

УДК 539.374

© 2005 г. М.Н.М. АЛЛАМ

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАДИАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Аналитически находится радиальное напряжение в задаче о действии сосредоточенной силы на границе неоднородной упругой полуплоскости. Соответствующая вязкоупругая задача решается на основе метода аппроксимаций Ильюшина. Приводятся численные примеры.

**1. Введение.** Нахождение поля напряжений представляет важную проблему в проектировании инженерных конструкций из упругих и вязкоупругих материалов. Целью настоящей работы является исследование распределения напряжений в полуплоскости или пространстве из упругого или вязкоупругого материала под действием приложенной на границе сосредоточенной силы. Квазистатическая задача была решена для упругого материала [1, 2], а затем с помощью метода аппроксимаций Ильюшина [3, 4] данное решение преобразовано к решению соответствующей задачи и для вязкоупругой среды.

Пусть решение упругой задачи записано в форме  $f(\omega)Q$ , где  $Q$  – известная функция времени, а  $f(\omega)$  обозначает функцию модулей упругости, например, модуля объемного сжатия  $K$  и оператор релаксации Ильюшина  $\omega$ . Последний связан с коэффициентом Пуассона  $\nu$  соотношением  $\omega = (1 - 2\nu)/(1 + \nu)$ . Представим функцию  $f(\omega)$  с помощью аппроксимирующих ядер  $\psi_\alpha(t)$ :

$$f(\omega) = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \psi_{\alpha}(\omega) = \sum_{\alpha} C_{\alpha} \psi_{\alpha}(t)$$

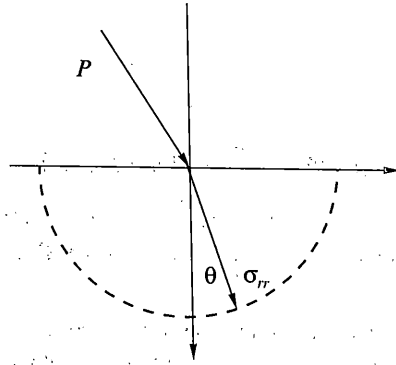
Каждая функция  $\psi_{\alpha}(t)$  может содержать элементы

$$\omega, \pi = \frac{1}{\omega}, g_{\beta}(\omega) = \frac{1}{1 + \beta\omega}$$

Константы  $C_{\alpha}$  определяются по методу наименьших квадратов применительно к функции  $f(\omega)$ . Вязкоупругое решение может быть получено из соответствующего упругого расшифровкой выражения  $f(\omega)Q$  в виде

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha} \int_0^t \psi_{\alpha}(t - \tau) d\tau$$

**2. Постановка и решение задачи.** Имеется сплошная упругая неоднородная полуплоскость, принадлежащая плоскости  $(xy)$  (фиг. 1), которая находится в плоском напряженном состоянии под действием сосредоточенной силы  $P$ . Эта сила  $P$  приложена под углом  $\gamma$  к оси  $y$ . Задача формулируется так, что функция, через которую выражаются компоненты напряжений, соответствует радиальному распределению напряжений.



Фиг. 1

Итак, имеем [1, 5] уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \sigma_{rr}/r = 0 \quad (1)$$

соотношения Коши

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \quad (2)$$

связь напряжений и деформаций

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{E} \sigma_{rr}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{rr}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2G} \sigma_{r\theta} = 0 \quad (3)$$

Здесь рассматривается обобщенное плоское напряженное состояние, в случае же плоской деформации необходимо произвести замены  $\nu \rightarrow \nu/(1 + \nu)$ ,  $E \rightarrow E(1 - \nu)$ , где  $\nu$ ,  $E$  – коэффициент Пуассона и модуль Юнга.

Уравнение (1) допускает решение в форме  $\sigma_{rr} = F(\theta)/r$ . Используя уравнение (2), приходим к следующему дифференциальному уравнению с частными производными:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{1}{E} \right) + \frac{1}{E} - r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{E} \right) - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\nu F}{E} \right) = 0 \quad (4)$$

Подставим  $E = E(r)E(\theta) = E_r E_\theta$  в уравнение (4) и после разделения переменных получим два обыкновенных дифференциальных уравнения [1]:

$$\nu \left( \frac{1}{E_r} \right)'' + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{E_r} \right)' + \frac{n^2 - 1}{r^2} \frac{1}{E_r} = 0, \quad \left( \frac{F}{E_\theta} \right)'' + \frac{n^2 F}{E_\theta} = 0 \quad (5)$$

где  $n = \sqrt{(1 - \alpha)(1 + \nu\alpha)}$ ,  $\alpha$  – произвольная постоянная.

Общее решение для  $1/E_r$  и  $F/E_\theta$  имеет вид

$$1/E_r = \lambda_1 r^\alpha + \lambda_2 r^{1 - \alpha - 1/\nu}$$

$$\frac{F}{E_\theta} = \begin{cases} A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta), & n \neq 0 - \text{действительное число} \\ A \operatorname{ch}(n\theta) + B \operatorname{sh}(n\theta), & n - \text{мнимое число} \\ A\theta + B, & n = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, для  $\sigma_{rr}$  имеем

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} \frac{E_\theta}{r}(A \cos n\theta + B \sin n\theta), & n \neq 0 - \text{действительное число} \\ \frac{E_\theta}{r}(A \operatorname{ch} n\theta + B \operatorname{sh} n\theta), & n - \text{мнимое число} \\ \frac{E_\theta}{r}(A\theta + B), & n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Если модуль  $E$  меняется как  $y^m$ , где  $y$  – расстояние до границы, то  $E = E_0 y^m = (E_0 r^m)(\cos^m \theta)$ , где  $E_0$  постоянно,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\alpha = -m$ :

$$n = \sqrt{(1+m)(1-vm)} \quad (8)$$

а уравнение (7) принимает вид

$$\sigma_{rr} = \begin{cases} \frac{\cos^m \theta}{r}(A \cos n\theta + B \sin n\theta), & n \neq 0 - \text{действительное число} \\ \frac{\cos^m \theta}{r}(A \operatorname{ch} n\theta + B \operatorname{sh} n\theta), & n - \text{мнимое число} \\ \frac{\cos^m \theta}{r}(A\theta + B), & n = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Постоянные  $A, B$  находятся из граничных условий

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \sigma_{rr} \sin \theta d\theta + P \cos \gamma = 0, \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \sigma_{rr} \cos \theta d\theta + P \sin \gamma = 0$$

Рассмотрим далее несколько случаев в зависимости от  $n$ :

$$\sigma_{rr} = \frac{\cos^m \theta}{r} \{ \alpha_{mn} [n \cos \gamma \cos n\theta + (m+1) \sin \gamma \sin n\theta] \} P$$

$$1) \quad \alpha_{mn} = \frac{2^{m+1} \Gamma\left(\frac{m+n+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-n+3}{2}\right)}{n\pi \Gamma(m+2)}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\cos^m \theta}{r} \{ \beta_{mn} [n \cos \gamma \operatorname{ch} n\theta + (m+1) \sin \gamma \operatorname{sh} n\theta] \} P$$

$$2) \quad \beta_{mn} = \frac{2^{m+2} \Gamma\left(\frac{m+ni+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m-ni+3}{2}\right)}{n\pi \Gamma(m+2)}, \quad i = \sqrt{-1}$$

Для  $n = 0$  имеют место два случая:

$$3,a) \quad m = 1/\nu, \quad \sigma_{rr} = \frac{\cos^m \theta}{r} A_0 [(m+1)\theta \cos \gamma + \sin \gamma] P, \quad A_0 = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$$

$$3,b) \quad m = -1, \quad \sigma_{rr} = -P \sin \gamma / (\pi r)$$

**3. Вязкоупругое решение.** Как обращено внимание во введении, величины в круглых скобках в уравнениях будут теперь пониматься как операторы вида  $f(\omega)$ , действующие на данную функцию  $P(t)$ . Для получения замкнутых выражений напряжений как функций  $t$  осталось найти зависимость оператора релаксации  $\omega$  и приложенной силы  $P$  от времени. В дальнейшем функция релаксации вязкоупругого материала для определенности выбрана в виде

$$\omega = a + be^{-\alpha t} = a + be^{-\tau} \quad (10)$$

Здесь  $\tau = \alpha t$  – безразмерное время, постоянные  $a, b$  находятся экспериментально.

Напряжение  $\sigma_{rr}$  в случаях 1) и 2) принимает вид

$$\sigma_{rr}(\theta, \omega) \approx \frac{\cos^m \theta}{r} \left( C_1 + C_2 \omega + \frac{C_3}{\omega} + \frac{C_4}{1 + 1/2\omega} + \frac{C_5}{1 + 2\omega} \right) P \quad (11)$$

В случаях 3, а) и 3, б) напряжение  $\sigma_{rr}$ , как и в упругой задаче, не зависит от времени. Постоянные  $C_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  можно определить из линейной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^5 L_{ij} C_j = B_i \quad (i = 1, \dots, 5)$$

$$L_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\omega, \quad B_i = \int_0^1 \sigma_{rr}(\omega) \phi_i d\omega$$

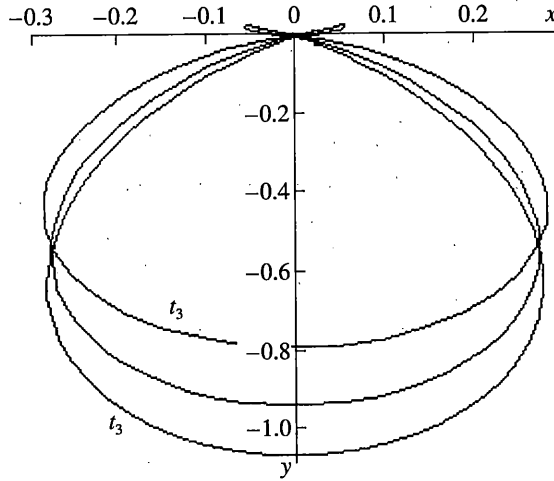
$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = \omega, \quad \phi_3 = \pi = \frac{1}{\omega}, \quad \phi_4 = \frac{1}{1 + \beta\omega} \quad \left( \beta = 1, \frac{1}{2} \right)$$

С учетом (10) применим преобразование Лапласа – Карсона для нахождения функций  $\pi(t)$  и  $g_\beta(t)$  ( $\beta = 1/2, 2$ ). Обозначая преобразование через  $\pi^*(t)$  и  $g_\beta^*(t)$ , имеем

$$\pi(t) = \frac{1}{a} \left( 1 - be^{\frac{-a\tau}{a+b}} \right), \quad g_\beta(t) = \frac{1}{1 + a\beta} \left( 1 - \frac{b\beta}{1 + (a+b)\beta} e^{\frac{-(1+\beta a)\tau}{1+(a+b)\beta}} \right) \quad (12)$$

Приложенная сила выбирается в виде  $P = P_0 H(t)$ , где  $H(t)$  – единичная ступенька Хевисайда. Теперь из соотношения (11) можно получить окончательное замкнутое выражение для напряжения как функции  $\theta$  и  $t$ . Имеем

$$\sigma_{rr}(\theta, t) = \frac{P_0}{r} \left[ C_1 P(t) + C_2 \int_0^1 \omega(t-\tau) dP(\tau) + C_3 \int_0^1 \pi(t-\tau) dP(\tau) + \right. \\ \left. + C_4 \int_0^1 g_{1/2}(t-\tau) dP(\tau) + C_5 \int_0^1 g_2(t-\tau) dP(\tau) \right]$$



Фиг. 2

Тогда

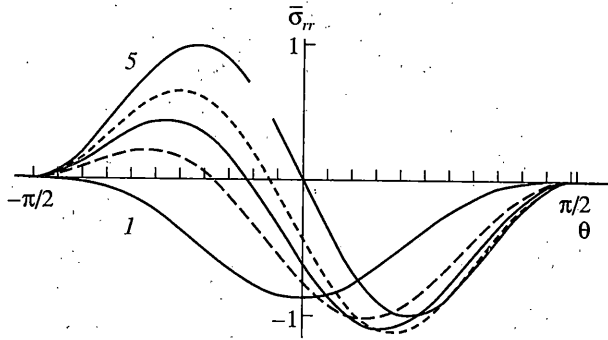
$$\sigma_{rr}(\theta, t) = \frac{P_0}{r} [C_1(\theta)H(t) + C_2(\theta)\omega(t) + C_3(\theta)\pi(t) + C_4(\theta)g_{1/2}(t) + C_5(\theta)g_2(t)] = \frac{P_0}{r} \left( A_1 + A_2 e^{-\tau} + A_3 e^{\frac{-a\tau}{a+b}} + A_4 e^{\frac{-\tau(1+a\beta_1)}{1+\beta_1(a+b)}} + A_5 e^{\frac{-\tau(1+a\beta_2)}{1+\beta_2(a+b)}} \right) \quad (13)$$

$$A_1 = C_1 + C_2 a + \frac{C_3}{a} + \frac{C_4}{1+\beta_1 a} + \frac{C_5}{1+\beta_2 a}$$

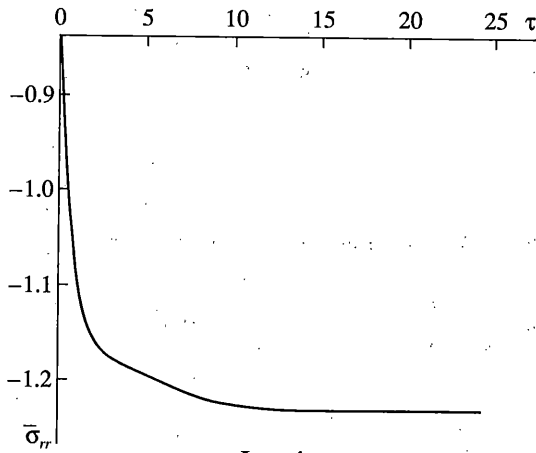
$$A_2 = C_2 b, \quad A_3 = \frac{b}{a} C_3, \quad A_4 = -\frac{C_4}{1+a\beta_1}, \quad A_5 = -\frac{C_4}{1+a\beta_2}$$

**4. Результаты и выводы.** Численный анализ ниже выполнен при следующих значениях параметров  $a = 0.1$ ,  $b = 0.9$ ,  $\gamma = \pi/6$ ,  $m = 2.2$  и, кроме того,  $\bar{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}/P_0$ , так что результаты применимы для вязкоупругого материала с модулем  $K \approx 10^5$  кгс/см<sup>2</sup> и для упругого материала с константами  $E \approx 10^6$  кгс/см<sup>2</sup>,  $\nu_1 = 0.25$ .

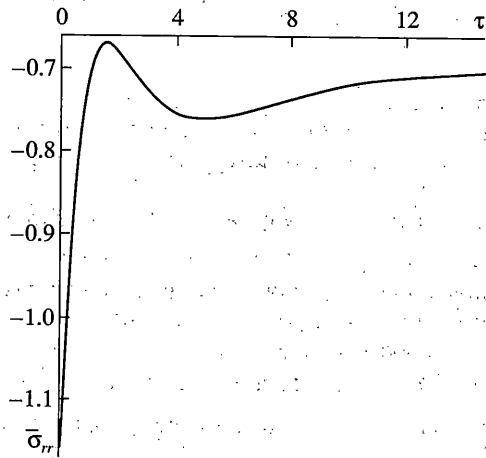
На фиг. 2 показаны распределения напряжения  $\sigma_{rr}$  в полуплоскости в случае 1) при трех различных временах  $t_1 < t_2 < t_3$ . Видно, что  $|\bar{\sigma}_{rr}|$  убывает со временем при больших  $\theta$ . Зависимости напряжения от  $\theta$  при различных значениях  $\gamma$  ( $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ ) приведены на фиг. 3. Нетрудно заметить, что часть плоскости занята растягивающими напряжениями, причем с ростом  $\gamma$  эта часть увеличивается. На фиг. 4 и 5 построены зависимости  $\bar{\sigma}_{rr}$  от времени для  $\gamma = \pi/6$  и  $\theta = 0$  в случаях 1) и 2). Как видно, в случае 1) напряжение  $\bar{\sigma}_{rr}$  растет со временем вплоть до своего асимптотического значения за исключением малого интервала, где оно уменьшается. В случае 2) (фиг. 5) напряжение  $\bar{\sigma}_{rr}$  падает со временем вплоть до достижения асимптотического значения.



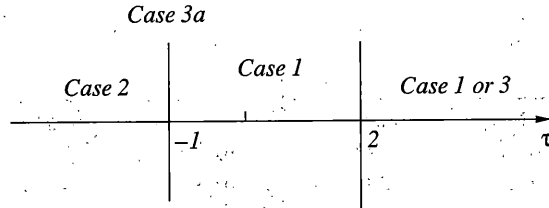
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Соотношение (14) имеет следующий вид для случаев 1) и 2) соответственно:

$$\sigma_{rr}(r, t) \Big|_{\theta=0, \gamma=\frac{\pi}{6}} = \frac{P_0}{r} \left( -0.6932 + 0.0048e^{\frac{-\tau}{10}} - 1.2507e^{\frac{-4\tau}{10}} + 4.2530e^{\frac{-7\tau}{10}} - 3.4698e^{-\tau} \right)$$

$$\sigma_{rr}(r, t) \Big|_{\theta=0, \gamma=\frac{\pi}{6}} = \frac{P_0}{r} \left( -1.2296 - 0.0018e^{\frac{-\tau}{10}} + 0.5079e^{\frac{-4\tau}{10}} - 1.2373e^{\frac{-7\tau}{10}} + 1.1269e^{-\tau} \right)$$

Значения  $C_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$  при разных  $\theta$  представлены в таблицах 1 и 2. В случаях 3, а) и 3, б) соответственно имеем

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{-P \cos^m \theta}{r} (4.6875 \theta \sin \gamma + 0.9375 \cos \gamma), \quad m = \frac{1}{v_1} = 5,$$

$$\sigma_{rr} = -P \sin \gamma / (\pi r), \quad m = -1$$

Отметим следующий интересный результат. Число  $n^2 = (1 + m)(1 - mv)$  положительно или отрицательно в зависимости от  $m$ , поэтому при разных  $m$  реализуются различные случаи поведения напряжения. Действительно (фиг. 6),

$$-\infty < m < -1 \rightarrow n^2 < 0, \text{ случай 2)}$$

$$-1 < m < 2 \rightarrow n^2 > 0, \text{ случай 1)}$$

$$m = -1 \rightarrow n^2 = 0, \text{ случай 3, б)}$$

$m \geq 2 \rightarrow n^2$  может принимать положительное, отрицательное либо нулевое значение.

Следовательно, при  $m \geq 2$  может существовать момент, когда решение с течением времени переходит от одного режима поведения к другому (от одного из случаев к другому). Этот момент находится непосредственно из уравнения

$$\frac{1}{m} > v = \frac{1 - \omega}{2 + \omega} = \frac{3}{2} g_{1/2}(t) - 1$$

или с использованием (12):

$$\frac{1}{m} > \frac{2 - a + b - a^2 - ba - 3be^{\frac{-t(2+a)a}{2+a+b}}}{(2+a+b)(2+a)}$$

Таблица 1

$\theta$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
0	11.78997	-3.85540	-0.000538	-14.88570	2.50145
10	12.16107	-4.03995	-0.000564	-15.54730	2.62390
20	6.62525	-2.39185	-0.000336	-9.07294	1.56198
30	-1.63615	0.14736	0.000017	0.78358	-0.07808
40	-8.11577	2.21416	0.000306	8.66209	-1.41981
50	-9.88079	2.88704	0.000403	11.03708	-1.87178
60	-7.25445	2.20600	0.000313	8.22056	-1.45523
70	-3.13420	1.00164	0.000147	3.57144	-0.68915
80	-0.50258	0.18045	0.000029	0.57401	-0.14140
90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Таблица 2

$\theta$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
0	-4.63465	1.25213	0.000203	4.33057	-1.01589
10	-5.74242	1.52009	0.000243	5.28306	-1.20644
20	-5.98797	1.48592	0.000230	5.23497	-1.11128
30	-4.93330	1.03425	0.000149	3.74767	-0.68759
40	-2.32245	0.12474	0.0000036	0.60849	0.29523
50	1.52282	-1.09303	-0.000178	-3.73560	0.88311
60	5.28932	-2.17233	-0.000328	-7.72946	1.56009
70	6.67803	-2.40481	-0.000350	-8.74881	1.63325
80	3.82085	-1.29200	-0.000183	-4.78434	0.84845
90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Решая неравенство, получим

$$t^* < \frac{2+a+b}{\alpha(2+a)} \ln \left| \frac{3mb}{(m-ta-2-a)(2+a+b)} \right| \quad (14)$$

т.е. для  $m \geq 2$  при  $t < t^*$  напряжение  $\sigma_{rr}$  подчиняется случаю 1), при  $t = t^*$  – случаю 3, а), при  $t > t^*$  – случаю 2).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Мир, 1981.
2. Lekhnitskii, S.G. Anisotropic plates. London: Gordon and Breach, 1968.
3. Allam M.N.M., Zenkour A.M. Radial stress distribution in a continuously non-homogeneous viscoelastic half-plane // First Arabic Conf. of Math., Amman. Applied Science University.
4. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
5. Allam M.N.M., Ghaleb A.F. Torsion of Composite Viscoelastic Prismatic Bar of Rectangular Cross-section // Appl. Mathem. modeling. V. 6. 1982.