(l_3x^3 - 6l_4h^2x) + \tilde{D}l_3h^2x]$$
$$l_3 = \frac{1}{l_1}, \quad l_4 = -\frac{l_2}{l_1^2} = \frac{6(\kappa_1^2+\kappa_2^2)}{5\kappa_1\kappa_2(\kappa_1+\kappa_2)} \tag{4.11}$$

Вырожденное решение (4.11), как и следовало ожидать, не обладает структурой (4.3).

Далее будет показано, что для постоянной $\tilde{D}$ при малых λ имеет место асимптотическая формула

$$\tilde{D} = -q\lambda^{-2}[1 + O(\lambda)] \tag{4.12}$$

Подставляя (4.12) в (4.11), пренебрегая членами $O(\lambda)$, $O(\lambda)^2$ и интегрируя по x, с учетом условия $\gamma(\pm a) = 0$ смыкания берегов трещины найдем

$$\gamma(x) = \frac{ql_3}{24\theta h^3}(a^2 - x^2)^2 \tag{4.13}$$

Из формулы (4.13) видно, что в области, занимаемой трещиной, при очень малых значениях параметра λ, когда можно ограничиться вырожденным решением, полоса деформируется подобно пластине Киргофа–Лява с защемленными краям $x = \pm a$.

5. Асимптотическое решение при малой относительной толщине полосы (решение типа погранслоя). Построим решение типа погранслоя при малых значениях параметра λ в окрестности точек $x = \pm a$. Для этого произведем в уравнении (4.1) следующие замены:

$$t = \frac{a \pm x}{h}, \quad \tau = \frac{a \pm \xi}{h}, \quad \gamma'(\pm\tau h \mp a) = \varphi_\pm(\tau) \tag{5.1}$$

и устремим λ к нулю в верхних (правых) пределах изменения τ и t. В результате придем к интегральным уравнениям

$$\int_0^\infty \varphi_\pm(\tau)N(\tau - t)d\tau = \frac{\pi}{6\theta h^3}[q(\pm th \mp a)^3 + \tilde{D}h^2(\pm th \mp a)] \ (0 \le t < \infty) \tag{5.2}$$

Решения уравнений (5.2) могут быть найдены методом Винера–Хопфа [10].

Для построения решений в аналитическом виде аппроксимируем функцию $L(u)$ выражением

$$L_*(u) = \frac{u^3\sqrt{u^2 + C^2}}{(u^2 + D^2)^2} \tag{5.3}$$

и рассмотрим уравнения вида (5.2) с ядром

$$N_*(t) = \int_0^\infty \frac{L_*(u)}{u^3}\cos ut du \tag{5.4}$$

откуда найдем $\varphi_\pm^*(t)$.

Известно [4, 10], что при таком подходе относительная погрешность

$$\sup_t|\varphi_\pm(t)-\varphi_\pm^*(t)||\varphi_\pm(t)|^{-1} \tag{5.5}$$

не будет превосходить относительную погрешность

$$\sup_u|L(u)-L_*(u)||L(u)|^{-1} \tag{5.6}$$

и будет тем меньше, чем точнее функция $L_*(u)$ приближает $L(u)$ при малых значениях u. Заметим, что $L_*(u)$, определяемая формулой (5.3), стремится к единице при $u \to \infty$, как это и требуется первым соотношением (3.1). Далее, для минимизации погрешности решений $\varphi_\pm^*(t)$ подберем постоянные аппроксимации (5.3) так, чтобы для $L_*(u)$ выполнялось второе соотношение (3.1). Это будет если

$$\frac{C}{D^4}=l_1,\quad \frac{D^2-4C^2}{2D^6C}=l_2 \tag{5.7}$$

Введем в рассмотрение оригиналы по Лапласу–Карсону функций

$$a_k(p)=\frac{1}{p^k\sqrt{p+C}}\quad (k=-2,-1,\ldots,2,3) \tag{5.8}$$

На основании [11] имеем

$$b_{-2}(t)=-\frac{Ce^{-Ct}}{\sqrt{\pi t}}-\frac{e^{-Ct}}{2\sqrt{\pi t}t}+\tilde{C}$$

$$b_{-1}(t)=\frac{e^{-Ct}}{\sqrt{\pi t}},\quad b_0(t)=\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{erf}(\sqrt{Ct})$$

$$b_1(t)=\frac{1}{\sqrt{C}}\operatorname{erf}(\sqrt{Ct})\left(t-\frac{1}{2C}\right)+\frac{te^{-Ct}}{C\sqrt{\pi t}} \tag{5.9}$$

$$b_2(t)=\frac{1}{2\sqrt{C}}\operatorname{erf}(\sqrt{Ct})\left(t^2-\frac{t}{C}+\frac{3}{4C^2}\right)+\frac{te^{-Ct}}{2C\sqrt{\pi t}}\left(t-\frac{3}{2C}\right)$$

$$b_3(t)=\frac{1}{6\sqrt{C}}\operatorname{erf}(\sqrt{Ct})\left(t^3-\frac{3}{2C}t^2+\frac{9}{4C^2}t-\frac{15}{8C^3}\right)+\frac{te^{-Ct}}{6C\sqrt{\pi t}}\left(t^2-\frac{2}{C}t+\frac{15}{4C^2}\right)$$

где $\tilde{C}$ – бесконечная постоянная, erf(x) – интервал вероятности. Теперь в результате применения техники метода Винера–Хопфа [10] к интегральному уравнению (5.2) с ядром (5.3), (5.4) получим

$$\varphi_\pm^*(t)=\frac{1}{6\theta h^3}\{q[\pm h^3\varphi_3(t)\mp 3h^2a\varphi_2(t)\pm 3ha^2\varphi_1(t)\mp a^3\varphi_0(t)]+$$
$$+\tilde{D}h^2[\pm h\varphi_1(t)\mp a\varphi_0(t)]\}$$

$$\varphi_0(t)=\frac{D^2}{\sqrt{C}}b_{-2}(t)+\frac{2D^3}{\sqrt{C}}b_{-1}(t)+\frac{D^4}{\sqrt{C}}b_0(t)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{C}}\left(-2D-\frac{D^2}{2C}\right)b_{-2}(t)+\frac{1}{\sqrt{C}}\left(-3D^2+\frac{D^3}{C}\right)b_{-1}(t)+\frac{D^4}{2C^{3/2}}b_0(t)+\frac{D^4}{\sqrt{C}}b_1(t)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{C}}\left(2-\frac{2D}{C}+\frac{3D^2}{4C^2}\right)b_{-2}(t)+\frac{1}{C^{3/2}}\left(-3D^2+\frac{3D^3}{2C}\right)b_{-1}(t)+ \tag{5.10}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{C}}\left(-4D^2+\frac{3D^4}{4C^2}\right)b_0(t)+\frac{D^4}{C^{3/2}}b_1(t)+\frac{2D^4}{\sqrt{C}}b_2(t)$$

$$\varphi_3(t) = \frac{1}{C^{3/2}}\left(3-\frac{9D}{2C}+\frac{15D^2}{8C^2}\right)b_{-2}(t)+\frac{1}{\sqrt{C}}\left(6-\frac{27D^2}{4C^2}+\frac{15D^3}{4C^3}\right)b_{-1}(t)+$$

$$+\frac{1}{C^{3/2}}\left(-6D^2+\frac{15D^4}{C^2}\right)b_0(t)+\frac{1}{\sqrt{C}}\left(-12D^2+\frac{9D^4}{C^2}\right)b_1(t)+\frac{3D^4}{C^{3/2}}b_2(t)+\frac{6D^4}{\sqrt{C}}b_3(t)$$

Заметим, что решение типа погранслоя (5.10) имеет форму

$$\varphi_\pm^*(t) = \tilde{\Omega}(t)t^{-3/2} \tag{5.11}$$

соответствующую структуре (4.3). Однако необходимо, чтобы решение (5.10) имело форму

$$\varphi_\pm^*(t) = \tilde{\omega}(t)t^{-1/2} \tag{5.12}$$

соответствующую структуре (2.10). Для достижения этого, нужно в (5.10) приравнять нулю коэффициенты при функции $b_{-2}(t)$. В результате получим для произвольной постоянной $\tilde{D}$ такое выражение

$$\tilde{D} = -\frac{qp_1(\lambda)}{4C^2D\lambda^2p_2(\lambda)}$$

$$p_1(\lambda) = (-15D^2+36CD-24C^2)\lambda^3+(18CD^2-48C^2D+48C^3)\lambda^2+ \tag{5.13}$$

$$+(12C^2D^2+48C^3D)\lambda+8C^3D^2, \quad p_2(\lambda) = (D+4C)\lambda+2CD$$

Видно, что разложение $\tilde{D}$ по степеням λ приводит к асимптотической формуле (4.12).

Если, согласно выше сказанному, в решении типа погранслоя (5.10) удалить все члены, содержащие функцию $b_{-2}(t)$, то можно убедиться, что решение (5.10) автоматически сращивается степенным образом с вырожденным решением (4.11), где l_3 и l_4 в соответствии с (5.7) нужно положить равными

$$l_3 = \frac{D^4}{C}, \quad l_4 = -\frac{(D^2-4C^2)D^2}{2C^3} \tag{5.14}$$

В силу этого главный член асимптотики решения интегрального уравнения (2.8) при малых значениях параметра λ можно представить в виде

$$\gamma'(x) \approx \varphi_+^*\left(\frac{a+x}{h}\right)+\varphi_-^*\left(\frac{a-x}{h}\right)-\frac{1}{6\theta h^3}[q(l_3x^3-6l_4h^2x)+\tilde{D}l_3h^2x] \tag{5.15}$$

Формулу (5.15) практически можно использовать при $\lambda \le 4$.

6. Числовой пример. Имея ввиду силовой критерий разрушения [12], определим коэффициент интенсивности нормальных напряжений в вершине трещины (на ее продолжении) по формуле [2, 5]:

$$N = -\lim\theta\gamma'(x)\sqrt{a-x}\ (x \to a) \tag{6.1}$$

На основании асимптотических решений (3.5) и (5.15) соответственно имеем

$$\frac{N}{q\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{1}{2\lambda^2}a_0+\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{1}{4}a_0^2+\frac{9}{8}a_1\right)+\frac{1}{\lambda^6}\left(\frac{1}{8}a_0^3+\frac{15}{16}a_0a_1+\frac{25}{8}a_2\right)\right] \tag{6.2}$$

$$\frac{N}{q\sqrt{a}} = \frac{p_3(\lambda)}{12\sqrt{\pi C\lambda}C^3\lambda p_2(\lambda)} \tag{6.3}$$

$$p_3(\lambda) = (15D^4-24D^3C+12D^2C^2-24DC^3+48C^4)\lambda^3+$$
$$+(-18D^4C+42D^3C^2-48D^2C^3+96DC^4)\lambda^2+$$
$$+(-12D^3C^3+48D^2C^4)\lambda+16D^4C^3+8D^3C^4$$

Величины a_i ($i = 0, 1, 2$) в формуле (6.2) и величины C и D в формуле (6.3) зависят от механических постоянных A и B вида (2.2). Примем $A = 2$ и $B = 1$. Тогда имеем: $a_0 = 2.9762$, $a_1 = -3.7007$, $a_3 = 3.7366$, $C = 4.5351$, $D = 2.1711$. Заметим, что при указанных значениях постоянных C и D погрешность аппроксимации (5.3) не превосходит 3.1%.

Ниже соответственно даны значения величины $N/(q/\sqrt{a})$, найденные по формуле (6.2) ($\lambda = 16, 8, 4, 2$) и формуле (6.3) ($\lambda = 4, 2, 1, 1/2$):

$\lambda = 16$	$\lambda = 8$	$\lambda = 4$	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$
0.711	0.723	0.768	0.935	–	–
–	–	0.763	0.915	1.432	2.925

Видно, что смыкание между асимптотическими решениями больших и малых λ наступает на участке $\lambda \in [4, 2]$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00002), Российского фонда фундаментальных исследований и администрации Краснодарского края (грант 03-01-96551), программы "Университеты России" (грант УР 04.02.527).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В.М., Сметанин Б.И.* О равновесных продольных трещинах в пластинах // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1966. С. 20–24.
2. *Сметанин Б.И.* Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое // Инж. ж. МТТ. 1968. № 2. С. 115–122.
3. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука. 1977. 416 с.
4. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболь Б.В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.

6. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 343 с.
7. *Зеленцов В.Б.* О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 983–991.
8. *Bocher S.* Lectures on Fourier Integrals. Princeton: Univ. Press, 1959 = *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматлит, 1962. 360 с.
9. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
10. *Noble B.* Methods Based on the Wiener–Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations. L.: Pergamon Press, 1958. = *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 280 с.
11. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 467 с.
12. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.

Москва

Поступила в редакцию
21.05.2004