МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 2006

УДК 539.3

© 2006 г. И.А. СОЛДАТЕНКОВ

ВНЕДРЕНИЕ СО СЦЕПЛЕНИЕМ ГЛАДКОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕЙ ПРИГРУЗКИ

Анализируется влияние внешней пригрузки на процесс внедрения со сцеплением гладкого штампа в упругую полуплоскость. Рассматривается случай пригрузки в виде сосредоточенной силы, причем последняя представляется воздействием вспомогательного штампа с плоским основанием, размер области контакта которого стремится к нулю. Подобное представление сосредоточенной силы соответствует известному [1] подходу к изучению действия таких сил и позволяет избежать обращения к понятию обобщенной функции. Ранее задача о влиянии внешней пригрузки на внедрение штампа в упругое полупространство при отсутствии сил трения рассматривалась в [2, 3].

1. Постановка задачи. Рассматривается совместное внедрение в полуплоскость гладкого выпуклого штампа и штампа с плоским основанием (пригрузка) при условии полного сцепления контактирующих тел (фигура). Считается, что внедрение штампов производится по заданным законам нагружения

$$P_1 = N(P_2), \quad Q_{1,2} = \Omega_{1,2}(P_2), \quad P_2 > 0 \tag{1.1}$$

где $N(P_2)$, $\Omega_{1,2}(P_2)$ – известные функции, P_n и Q_n – нагрузки на гладкий штамп и штамп с плоским основанием, соответственно, причем касательной нагрузке отвечает $n = 1$, а нормальной – $n = 2$. Следуя [4], систему координации xy свяжем с гладким штампом, совместив ее начало с точкой первоначального касания этого штампа с полуплоскостью (фигура).

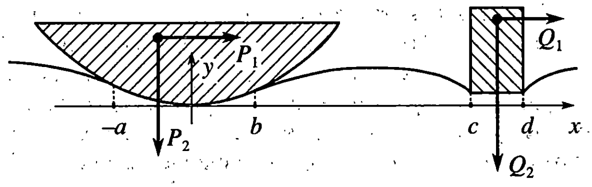
Будем считать, что в процессе внедрения размеры $a > 0$, $b > 0$ области контакта гладкого штампа монотонно возрастают. Это позволяет использовать величину a в качестве временного параметра, полагая, в частности, $b = b(a)$, $P_n = P_n(a)$, $Q_n = Q_n(a)$. Кроме того, введем в рассмотрение положительные величины a_*, $b_* < c$ и будем исследовать процесс внедрения штампов до тех пор, пока

$$a \le a_*, \quad b(a) \le b_* \tag{1.2}$$

Граничные условия, соответствующие рассматриваемой задаче, имеют вид

$$\begin{gathered} u(x, a) = \varphi(x), \quad v(x, a) = g(x), \quad x \in (-a, b) \\ u(x, a) = v(x, a) = \text{const}, \quad x \in (c, d) \\ q_1(x, a) = q_2(x, a) = 0, \quad x \notin L, \quad L = [-a, b] \cup [c, d] \end{gathered} \tag{1.3}$$

где u, v – касательное и нормальное перемещения границы полуплоскости, $q_1 = \tau_{xy}|_{y=0}$, $q_2 = -\sigma_y|_{y=0}$ – контактные напряжения, $y = g(x)$ – уравнение формы гладкого штампа, $g(0) = 0$. Неизвестная функция $\varphi(x)$ определяет касательное перемещение в пределах области контакта $(-a, b)$ и ее независимость от аргумента a обуславливает-



ся тем, что пришедшие в контакт со штампом точки полуплоскости больше не испытывают перемещений относительно штампа – условие полного сцепления контактирующих тел. В силу выбора системы координат $\varphi(0) = 0$.

Предполагается, что

$$\varphi'(x) \in H[a_*, b_*], \quad g'(x) \in H[a_*, b_*] \tag{1.4}$$

Здесь и далее штрих обозначает производную функции по первому аргументу, тогда как символ H обозначает класс Гельдера [5].

Имеют место также условия равновесия штампов

$$P_n(a) = \int_{-a}^{b} q_n(x, a)dx, \quad Q_n(a) = \int_{c}^{d} q_n(x, a)dx \quad (n = 1, 2) \tag{1.5}$$

Связь перемещений u и v с контактными напряжениями, удовлетворяющими условиям (1.3) задается двумя равенствами [2]:

$$mu'(x, a) = -\pi\chi q_2(x, a) + \int_L \frac{q_1(\xi, a)d\xi}{\xi - x}$$

$$mv'(x, a) = -\pi\chi q_1(x, a) - \int_L \frac{q_2(\xi, a)d\xi}{\xi - x} \tag{1.6}$$

$$m = \pi E[2(1 - \nu^2)]^{-1}, \quad \chi = (1 - 2\nu)[2(1 - \nu)]^{-1}$$

где G – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $\nu \in [0, 1/2)$.

Постановка задачи предполагает нахождение напряжений $q_{1,2}(x, a)$ на областях контакта $(-a, b)$ и (c, d), а также функций $\varphi(x)$ и $b(a)$ при соблюдении неравенства $P_2 > 0$ из (1.1).

2. Метод решения задачи. Следуя [6], сведем систему (1.6) к одному равенству путем умножения первого равенства (1.6) на мнимую единицу и сложения его со вторым равенством. После этого, с учетом граничных условий (1.3), можно прийти к уравнению

$$-\pi\chi q(x, a) + i\int_L \frac{q(\xi, a)}{\xi - x}d\xi = f(x), \quad x \in (-a, b) \cup (c, d) \tag{2.1}$$

$$q(x, a) = q_1(x, a) + iq_2(x, a)$$

$$f(x) = \begin{cases} m(g'(x) + i\varphi'(x)) \equiv m\sigma(x), & x \in (-a, b) \\ 0, \quad x \in (c, d) \end{cases} \tag{2.2}$$

Напряжения $q_{1,2}(x, a)$ будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера внутри интервалов $(-a, b)$ и (c, d). Кроме того, учитывая гладкость первого штампа, будем считать соответствующие ему напряжения $q_{1,2}(x, a)$ ограниченными, тогда как у контактных напряжений под вторым штампом допустим наличие на концах области контакта бесконечных интегрируемых особенностей. При таких ограничениях и условиях (1.4) интегральное уравнение (2.1) допускает обращение относительно $q(x, a)$ [5]:

$$\frac{i\pi^2}{m}(1-\chi^2)q(x,a) = \frac{i\pi}{m}\chi f(x) - \tag{2.3}$$

$$-\sqrt{\frac{(a+x)|b-x|}{|c-x|(d-x)}}\frac{e^{-i\alpha(x,a)}}{e^{i\beta(x)}}\int\limits_{-a}^{b}\sqrt{\frac{(c-\xi)(d-\xi)}{(a+\xi)(b-\xi)}}\frac{e^{i\beta(\xi)}}{e^{-i\alpha(\xi,a)}}\frac{\sigma(\xi)d\xi}{(\xi-x)}, \quad x\in(-a,b)\cup(c,d)$$

$$\alpha(x,a) = \frac{\tau}{2}\ln\left|\frac{a+x}{b-x}\right|, \quad \beta(x) = \frac{\tau}{2}\ln\left|\frac{c-x}{d-x}\right|, \quad \tau = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1+\chi}{1-\chi}$$

Выражение (2.3) для $q(x, a)$ содержит неизвестные функции $\varphi(x)$ и $b(a)$, уравнения для которых получаются, если подставить (2.3) в условия равновесия (1.5) и учесть равенства (1.1). Таким образом, равенства (1.1), (1.5), (2.3) образуют систему уравнений, позволяющих получить решение рассматриваемой задачи.

Замечание 1. В задаче о внедрении со сцеплением в упругую полуплоскость единственного гладкого штампа присутствует дополнительное условие корректности обращения интегрального уравнения типа (2.1), причем это условие дает возможность определить для этой задачи неизвестные функции $\varphi(x)$ и $b(a)$ [7, 8]. В рассматриваемом случае внедрения двух штампов соответствующая уравнению (2.1) задача сопряжения имеет нулевой индекс, и поэтому дополнительное условие корректности обращения этого уравнения отсутствует [5]. Однако здесь появляется дополнительное условие равновесия (1.5) для второго штампа, которое совместно со вторым равенством (1.1) также дает возможность определить неизвестные функции $\varphi(x)$ и $b(a)$.

3. Случай сосредоточенной силы. Устремим к нулю ширину области контакта второго штампа

$$2\varepsilon = (d-c)/(c-b_*) \to 0 \tag{3.1}$$

при сохранении внешней нагрузки Q. Согласно [1], такой предельный переход означает замену второго штампа сосредоточенной силой.

Используя неравенства (1.2) и выполняя несложные оценки для элементарных функций в выражении (2.3), можно представить это выражение в виде двух равенств:

$$\frac{i\pi^2}{m}(1-\chi^2)q(x,a) = i\pi\chi\sigma(x) - \sqrt{(a+x)(b-x)}e^{-i\alpha(x,a)}\Phi(x,a) - \tag{3.2}$$

$$-\frac{\sqrt{(a+x)(b-x)}}{x-c}e^{-i\alpha(x,a)}[K_0(a;\sigma)+O(\varepsilon)], \quad x\in(-a,b)$$

$$\frac{i\pi^2}{m}(1-\chi^2)q(x,a) = \frac{e^{-i\beta(x)}}{\sqrt{(x-c)(d-x)}}[w(a)K_0(a;\sigma)+O(\varepsilon)], \quad x\in(c,d) \tag{3.3}$$

$$w(a) = \sqrt{(a+c)(c-b)}e^{-i\alpha(c,a)}$$

$$\Phi(x,a) = \int\limits_{-a}^{b}\frac{\sigma(\xi)e^{i\alpha(\xi,a)}d\xi}{\sqrt{(a+\xi)(b-\xi)}(\xi-x)}, \quad K_n(a;\sigma) = \int\limits_{-a}^{b}\frac{\xi^n\sigma(\xi)e^{i\alpha(\xi,a)}d\xi}{\sqrt{(a+\xi)(b-\xi)}} \tag{3.4}$$

Учитывая (3.1), опустим слагаемые $O(\varepsilon)$ в равенствах (3.2) и (3.3), после чего подставим эти равенства в условия равновесия (1.5). Выполняя несложные преобразования, связанные с изменением порядка интегрирования на основе формулы Пуанкаре – Бертрана [5] и учитывая определение (2.2) функции $\sigma(x)$, можно получить в результате

$$
\begin{aligned}
i\mu P(a) &= (c - w(a))K_0(a;\sigma) - K_1(a;\sigma) \equiv \\
&\equiv (c - w(a))[G_0(a) + iK_0(a;\varphi')] - G_1(a) - iK_1(a;\varphi') \\
i\mu Q(a) &= w(a)K_0(a;\sigma) \equiv w(a)[G_0(a) + iK_0(a;\varphi')]
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$$
P(a) = P_1(a) + iP_2(a), \quad Q(a) = Q_1(a) + iQ_2(a), \quad G_n(a) = K_n(a;g'),
$$

$$
\mu = \frac{\pi}{m}\sqrt{1-\chi^2}
$$

Замечание 2. Первые два слагаемых в правой части равенства (3.2) описывают распределение контактных напряжений в случае внедрения со сцеплением в упругую полуплоскость только одного гладкого штампа [8], тогда как оставшийся член в (3.2) определяет влияние на это распределение второго штампа. В отличие от (3.2) равенство (3.3) с точностью до слагаемого $O(\varepsilon)$ целиком описывает распределение контактных напряжений в случае внедрения со сцеплением в упругую полуплоскость единственного штампа с плоским основанием [1]; в этом можно убедиться, если выразить в (3.3) произведение $w(a)K_0(a;\sigma)$ через нагрузку $Q(a)$ на основе второго равенства (3.5). Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ влияние первого штампа на контактные напряжения под вторым штампом исчезает, тогда как влияние второго штампа на контактные напряжения под первым штампом сохраняется.

Равенства (1.1), (3.2) и (3.5) определяют решение рассматриваемой задачи для гладкого штампа при внешнем воздействии сосредоточенной силы. Действительно, в соответствии с вышесказанным, подстановка выражений (3.5) для нагрузок $P(a)$ и $Q(a)$ в равенства (1.1) позволяет получить уравнения для неизвестных функций $\varphi(x)$ и $b(a)$, которые, в свою очередь, определяют с помощью равенства (3.2) распределение $q(x, a)$, $x \in (-a, b)$. Неравенство $P_2 > 0$ из (1.1) вместе с выражением (3.5) для P накладывает ограничения на допустимые функции $\varphi(x)$ и $b(a)$.

Пример. Рассмотрим класс решений с симметричной областью контакта для гладкого штампа. Будем считать штамп параболическим: $g(x) = 1/2kx^2$ и положим

$$
b(a) = a, \quad \varphi'(x) = \varphi^0|x| \tag{3.6}
$$

где φ^0 – параметр.

Подстановка (3.6) в (3.5) позволяет получить следующие функциональные зависимости $P(a)$ и $Q(a)$, обеспечивающие выполнение условий (3.6):

$$
\begin{aligned}
&1/2\mu P(a) = iD_2a^2 - D_1a[w(a) - c], \quad 1/2\mu Q(a) = D_1aw(a) \\
&D_1 = k\gamma_1 + \varphi^0\delta_1, \quad D_2 = k\delta_2 - \varphi^0\gamma_2, \quad \begin{Bmatrix}\gamma_n\\ \delta_n\end{Bmatrix} = a^{-n}\int_0^a \begin{Bmatrix}\sin\alpha(x,a)\\ \cos\alpha(x,a)\end{Bmatrix}\frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Для выполнения неравенства $P_2 > 0$ из (1.1) на параметр φ^0 следует наложить ограничение

$$
\varphi^0 < k\frac{\delta_2 + \tau\gamma_1 X^-}{\gamma_2 - \tau\delta_1 X^-}, \quad X^- = -\left(\tau\,\mathrm{sh}\frac{3\pi}{2\tau}\right)^{-1} \tag{3.8}
$$

Выражения (3.7) параметрически задают функции N и $\Omega_{1,2}$ из (1.1), обеспечивающие симметрию области контакта. При условии $a/c \ll 1$ можно получить явный вид этих функций:

$$N(P_2) = \frac{(1+\tau^2)D_1}{\mu c}\left(\frac{\mu P_2}{2D_0}\right)^{3/2}, \quad \Omega_1(P_2) = \frac{2}{\mu}D_1 c\left(\frac{\mu P_2}{2D_0}\right)^{1/2}, \quad \Omega_2(P_2) = -\frac{\tau D_1}{D_0}P_2$$

причем $D_0 \equiv \tau D_1 + D_2 > 0$ в силу неравенства (3.8).

Замечание 3. Рассмотрим случай $Q(a) \equiv Q_1(a) + iQ_2(a) = \text{const}$ и положим

$$\varphi'(x) = \tilde{\varphi}'(x) + \mathring{u}'(x), \quad g'(x) = \tilde{g}'(x) + \mathring{v}'(x) \tag{3.9}$$

$$\mathring{u}'(x) = -\frac{m^{-1}Q_1}{x-c}, \quad \mathring{v}'(x) = \frac{m^{-1}Q_2}{x-c} \tag{3.10}$$

где $\mathring{u}'$, $\mathring{v}'$ – производные от перемещений границы полуплоскости под действием сосредоточенной силы Q [9]; $\tilde{\varphi}(x)$ – неизвестная функция. Если ввести обозначение $\tilde{\sigma}(x) = \tilde{g}'(x) + i\tilde{\varphi}'(x)$ (ср. с (2.2)) и функцию $\tilde{\Phi}(x, a)$, определяемую через $\tilde{\sigma}(x)$ аналогично (3.4), то подстановка выражения (3.9) в равенства (3.2), (3.5) позволяет получить равенства

$$\frac{i\pi^2}{m}(1-\chi^2)q(x,a) = i\pi\chi\tilde{\sigma}(x) - \sqrt{(a+x)(b-x)}e^{-i\alpha(x,a)}\tilde{\Phi}(x,a), \quad x \in (-a, b)$$

$$i\mu P(a) = -K_1(a; \tilde{\sigma}), \quad K_0(a; \tilde{\sigma}) = 0$$

описывающие внедрение со сцеплением в упругую полуплоскость единственного гладкого штампа формы $\tilde{g}(x)$ [8]. Таким образом, в случае $Q(a) = \text{const}$ задачу о внедрении в упругую полуплоскость гладкого штампа при действии сосредоточенной силы можно свести к задаче о внедрении в упругую полуплоскость единственного гладкого штампа, форма $\tilde{g}(x)$ которого определяется вторым равенством (3.9). Этот результат можно также интерпретировать как внедрение гладкого штампа формы $g(x)$ в упругую полуплоскость, граница которой искривлена согласно (3.10).

Введем в рассмотрение величину Q_* такую, что $|Q(a)| \le Q_*$, $a \in (0, a_*]$. Тогда, с учетом определения функции $w(a)$ и неравенств (1.2), можно получить оценки

$$\left|\frac{\mu Q(a)}{w(a)}\right| \le \frac{\mu Q_*}{c-b_*}, \quad |w(a) - c| \le 2(a_* + b_*) \tag{3.11}$$

Замечание 4. Рассмотрим случай

$$\frac{\mu Q_*}{c-b_*} \equiv \frac{\mu Q_*}{b_*}\left(\frac{c}{b_*} - 1\right)^{-1} \to 0 \tag{3.12}$$

который можно интерпретировать как исчезновение нагрузки Q: $\mu Q_*/b_* \to 0$ или как перемещение на бесконечность точки приложения сосредоточенной силы $c/b_* \to \infty$. Подобная интерпретация позволяет предположить, что решение рассматриваемой задачи в случае (3.12) должно совпадать с решением для единственного гладкого штампа. Последнее действительно имеет место, так как при (3.12), в силу оценок (3.11), равенства (3.2) и (3.5) принимают вид уравнений задачи для единственного гладкого штампа [8].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 04-01-00766) и Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
2. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
3. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
4. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 2. Механика упругих и абсолютно твердых тел. М.: Наука, 1986. 415 с.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Александров В.М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
7. *Солдатенков И.А.* О вдавливании со сцеплением симметричного штампа в упругую полуплоскость // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 267–273.
8. *Солдатенков И.А.* Постановка и решение задачи о вдавливании со сцеплением штампа в упругую полуплоскость // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 4. С. 39–52.
9. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.05.2004