

УДК 539.3:534.1

© 2005 г. В.Н. КУКУДЖАНОВ, А.Л. ЛЕВИТИН

## **РЕОЛОГИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ В ПЛОСКИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦАХ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ**

В работе приведено исследование процесса потери устойчивости плоских образцов при растяжении для упругопластических материалов с различными видами диаграмм и условиями пластичности. Потеря устойчивости упругопластических образцов в закритическом состоянии для моделей материалов с учетом повреждаемости сопровождается локализацией деформаций по полосам сдвига и процессом шейкообразования. В образцах без учета повреждаемости преобладает локализация растяжения. Исследовано влияние геометрии образцов и физических свойств материала на процесс локализации пластических деформаций и на характер разрушения образцов. Показано, что решающими факторами, влияющими на характер локализации деформаций и характер последующего разрушения, является с одной стороны учет разупрочнения и пластической сжимаемости материала, которые возникают за счет зарождения и роста микродефектов, в первую очередь, микропор, а с другой стороны условие геометрического стеснения пластического течения.

Проведенное исследование позволяет более осознанно подходить к построению модели среды, адекватно описывающей экспериментальные данные по падающему участку диаграммы, характеру локализации и разрушению образцов при растяжении.

**1. Введение.** Численное моделирование задач потери устойчивости относится к наиболее сложным задачам МСС. Определение критических параметров, при которых наступает потеря устойчивости – это задача обычной сложности. Но определение поведения системы за критической нагрузкой: развитие процесса в закритическом состоянии, определение механизма и особенности его развития – задача несравнимо более сложная в силу своей неустойчивости и неоднозначности. Эта задача может быть решена, если после потери устойчивости процесс не приобретает характер хаотического движения и в нем можно выделить закономерные структурные элементы, несмотря на очевидную неоднозначность и зависимость результатов решения от дискретизации задачи (размеры и формы элементов разбиения, использованного метода расчета и др. случайных факторов). Проблема состоит в том, чтобы отделить случайное от закономерного. Аналитического решения задачи не существует, а численно это сделать не просто, поскольку, как правило, отсутствует строгое математическое доказательство достоверности самого численного метода и/или его устойчивости. Следовательно, нет уверенности в том, что на физическую неустойчивость не накладываются чисто вычислительные эффекты. Необходимо большое число расчетов при различных параметрах задачи и их внимательный анализ для понимания механизма явления.

Исследования закритического состояния важны не только с точки зрения фундаментальной науки, но и во многих случаях имеют чисто прикладное значение. Например, при определении несущей способности в статически неопределимых стержневых системах. Ясное понимание причин и условий, в результате которых происходит локализация пластических деформаций в полосах сдвига, очень существенно для описания

разрушения вследствие растяжения во многих технологических процессах (вытяжка, волочение, прокатка).

Потеря устойчивости при растяжении образца и его закритическое поведение предшествуют разрушению. Без их исследования невозможно понять и объяснить сам процесс разрушения. Эта проблема является одной из наиболее важных проблем современной механики твердого деформируемого тела и привлекает внимание многих исследователей [1–8].

При рассмотрении потери устойчивости материалов, в первую очередь, необходимо определиться с критериями потери устойчивости. В МДТГ эти вопросы достаточно подробно изучены для классических моделей сред (упругих и упругопластических) [2, 9–11]. Однако в последние десятилетия набор моделей сильно вырос, в основном благодаря моделям, связанным с хрупким и вязким разрушением материала, с исследованием влияния поврежденности. Процесс потери устойчивости для таких сред пока мало исследован [12, 13].

При исследовании устойчивости материалов в поврежденном состоянии (т.е. близком к разрушению) необходимо в отличие от классической упругопластической среды (при условии пластичности Мизеса) учитывать пластическую сжимаемость материала, которая есть следствие образования пор. Учет этого фактора приводит к существенному изменению условия пластичности [1–4].

В работе исследуется процесс потери устойчивости плоских образцов при растяжении, после которой происходит локализация пластических деформаций, образование шейки и разрушение образца. Рассмотрены различные модели материалов, для которых нарушается условие устойчивости материала Дракера: 1) идеально пластическая модель, 2) модель с начальным пластическим упрочнением и выходом на идеальную пластичность на материальной диаграмме при условии пластичности типа Мизеса и 3) модель пористого материала с такими же диаграммами для материала матрицы при условии пластичности Гарсона для эффективного материала (*GTN*-модель [1]).

Показано, что при условии пластичности Мизеса шейка образуется только в случае идеальнопластической или падающей материальной диаграммы. Откуда следует, что обычно получаемая в стандартных экспериментах на растяжение “истинная” диаграмма, не имеющая участка разупрочнения, не может быть принята в качестве материальной, закладываемой в определяющие уравнения материала.

Все три рассмотренные модели приводят к бифуркационной неустойчивости процесса растяжения. В закритическом состоянии для выделения определенной ветви решения производилось возмущение в виде малого надреза в центральной части образца. Для указанных моделей исследованы механизмы развития полос локализации сдвига и растяжения, выявлены различия их образования.

Для модели пластического течения при условии пластичности Мизеса шейка в образце образуется не за счет сдвига, а вследствие локализации растяжения и сужения в поперечном направлении в окрестности сечения, где локализуется растяжение. Соответственно по этим моделям разрушение происходит отрывом, по плоскости, нормальной к направлению растяжения.

Образование шейки и разрушения при растяжении в условиях плоской деформации по *GTN*-модели, учитывающей образование пор, происходит вследствие локализации сдвига (а не отрыва, как в случае растяжения по модели Мизеса). Показано, что наиболее адекватную картину образования и развития полос сдвиговой локализации дает модель, учитывающая зарождение и рост микропор.

**2. Модели материала. 2.1 Упругопластический материал.** Рассматривается модель упругопластического материала, которая основана на следующих гипотезах теории пластического течения [14, 15].

Аддитивность упругих и пластических деформаций

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

(1)

Условие пластичности, в общем случае изотропного тела, зависящее от инвариантов тензора напряжения  $S_i$ , тензора скоростей пластических деформаций  $\dot{I}_i^p$  и внутренних параметров  $\chi_k$ :

$$F(S_i, \dot{I}_i^p, \chi_k) = 0 \quad (2)$$

В случае идеально пластического материала условие пластичности сильно упрощается и принимает вид

$$F = S/\sigma_Y - 1 = 0 \quad (3)$$

где  $S = (s_{ij}s_{ij})^{1/2}$  – интенсивность деформаций,  $\sigma_Y$  – предел текучести материала.

Ассоциированный закон пластического течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

Эволюционные уравнения для определения внутренних переменных. В нашем случае это уравнение для параметра упрочнения материала  $\chi$  и поврежденности  $f$ .

2.2. *Повреждающийся упругопластический материал с порами. GTN-модель.* Как показывает эксперимент, в предразрушенном материале образуется большое количество пор, которые растут с увеличением пластической деформации. Следовательно, материал становится сильно сжимаемым и не учитывать этот фактор нельзя. Это обстоятельство учитывается в модели упругопластического пористого материала.

Моделирование процесса образования шейки и последующего разрушения исходит из уравнений для упругопластическопористого материала, предложенных Гарсоном [1] и усовершенствованных в дальнейшем Твергаардом и Нидельманом [2, 3]. В литературе эта модель известна как GTN-модель. Она учитывает зарождение и рост пор только при растяжении. GTN-модель является обобщением классической теории течения при условии пластичности Мизеса и учитывает влияние пластической сжимаемости материала вследствие порообразования в предразрушенном состоянии.

Модель GTN рассматривает эффективный пористый материал с упругопластической матрицей. Функция текучести для эффективного материала имеет вид

$$F = \left(\frac{S}{\sigma_Y}\right)^2 + 2q_1 f \operatorname{ch}\left(\frac{3q_2 \sigma_{kk}}{2\sigma_Y}\right) - (1 + q_1^2 f^2) = 0 \quad (5)$$

где  $q_1, q_2$  – подгоночные параметры, введенные Твергаардом и Нидельманом [3],  $S = (3/2 s_{ij}s_{ij})^{1/2}$  – интенсивность напряжений в эффективном материале,  $\sigma_{kk} = -p$  – первый инвариант тензора напряжений (давление),  $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$  – девиатор напряжений,  $\sigma_Y$  – предел текучести материала,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений Коши.

Структурным параметром повреждаемости является  $f = V_{\text{por}}/V$  – пористость, равная отношению объема разрушенного материала (пор) к полному объему материала.

В условии (1) кроме пористости  $f$  сильнейшее влияние оказывает отношение  $\sigma_{kk}/\sigma_Y$ . Предел текучести  $\sigma_Y$  определяется из равенства работ для пластической матрицы и эффективного материала

$$(1 - f)\sigma_Y \dot{\varepsilon}_m^p = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (6)$$

где  $\dot{\varepsilon}_m^p$  – интенсивность скоростей пластических деформаций в матрице.

Для упрочняющегося упругопластического материала связь между  $\dot{\varepsilon}_m^p$  и  $\sigma_Y$  определяется уравнением (2) в виде

$$\dot{\epsilon}_m^p = (1/E_T - 1/E)\dot{\sigma}_Y$$

где текущий модуль упругости  $E_T(\sigma_Y)$  определяется по диаграмме материала на одноосное растяжение.

Эволюционное уравнение для пористости состоит из двух слагаемых

$$\dot{f} = \dot{f}_{gr} + \dot{f}_{nucl} \quad (7)$$

где первое слагаемое  $\dot{f}_{gr}$  отвечает за рост существующих пор, а второе  $\dot{f}_{nucl}$  – за образование новых пор. Рост пор связан с объемной пластической деформацией  $\epsilon_{kk}^p$  и определяется законом сохранения массы.

$$\dot{f}_{gr} = (1 - f)\dot{\epsilon}_{kk}^p \quad (8)$$

Зарождение новых пор задается соотношением

$$\dot{f}_{nucl} = A\dot{\bar{\epsilon}}_m^p \quad (9)$$

Здесь  $\bar{\epsilon}_m^p$  – интенсивность пластических деформаций в матрице. Соотношение для коэффициента  $A$ :

$$A = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\epsilon}_m^p - \epsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \quad (10)$$

определяется как нормальное распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_m^p$ , имеющих главное значение  $\epsilon_N$  и стандартное отклонение  $s_N$ ,  $f_N$  – объемная доля зарождающихся пор. Поры зарождаются только при растяжении.

Классические упругопластические модели, основанные на условии пластичности Мизеса, не учитывают влияние первого инварианта тензора напряжений (давления) на пластические свойства материала.

В частном случае при  $f = 0$  условие пластичности (1) переходит в условие пластичности Мизеса, где  $\sigma_Y$  можно считать зависящим от параметра упрочнения, например от параметра Одквиста

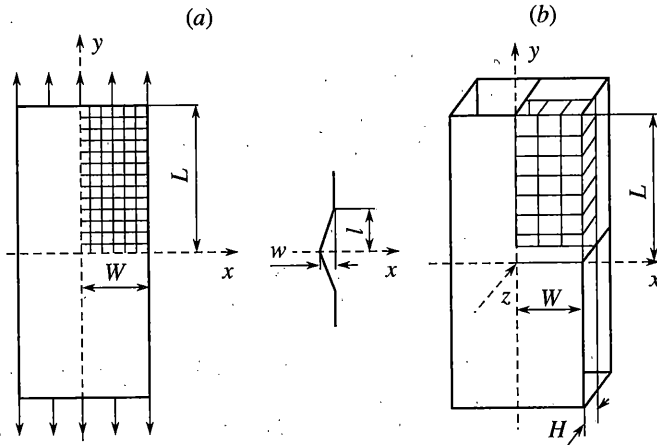
$$\chi = \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} dt$$

или пластической работы

$$W^p = \int_0^{\epsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$$

**2.3. Критерии разрушения материала.** Для исследования разрушения GTN-модель необходимо дополнить критериями разрушения материала.

Критерии разрушения в определенной степени связаны с самой формулировкой модели. Например, пластичность связывается со сдвиговой деформацией, если предполагается пластическая несжимаемость материала (шаровая часть тензора напряжений – давление не вносит вклада (или почти не вносит) в деформацию, а упругая



Фиг. 1

составляющая мала). Естественно считать, что такой материал может разрушаться только после достижения сдвиговой деформацией определенного предела.

$$\chi = \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} dt \leq \chi_{cr} \quad (11)$$

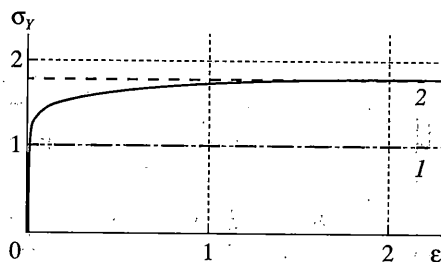
Если материал сильно сжимаем, то для него разрушение определяется критической пористостью.

$$f \leq f_{cr} \quad (12)$$

Таким образом, при исследовании разрушения поврежденного упругопластического материала необходимо проверять два независимых условия: интенсивность касательных деформаций (11) и пористость (12). Разрушение происходит по тому критерию, который выполнится раньше.

**3. Постановка задачи и метод решения.** Рассматривается квазистатическое растяжение сплошных однородных и ослабленных малым внешним надрезом образцов из нелинейного материала. Расчеты проводились для плоских прямоугольных образцов (фиг. 1). К торцам образца прикладывалось равномерное перемещение, растущее во времени с постоянной скоростью. В качестве второго условия на торце принималось условие отсутствия касательных напряжений. Эти условия обеспечивают точное решение в виде однородного одноосного растяжения по длине образца, потерю устойчивости которого в расчете определить проще всего. Задание, например, в качестве второго условия равенство нулю поперечного перемещения нарушает однородность напряженно-деформируемого состояния вблизи торца. Исследуется устойчивость этого решения и закритические формы поведения образца вплоть до полного разрушения. Потеря устойчивости проявляется как вызываемое малыми возмущениями отклонение от однородного состояния.

Упругие характеристики материала  $E = 300$  МПа,  $\nu = 0.3$ . Зависимость предела текучести  $\sigma_Y$  пластического материала матрицы от деформации приведены на фиг. 2. В одних расчетах рассматривался упругоидеальнопластический материал (кривая 1), предел текучести  $\sigma_Y \equiv \sigma_Y^0 = 1.00$  МПа,  $\epsilon_Y^0 \approx 3.34 \cdot 10^{-2}$ . В других использовалась диаграмма с начальным участком пластического упрочнения (кривая 2): пластичность начинается при  $\sigma_Y^0 = 1.00$ , диаграмма выходит на идеальную пластичность при  $\sigma_Y^* = 1.795$  и  $\epsilon_Y^* \approx 1.73$ .



Фиг. 2

Параметры, характеризующие модель GTN, брались следующими:  $\rho_0 = 0.0$ ,  $q_1 = 1.5$ ,  $q_2 = 1.0$ ,  $\epsilon_N = 0.3$ ,  $s_N = 0.1$ ,  $f_N = 0.1$ .

Начальные размеры образца во всех расчетах были одинаковыми (фиг. 1): полувысота стержня  $L = 4$  мм, полуширина  $W = 1$  мм, полувысота надреза  $l = 0.030$  мм, глубина надреза  $w = 0.005$  мм. Полутолщина образца (при моделировании тонких пластин) бралась  $H = 0.05$  мм и  $H = 0.10$  мм.

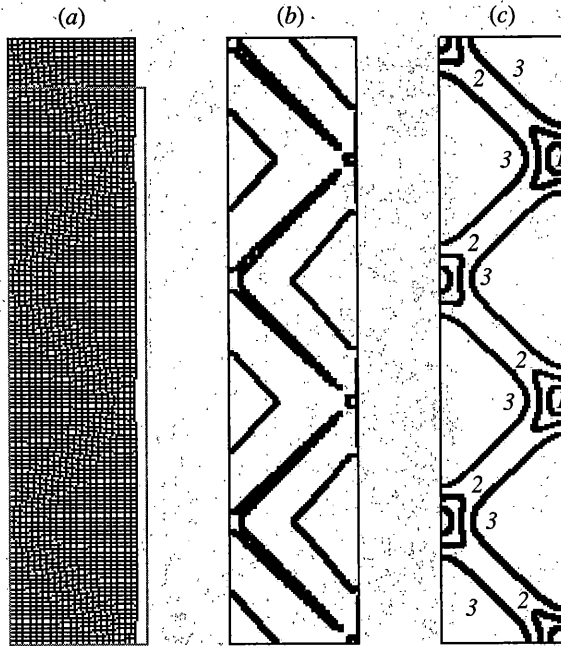
По пространству применялась конечно-элементная аппроксимация на лагранжевой сетке, что позволяет визуально отслеживать деформацию элементов. Моделируемая область в силу симметрии составляет 1/4 образца (фиг. 1) и разбивается сеткой на четырехугольные (двумерная плоско-деформируемая задача  $\epsilon_z = 0$ ) или кубические элементы (пространственная задача). Моделирование растяжения плоских образцов проводилось с использованием четырехузловых билинейных четырехугольных конечных элементов. На левую и нижнюю стороны области накладывались условия симметрии ( $u_n = 0$ ,  $\sigma_{xy} = 0$ ). Правая сторона свободна от напряжений. На верхней границе задавалось вертикальное перемещение  $u_y$ , растущее с постоянной скоростью.

Чтобы не вносить численную неоднородность, способную исказить решение задачи при переходе в закритическое состояние, образец разбивается однородно на прямоугольные конечные элементы по всей длине области. Высота элемента не превышала высоты  $l$  малого надреза, расположенного на внешней стороне в центре образца (фиг. 1, а). При расчетах использовались КЭ сетки  $20 \times 133$  и  $40 \times 160$  элементов, соответственно 1 или 2 слоя элементов в полосе надреза. В первом случае горизонтальный размер элемента больше вертикального так, чтобы в процессе деформации элементы приближались бы к квадратным. Во втором – вне надреза элементы были квадратными.

Моделирование растяжения тонких плоских образцов проводилось в пространственной постановке задачи, т.к. в этом случае существенно поперечное утончение в зоне локализации (фиг. 1, б). Использовались восьмиузловые линейные кубические элементы. На плоскостях  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $z = 0$  задавались условия симметрии. На верхней стороне было задано вертикальное перемещение  $u_y$ . Рассматривались случаи двух тонких образцов с разной полутолщиной  $H = 0.05$  мм и  $H = 0.10$  мм, по направлению  $z$  размещалось 1 или 2 элемента, соответственно расчетная КЭ-сетка составляла  $20 \times 80 \times 1$  и  $20 \times 80 \times 2$  элементов.

Во всех рассмотренных задачах по пространству применялась конечно-элементная аппроксимация на лагранжевой сетке, по квазивремени – конечно разностная аппроксимация.

Определяющие уравнения материала существенно нелинейные и для получения решения применялся метод последовательного нагружения, на каждом переменном временном шаге итерационный процесс Ньютона – Рафсона [16]. Отметим, что перемещение верхнего торца стержня пропорционально временному шагу и скорость деформирования образца является постоянной:  $v = 0.5$  мм/с. Максимально допусти-



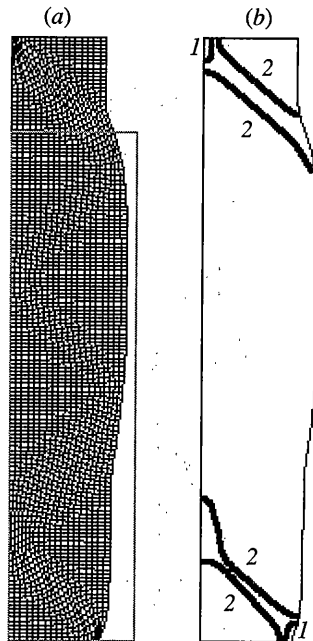
Фиг. 3

мый шаг по условному времени  $\Delta t_{\max}$  задавался таким, чтобы на каждом шаге приращение деформации всего образца  $\Delta \epsilon$  не превышала бы максимальной упругой деформации  $\epsilon_Y = \sigma_Y^0 / E$ .

**4. Шейкообразование и потеря устойчивости при плоской деформации.** Рассмотрим сначала механизмы образования шейки в плоском образце при разных условиях пластичности и разных диаграммах материала. Определим влияние надреза на напряженно-деформированное состояние и потерю устойчивости, исследуем механизм образования полос локализации и разрушения образцов. Большинство приведенных в этом разделе расчетов получено на сетке  $20 \times 133$  элементов при максимально допустимом квазивременном шаге  $\Delta t_{\max} = 0.0125$  с. Начальная конфигурация образца показана светлой рамкой; текущая конфигурация показана деформированной сеткой.

**4.1. Однородный идеальнопластический образец.** При растяжении образца из идеальнопластического материала условие Дракера нарушается одновременно во всем образце. Потеря устойчивости носит бифуркационный характер. Образуется вполне определенная периодическая структура центров локализации, которая отвечает в начальной стадии жесткопластическому решению задачи [14] (фиг. 3) и определяется соотношением геометрических размеров образца. На фиг. 3 при  $u = 0.35$  мм,  $\epsilon = 8.75\%$  изображены деформация лагранжевой сетки (фиг. 3, а) изолинии интенсивности напряжений  $S = 1.001$  МПа (фиг. 3, б), изолинии интенсивности пластических деформаций  $I_1^p = 0.0263$ ,  $I_2^p = 0.0185$ ,  $I_3^p = 0.0108$  (фиг. 3, в).

Закритическая деформация происходит подобно линейным задачам устойчивости, где моды решения отличаются друг от друга числом гармоник. Аналогичным образом в нелинейных задачах реологической неустойчивости решение отличается числом образующихся шеек. По длине стержня возникает некоторое число центров локализации, каждый из которых потенциально может образовать свою шейку. Но



Фиг. 4

эта периодическая структура неустойчива и разрушается в силу случайных возмущений (численные ошибки и/или геометрические несовершенства). При увеличении деформации локализация в одном или двух центрах оказывается больше, чем в остальных. Они и берут на себя всю последующую деформацию. В результате происходит замораживание деформаций в других шейках и быстрый рост в одной из них, который и приводит к разрушению. На фиг. 4 показаны при  $u = 0.75$  мм,  $\epsilon = 18.75\%$  деформация лагранжевой сетки (фиг. 4, а) и изолинии интенсивности пластических деформаций  $I_1^p = 1.01$ ,  $I_2^p = 0.543$  (фиг. 4, б). Видно, что в конечном состоянии остались две шейки на концах образца (влияние неоднородности за счет граничных условий). Характерно, что они по форме и напряженно-деформируемому состоянию близки друг к другу. Это доказывает, что каждый из центров локализации развивается по одинаковым вполне определенным, а не хаотичным законам.

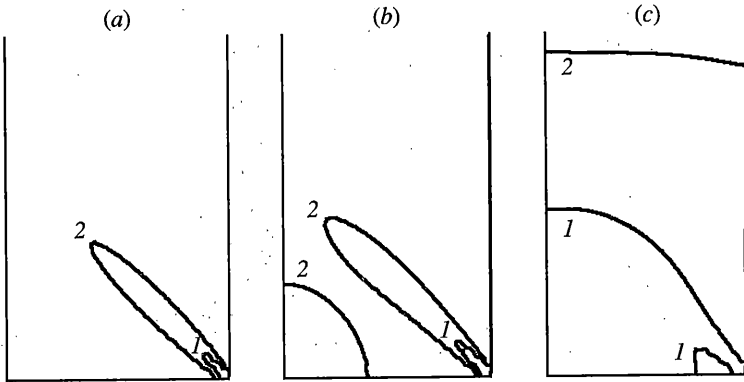
Чтобы получить низшую форму, отвечающую одной шейке, необходимо создать в образце малое возмущение, достаточное для подавления других случайных возмущений.

Другим стабилизирующим фактором является начальное пластическое упрочнение материала, которое всегда присутствует в реальных материалах, что учитывалось с помощью диаграммы 2, показанной на фиг. 2.

Напряженно-деформируемое состояние (НДС) до потери устойчивости в материале однородно. Если материал во всем интервале деформации упрочняется, то потери устойчивости не происходит даже при искусственных возмущениях. Для потери устойчивости необходимо локальное нарушение постулата Дракера, т.е. материальная диаграмма должна быть ограниченной: выходить на идеальную пластичность или разупрочнение (фиг. 2):

4.2. *Растяжение образца с надрезом. Материал Мизеса с начальным пластическим упрочнением.* Надрез является концентратором напряжений, поэтому максимальное напряжение возникает в сечении образца с малым надрезом.



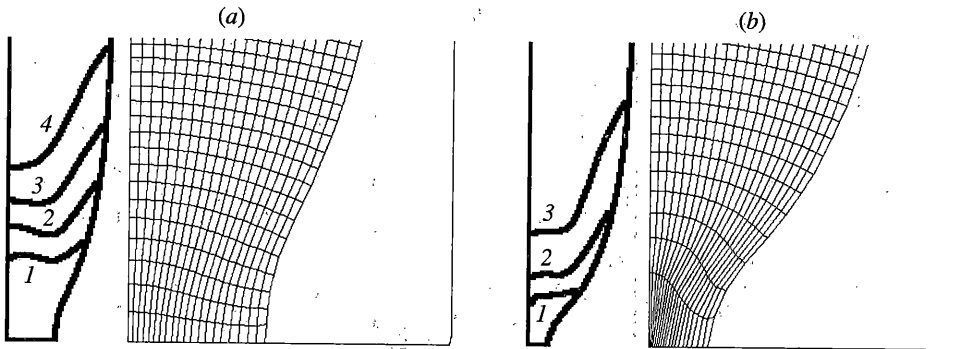


Фиг. 5

На фиг. 5 показаны изолинии интенсивности напряжений  $S$  на трех начальных этапах растяжения (до момента потери устойчивости). Фиг. 5, *a*:  $u = 0.20$  мм,  $\epsilon = 5\%$ ,  $S_1 = 1.345$  МПа,  $S_2 = 1.339$  МПа; фиг. 5, *b*:  $u = 0.49$  мм,  $\epsilon = 12.25\%$ ,  $S_1 = 1.476$  МПа,  $S_2 = 1.472$  МПа; фиг. 5, *c*:  $u = 0.56$  мм,  $\epsilon = 14.00\%$ , изолинии  $S_1 = 1.516$  МПа,  $S_2 = 1.499$  МПа. От надреза под углом  $\approx 45^\circ$  располагается полоса, в которой интенсивность напряжений вначале примерно на 0.5–2% больше, чем напряжения в остальной части образца (фиг. 5, *a*). Вне полосы напряженное состояние образца почти однородно (разброс совпадает с вычислительной погрешностью). Непосредственно вблизи надреза по бокам от полосы располагаются мини-зоны разгруженного материала (примерно на 1% меньше, чем напряжения в остальной части образца). Это справедливо как для упругого, так и для упрочняющегося пластического состояния.

После того как интенсивность напряжений в полосе (вплоть до вертикальной оси симметрии) превысит  $2/3 \sigma_y^* \approx 1.466$  МПа, зона повышенных напряжений начинает образовываться в центре образца на пересечении осей симметрии (фиг. 5, *b*). Подрастая, новая зона смыкается с полосой сдвига. Интенсивность напряжений в центре образца начинает превышать интенсивность напряжений вблизи малого надреза. Дальнейший рост интенсивности напряжений происходит не от надреза, а от центра образца, область повышенной интенсивности напряжений захватывает все сечение образца, начинается шейкообразование (фиг. 5, *c*). Отметим, что при наличии надреза шейкообразование начинается значительно раньше, чем в однородном образце.

На фиг. 6 показана КЭ-сетка в процессе деформации образца. Видно, что образуется только одна шейка в центре стержня, где помещался малый надрез. Это объясняется тем, что при наличии упрочнения критическое напряжение появляется не во всех сечениях одновременно, как в случае идеальнопластического материала, а только в одном ослабленном сечении. В окрестности шейки деформация смешанная: сдвиг-растяжение. Нет выраженной полосы сдвига и отсутствует резкая локализация сдвиговых деформаций. Шейка развивается главным образом за счет удлинения в центральном сечении. Разрушение происходит отрывом. Если при  $u = 0.95$  мм,  $\epsilon = 23.75\%$  (фиг. 6, *a*, изолинии интенсивности напряжений  $S_1 = 1.650$  МПа,  $S_2 = 1.487$  МПа,  $S_3 = 1.325$  МПа,  $S_4 = 1.162$  МПа) деформация удлинения в центральном сечении одного порядка с соседними, то в при  $u = 1.10$  мм,  $\epsilon = 27.50\%$  (фиг. 6, *b*, изолинии интенсивности напряжений  $S_1 = 1.776$  МПа,  $S_2 = 1.134$  МПа,  $S_3 = 0.813$  МПа) она превосходит их в несколько раз и составляет 250%–300%, т.е. происходит локализация растягивающих деформаций. Причем максимальное значение интенсивности деформаций достигается в центральном сечении не вблизи надреза, а на оси стержня, откуда и на-



Фиг. 6

чинает распространяться трещина. Видно, что при большем удлинении (фиг. 6, *b*) вблизи шейки (между изолиниями 1–3) происходит разгрузка и пластическая деформация замораживается.

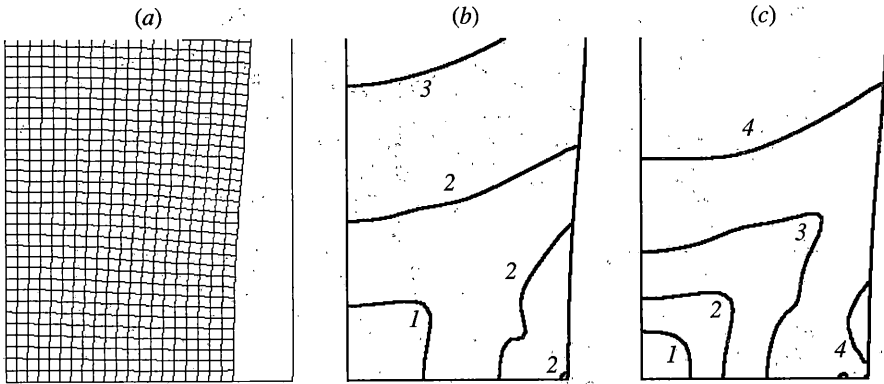
4.3. *GTN-материал с начальным пластическим упрочнением. Растяжение однородного образца.* Для GTN-материала влияние на НДС оказывает первый инвариант напряжений  $\sigma_{kk}$  и вид НДС характеризуется отношением  $\sigma_{kk}/\sigma_Y$ ,  $\sigma_Y$  – предел текучести эффективного материала.

В однородном образце развитие процесса закритической деформации на начальном этапе качественно происходит по такой же схеме как в идеальнопластическом материале без поврежденности. Вначале возникает периодическая неустойчивая система шеек. Локализация наступает значительно раньше, чем для классической модели, т.к. учет пористости в модели GTN приводит к резкому ослаблению материала в зоне локализации. С увеличением деформации локализация в одном из структурных элементов оказывается большей и периодическая система разрушается. Но на поздней стадии, когда пористость становится заметной, картина НДС существенно изменяется и структура решения кардинально отличается от решения без учета повреждаемости.

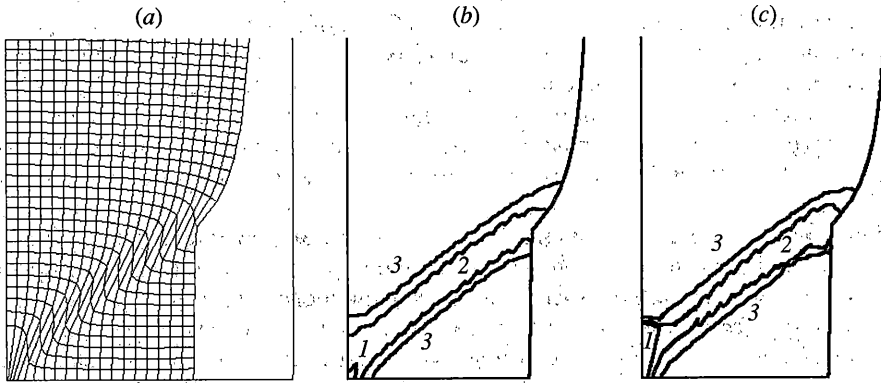
4.4. *GTN-материал с начальным пластическим упрочнением. Растяжение образца с надрезом.* Начальное состояние подобно случаю для классической модели (фиг. 5). С увеличением удлинения образца в материале происходит зарождение и рост пор, что приводит к ослаблению материала и более резкой локализации, чем для классической модели. Надрез концентрирует напряжения и вблизи него устойчиво (по отношению к численным возмущениям расчета) локализуется деформация и образуется шейка.

Еще когда локализация не велика и шейка только зарождается, но пористость уже существенна, НДС в GTN-материале отличается от НДС в классическом упругопластическом материале (сравните фиг. 7 с фиг. 5, *с* и фиг. 6). Это влияние первого инварианта напряжений и поврежденности. На фиг. 7 показаны при  $u = 0.60$  мм,  $\varepsilon = 15.00\%$  деформация конечно-элементной сетки (фиг. 7, *a*), изолинии интенсивности пластических деформаций  $I_1^p = 0.292$ ,  $I_2^p = 0.235$ ,  $I_3^p = 0.178$  (фиг. 7, *b*) и изолинии пористости  $f_1 = 3.0\%$ ,  $f_2 = 2.3\%$ ,  $f_3 = 1.6\%$ ,  $f_4 = 0.9\%$  (фиг. 7, *c*). На фиг. 8 показаны при  $u = 0.75$  мм,  $\varepsilon = 18.75\%$  деформация конечно-элементной сетки (фиг. 8, *a*), изолинии интенсивности пластических деформаций  $I_1^p = 1.564$ ,  $I_2^p = 1.083$ ,  $I_3^p = 0.602$  (фиг. 8, *b*) и изолинии пористости  $f_1 = 55\%$ ,  $f_2 = 28\%$ ,  $f_3 = 14\%$  (фиг. 8, *c*).

С увеличением растяжения образца происходит рост и концентрация области всестороннего растяжения и решения отличаются качественно. Это видно из сравнения фиг. 6, 7 с фиг. 4, *b*.



Фиг. 7



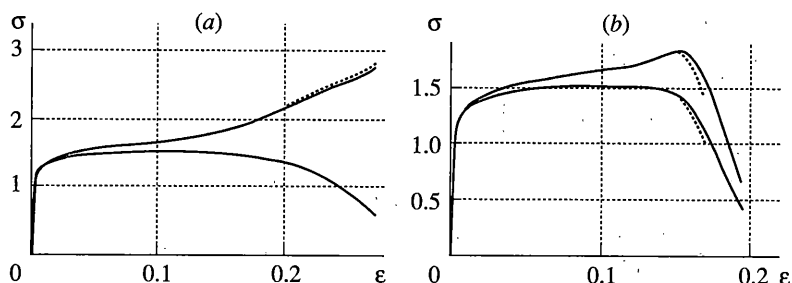
Фиг. 8

Область повышенной интенсивности напряжений  $S$ , всестороннего растяжения  $\sigma_{kk}$ , пористости  $f$  концентрируется в центре образца (на пересечении осей симметрии). С увеличением растяжения происходит резкий рост деформаций и пористости, локализованный в узкой полосе, выходящей из центра образца под углом  $\approx 45^\circ$ . Материал вне полосы локализации разгружается. Элементы в полосе локализации практически принимают всю деформацию на себя и на горизонтальной оси симметрии образуется "пластический клин" – часть материала почти без деформирования втягиваемая в образец.

4.5. Сравнение результатов закритического деформирования для моделей с повреждаемостью и без нее. Интегральные диаграммы. На фиг. 9 приведены условные и истинные диаграммы, построенные для образцов с надрезом из упругопластического материала с начальным упрочнением (фиг. 9, а) и GTN-материала с начальным пластическим упрочнением матрицы (фиг. 9, б). Ни одна из них не совпадает с материальной диаграммой, закладываемой в расчет.

Модель, для которой диаграмма материала (матрицы) имеет начальное упрочнение (фиг. 2), значительно более устойчива, чем идеальнопластическая. При изменении расчетных параметров (шага интегрирования по условному "времени"  $\Delta t_{\max}$  и размеру сетки) результаты расчета для нее практически не меняются (фиг. 9):

Конкретная форма потери устойчивости (число и положение шеек и полос локализации) для идеальнопластического образца (фиг. 9) существенно зависит от рас-



Фиг. 9

четных параметров (размер КЭ-сетки, предельных шаг интегрирования по нагрузке  $\Delta t_{\max}$ ). Введение даже малого надреза для модели с начальным пластическим упрочнением дает возмущение, достаточное для того, чтобы индуцировать потерю устойчивости и локализацию деформаций именно вблизи надреза.

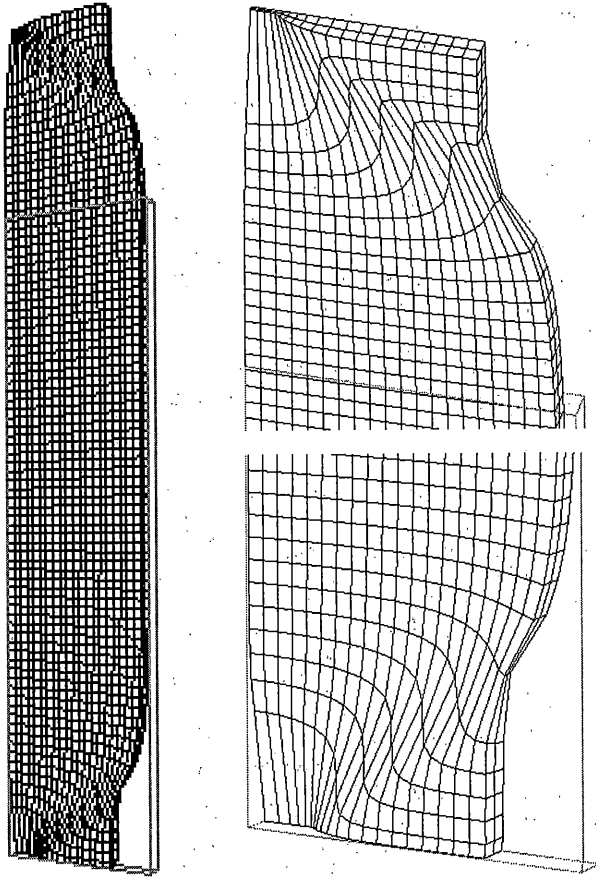
Интегральные истинные и условные диаграммы растяжения  $\sigma$ - $\epsilon$  практически начинают отличаться только после перехода в закритическое состояние. Для образцов с начальным пластическим упрочнением и надрезом интегральные диаграммы зависят от расчетных параметров (размер КЭ-сетки, предельных шаг интегрирования по нагрузке  $\Delta t_{\max}$ ) очень слабо и мало отличаются при изменении параметров дискретизации задачи.

**5. Шейкообразование в тонких пластинах с надрезом.** Для учета поперечного утонения в тонкой пластине необходимо трехмерное пространственное моделирование. Приведем результаты, полученные для повреждающегося материала (GTN-модель) с начальным пластическим упрочнением матрицы и малым надрезом образца.

Влияния надреза здесь оказалось недостаточным для подавления нефизических численных возмущений и на фиг. 10 наблюдаются две шейки. Их образованию способствует неточное выполнение естественного граничного условия, которое в методе конечных элементов выполняется лишь в слабом смысле.

В тонких пластинах существенно поперечное утонение в направлении оси  $z$  в полосе локализации. Как и для толстой пластины (фиг. 5) на начальном этапе интенсивность напряжений растет от надреза к вертикальной плоскости симметрии образца, а затем захватывает область в центре образца на пересечении горизонтальной и вертикальной осей симметрии. Локализация развивается комбинацией сдвига и отрыва. В самой полосе локализации наблюдается резкое поперечное сужение почти до нулевой толщины. Ясно видно образование и перемещение "пластического клина" к вертикальной оси, которое и создает шейку. В отличие от толстой пластины в тонкой пластине полоса локализации проходит под меньшим углом  $\approx 35^\circ$ - $40^\circ$ , что близко к жесткопластическому решению при плосконапряженном состоянии [9, 14]. Полоса локализации идет не непосредственно из центра образца, а несколько сдвинута к краю. В окрестности центра развивается область всестороннего растяжения и разрушения, в результате здесь образуется трещина нормального отрыва. Ближе к краю трещина переходит в разрушение сдвигом под углом к оси образца. Этот эффект тем сильнее, чем больше отношение толщины пластины  $H$  к ее ширине  $W$ .

На фиг. 10 показана картина образования полос сдвига и утонение пластины в направлении оси  $z$ . Отметим почти полное повторение решения в двух разных верхней и нижней шейках, несмотря даже на то, что в дискретном виде условия на верхней и на нижней сторонах образца различны. Это свидетельствует об устойчивом характере решения в пределах одного структурного элемента шейки. Данное обстоятельство



Фиг. 10

во подтверждает бифуркационный характер реологической потери устойчивости упругопластических образцов.

**6. Выводы.** Шейка образуется, только если нарушается критерий устойчивости материала Дракера ( $\Delta\sigma\Delta\varepsilon > 0$ ), т.е. если материальная диаграмма ограничена падающим или горизонтальным участком кривой.

Реологическая потеря устойчивости носит бифуркационный характер, который заключается в зарождении в закритической стадии неустойчивой периодической системы структурных элементов локализации (мод). В то же время решение внутри каждой моды (шейки) слабо чувствительно к возмущениям.

Начальное возмущение позволяет выделить одну из ветвей решения. Возмущение должно быть сильнее, чем прочие возмущения, связанные с неоднородностями в вычислительном процессе (численная ошибка; граничные условия и т.д.).

Учет порообразования приводит к сильному влиянию на условие пластичности первого инварианта тензора напряжений  $\sigma_{kk}$  и пластической сжимаемости материала, которые существенно влияют на локализацию деформации и образование полос сдвига. Введение одного только разупрочнения  $\sigma_{\chi}(f)$  недостаточно для получения выраженной локализации сдвига, необходимо учитывать влияние всестороннего растяжения  $\sigma_{kk}$ .

Учет поврежденности в условиях плоской деформации приводит к четкой локализации деформаций в виде полосы сдвига. Разрушение образца происходит по полосам

локализованного сдвига, в отличие от разрушения образца при условии пластичности Мизеса, которое происходит отрывом.

В тонком плоском образце (плосконапряженное состояние) в повреждающемся упругопластическом материале полоса сдвига образуется под углом  $35^{\circ}$ – $40^{\circ}$  к горизонтальной оси. При увеличении толщины образца вблизи его центра образуется зона всестороннего растяжения, а полоса сдвига смещается к внешней поверхности, что приводит к разрушению отрывом по плоской поверхности вблизи оси и по наклонной поверхности сдвига ближе к боковой поверхности. Сужение образца происходит в двух направлениях  $Ox$  и  $Oz$ .

Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными показывает, что модель пористой среды вполне адекватно описывает разрушение упругопластического материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00701) и Программы фундаментальных исследований РАН (ОЭММПУ-14).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gurson A.L.* Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Materials // *J. Engin. Mater. and Techn.* 1977. V. 99. P. 2–15.
2. *Tvergaard V.* Influence of Voids on Shear Band Instabilities under Plane Strain Condition // *Intern. J. Fracture Mechanics.* 1981. V. 17. P. 389–407.
3. *Needleman A., Tvergaard V.* Material Strain-Rate Sensitivity in the Round Tensile Bar. Brown University Report, Division of Engineering, 1985. 35p.
4. *Кукуджанов В.Н.* Микромеханическая модель разрушения неупругого материала и ее применение к исследованию локализации деформаций // *Изв. РАН. МТТ.* 1999. № 5. С. 72–87.
5. *Баженов В.Г., Кибец А.Н., Лантев П.В., Осетров С.Л.* Экспериментально-теоретические исследования предельных состояний упругопластических стержней различного поперечного сечения при растяжении // *Проблемы механики. Сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского.* М.: Физматлит. 2003. С. 115–123.
6. *Кукуджанов В.Н., Кибардин В.Ю.* Численное моделирование локализации пластических деформаций и разрушение упругопластических материалов // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 1. С. 109–119.
7. *Казаков Д.А., Капустин Д.А., Коротких Ю.Г.* Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1999. 225 с.
8. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Численное решение задач континуального разрушения. Препринт № 746. М.: ИПМех РАН, 2004, 39 с.
9. *Клюшников В.Д.* Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.
10. *Rice J.* The localization of plastic deformation in: *Theoretical and Applied Mechanics*, ed. Koiter W.T. North-Holland. 1997. P. 207–220.
11. *Aifantis E.C.* The physics of plastic deformation // *Int. J. Plasticity.* 1987. V. 3. P. 211–247.
12. *Ryzhak E.I.* A case of indispensable localized instability in elastic-plastic solid // *Int. J. Solids Struct.* 1999. V. 36. P. 4669–4691.
13. *Кондауров В.И., Кутлярова Н.В.* Поврежденность и реологическая неустойчивость начально-пористых материалов // *Изв. РАН. МТТ.* 2000. № 4. С. 99–109.
14. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
15. *Ивлеев Д.Д., Быковцев Г.И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, Физматлит. 1971. 231 с.
16. *Aravas N.* On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models // *Intern. J. Numerical Methods in Engin.* 1987. V. 24. P. 1395–1416.