

© 2005 г. В.Э. АПЕТЬЯН, Д.Л. БЫКОВ

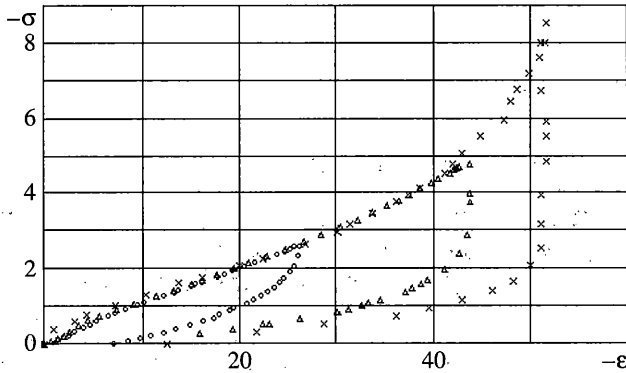
## **СТРУКТУРНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОДНООСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ СЖАТИИ И РАЗГРУЗКЕ ВЯЗКОЭЛАСТИЧНОГО МАТЕРИАЛА**

Рассматриваются результаты экспериментов, проведенных на образцах из вязкоэластичного материала при постоянных скоростях деформаций сжатия и разгрузки. Разгрузки начинались при разных уровнях деформаций сжатия. Представлены зависимости условных и истинных напряжений от линейных мер деформаций. Используя нелинейную эндохронную теорию стареющих вязкоупругих материалов [1] и заменяя условные напряжения истинными, проводился структурно-энергетический анализ напряженных состояний при активных нагружениях и разгрузках. Сравнение величин структурных составляющих удельной работы внутренних сил, вычисленных при условных и истинных напряжениях, показало, что физически более содержательными являются те, в которых вводились истинные напряжения.

Хорошее совпадение теоретических и опытных зависимостей напряжений от линейных мер деформаций порядка 50% показало, что умеренные конечные деформации можно описывать с помощью линейных мер деформаций при соответствующем учете физической нелинейности материалов. Это обстоятельство целесообразно принимать во внимание в расчетах при использовании различных мер конечных деформаций. Одновременно было установлено, что начальный модуль разгрузки вязкоэластичных материалов зависит от уровня деформаций в момент начала разгрузки, что должно учитываться, например, при вычислении модуля Кармана для определения критического напряжения сжатого стержня.

**1. Введение.** Использование вязкоэластичных материалов в различных отраслях техники поставило перед специалистами в области прочности конструкций сложные задачи, связанные прежде всего с определением законов, позволяющих выражать напряжения через деформации при различных процессах термосилового нагружения, включая разгрузку. Эти законы должны представляться в виде, допускающем практическую разрешимость краевых и начальных задач соответствующих нелинейных теорий термовязкоупругости, а также удобные формулировки согласующихся с опытами критериев разрушения и накопления повреждений материалов при сложных процессах нагружения.

Первые результаты применительно к резиноподобным эластичным материалам были получены в рамках нелинейной теории упругости. Они позволяли хорошо описывать деформирование материалов при активных процессах нагружения, используя подходящие упругие потенциалы. Однако при одновременном учете активных и пассивных процессов деформирования возникла необходимость использования теории вязкоупругости в сочетании с аппаратом нелинейной теории упругости. Широкое распространение получили сертифицированные программы числовых расчетов, позволяющие определять напряженно-деформированное состояние полимерных конструкций



Фиг. 1

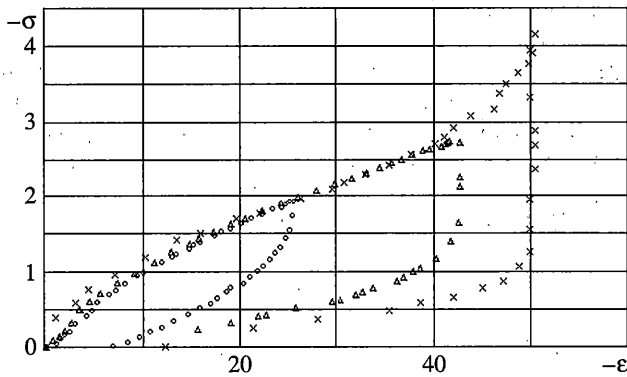
в рамках принятых моделей, являющихся комбинациями нелинейных теорий упругости и вязкоупругости.

Разнообразие полимерных материалов, их структуры, включая влияние технологических процессов изготовления, делают сопротивление таких материалов зависящим от многих параметров механической, физической и химической природы. В результате при различных процессах нагружения могут проявляться механизмы деформирования, чувствительные именно к этим процессам. При большом числе таких механизмов описание физических свойств наполненных полимерных материалов становится затруднительным, поэтому на практике заранее определяются те режимы нагружений, при которых должны эксплуатироваться конструкции. И соответственно этому используются соотношения, связывающие напряжения и деформации, хорошо согласующиеся с данными опытов при выбранных процессах нагружения. Очевидно, что необходимость учета дополнительных условий эксплуатации может приводить к усложнению определяющих соотношений.

Здесь будет рассмотрен некоторый подход к построению физически нелинейных соотношений для эластичных материалов, обладающих вязкостью, которые в отличие от термина “вязкоупругие” будем называть “вязкоэластичными”, подчеркивая этим, что в процессах нагружения могут появляться конечные деформации.

**2. Результаты экспериментов на осевое сжатие и разгрузку образцов вязкоэластичного материала.** Для исследования физических свойств саженной резины на основе гидрированного нитрильного каучука проводились опыты на сжатие с разгрузкой трех высокоэластичных круговых дисков, имеющих следующие величины диаметра  $d$  и высоты  $h$ :  $d_1 = 28.3$  мм,  $h_1 = 12.25$  мм;  $d_2 = 28.8$  мм,  $h_2 = 12.2$  мм;  $d_3 = 28.3$  мм,  $h_3 = 12.2$  мм. В недеформированном состоянии для каждого диска замерялась скорость звука вдоль оси сжатия. Их значения были соответственно равны:  $V_1 = 1465$  м/с,  $V_2 = 1498$  м/с,  $V_3 = 1512$  м/с. Сжатие всех образцов проводилось с постоянной скоростью деформации  $\dot{\epsilon} = -5.8\%/мин$ , а разгрузка — с постоянной скоростью деформации  $\dot{\epsilon} = +5.8\%/мин$ . Время перехода от сжатия к разгрузке составляло 0.4–0.5 с. Разгрузка начиналась при достижении в первом образце деформации сжатия  $\epsilon = -26\%$ , во втором образце  $-44\%$  и в третьем образце  $-52\%$ . Таким образом, разгрузки начинались при достижении конечных деформаций.

Результаты экспериментов представлены в виде зависимостей условных  $\sigma_e$  (фиг. 1) и истинных  $\sigma_i$  (фиг. 2) напряжений, выраженных в МПа, от линейных мер деформаций  $\epsilon$ , выраженных в %. Последние вычислялись как отношения сокращений высоты



Фиг. 2

диска к его первоначальной высоте, т.е. так, как это делается при малых деформациях. Условные напряжения определялись без учета деформации поперечного сечения образца, а истинные – с учетом этой деформации. Поскольку в приведенных экспериментах поперечные деформации не измерялись, материал условно принимался несжимаемым при всех деформациях. В этом случае изменение площади поперечного сечения выражается только через  $\epsilon$  и между истинными и условными напряжениями имеется зависимость

$$\sigma_t = \sigma_e(1 + \epsilon) \quad (2.1)$$

Очевидно, что допущение о несжимаемости материала позволяет находить нижнюю оценку для истинных сжимающих напряжений и их максимальное отличие от условных напряжений. При наличии экспериментально полученной зависимости  $\sigma_e$  от  $\epsilon$  однозначно строится зависимость  $\sigma_t$  от  $\epsilon$ , следовательно, кривые, изображенные на фиг. 1 и 2, равноценны. Результаты экспериментов показаны светлыми точками, треугольниками и косыми крестами соответственно для первого, второго и третьего образцов. Видно, что на активном участке сжимающего нагружения все экспериментальные значения напряжений удовлетворительно ложатся на общую кривую, а кривые разгрузок, полученные на трех образцах, имеют отличие по характеру наклона и уровню падения напряжений при одинаковых деформациях.

Рост начального угла наклона кривых разгрузок и перепада напряжений при одинаковых деформациях между кривыми активного и пассивного нагружений наблюдается по мере роста деформаций, достигаемых в момент начала разгрузки. Этот эффект имеет место не только при сжатии, но и при растяжении образцов с постоянными скоростями деформаций, когда разгрузки начинаются при деформациях близких к разрушающим [2]. Быстрое и значительное падение напряжений сразу после начала разгрузки указывает на накопление в материале повреждений, снижающих его прочность, поэтому для объяснения такого явления требуется проведение специального анализа на основе теории, описывающей повреждаемость материалов.

Чтобы проверить обратимость во времени остаточных деформаций, после завершения указанных испытаний каждый из трех образцов дополнительно подвергался повторному сжатию и разгрузке. Скорости деформаций сжатия и разгрузки оставались такими же, как при первых испытаниях. Максимальные напряжения, достигавшиеся при повторных испытаниях, составляли: для первого образца  $-2.27$  МПа, для второго  $-4.7$  МПа, для третьего  $-6$  МПа. Соответственно максимальные деформации

в моменты начала второй разгрузки были: для первого образца –26.3%, для второго –49.7%, для третьего –51.3%.

Поскольку поврежденность образцов после проведения дополнительных испытаний была выше, чем после первых испытаний, наблюдать замедленную обратимость остаточных деформаций было легче. После завершения повторных испытаний проводились замеры диаметров и высот каждого из образцов спустя 2 мин, 24 часа и 60 суток после окончания опытов, а также соответствующих этим временам скоростей звука в осевом направлении дисков. Результаты замеров приведены в таблице.

№ образца	2 мин			24 часа			60 суток		
	$h$ , мм	$d$ , мм	$V$ , м/с	$h$ , мм	$d$ , мм	$V$ , м/с	$h$ , мм	$d$ , мм	$V$ , м/с
1	11.8	29.1	1463	11.9	28.9	1463	12.1	28.7	1463
2	11.4	29.9	1438	11.65	29.7	1451	11.8	29.1	1452
3	10.6	29.8	1477	11.4	29.1	1490	11.6	29.1	1495

Эти результаты позволяют судить о скорости восстановления внутренней структуры материала с течением времени, что имеет значение для оценки достоверности проводимого ниже теоретического анализа.

**3. Теоретическое описание результатов экспериментов.** Полученные опытным путем зависимости напряжений от деформаций при сжатии и последующей разгрузке описывались на основе нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоэластичных материалов. Ранее эта теория применялась при различных процессах нагружения, вызывающих малые деформации. Здесь исследовалась возможность распространения указанной теории и на конечные, ограниченные некоторыми пределами, деформации.

В проведенных экспериментах замерялись только осевые напряжения и деформации, поэтому для аппроксимации представленных результатов достаточно было использовать одномерный вариант теоретической зависимости условных или истинных напряжений от деформаций. В случае условных напряжений этот одномерный вариант нелинейной теории может быть записан в виде [1]:

$$\sigma_e(t) = \varphi(t) \int_0^t R(t_*(t) - t_*(\tau)) d\varepsilon(\tau) \quad (3.1)$$

где  $R(t)$  – ядро релаксации,  $\varphi(t)$  – функция старения,  $f(t)$  – функция вязкости,  $t_*(t)$  – приведенное время, связанное с  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  зависимостью  $dt_*(t)/dt = \varphi(t)/f(t)$ .

Истинные напряжения выражаются через деформации согласно формулам (2.1) и (3.1) следующим образом:

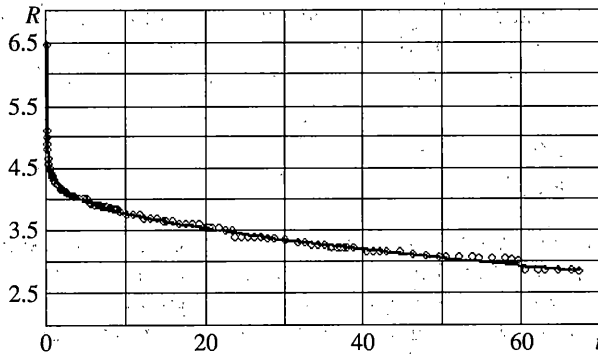
$$\sigma_i(t) = (1 + \varepsilon(t)) \varphi(t) \int_0^t R(t_*(t) - t_*(\tau)) d\varepsilon(\tau) \quad (3.2)$$

Если ввести новые обозначения

$$\varphi_u(t) \equiv \varphi(t)(1 + \varepsilon(t)), \quad f_u(t) = f(t)(1 + \varepsilon(t)), \quad dt_u(t)/dt = \varphi_u(t)/f_u(t) = \varphi(t)/f(t) \quad (3.3)$$

то формула (3.2) может быть записана в виде

$$\sigma_i(t) = \varphi_u(t) \int_0^t R(t_u(t) - t_u(\tau)) d\varepsilon(\tau) = \varphi_u(t) \int_0^t R(t_*(t) - t_*(\tau)) d\varepsilon(\tau) \quad (3.4)$$



Фиг. 3

Таким образом, в рассматриваемой нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоэластичных материалов учет истинных напряжений производится путем формальной замены функций  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  на  $\varphi_u(t)$  и  $f_u(t)$  соответственно.

Для применения указанной теории необходимо знать три материальные функции:  $R(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $f(t)$ . Из них первая функция определялась из опыта на релаксацию исследуемого материала при малом уровне деформаций сжатия:  $\varepsilon = -1.13\%$ .

Экспериментальная зависимость ядра релаксации  $R(t)$  [МПа] от времени  $t$  [мин] показана на фиг. 3 светлыми точками. Она аппроксимировалась суммой убывающих экспоненциальных функций согласно алгоритму, изложенному в [3], и имела следующее выражение:

$$R(t) = 1.27 + 30.5e^{-772.8t} + 0.38e^{-45.5t} + 0.45e^{-5.8t} + 0.36e^{-0.58t} + 2.4e^{-6.7 \cdot 10^{-3}t} + 0.25e^{-0.01t} + 0.2e^{-0.03t} + 0.04e^{-10^{-4}t} \quad (3.5)$$

Видно, что аналитическое представление (3.5), изображенное сплошной линией на фиг. 3, хорошо согласуется с данными опытов.

В отличие от ядра  $R(t)$ , зависящего только от времени, две другие материальные функции могут зависеть от инвариантов напряженно-деформированного состояния и структурных составляющих удельной работы внутренних сил, т.е. быть сложными функциями времени. Конкретное представление функций  $\varphi(t)$  и  $f(t)$ , с помощью которых описывались опыты на ползучесть, релаксацию и растяжение с постоянными скоростями малых деформаций показало, что основными аргументами указанных функций при одноосном напряженно-деформированном состоянии являются деформация и удельная рассеянная энергия [1, 2, 4, 5].

Зависимость функций старения и вязкости от этих аргументов представлялась с помощью убывающих экспоненциальных функций, показатели которых являлись линейными комбинациями деформаций и удельной рассеянной энергии. Коэффициенты при названных аргументах зависели от скоростей деформаций. Во всех перечисленных опытах, проводившихся с высоконаполненными полимерными материалами, деформации оставались малыми. Указанное представление функций  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  сохранялось при активных процессах деформирования, когда деформации оставались неубывающими. В тех случаях, когда, невзирая на рост деформаций, напряжения начинали убывать, что свидетельствовало о начале процесса предразрушения, требовалось выделение удельной поглощенной энергии, являющейся составной частью удельной рассеянной энергии [5].

Существенное изменение представления функций вязкости происходило в тех опытах, когда имела место разгрузка по деформациям, т.е. сжимающие деформации начинали убывать. В таких случаях в виде дополнительных множителей в функции  $f(t)$  вводились функции вида

$$f_2(t) = \gamma + (1 - \gamma) \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{\max}} \right)^m \quad (3.6)$$

где  $\varepsilon_{\max} = \max \varepsilon(s)$  при  $0 \leq s \leq t$ ,  $\gamma$  и  $m$  – положительные величины, в общем случае зависящие от скоростей деформаций и удельной поглощенной энергии [2]. Следует заметить, что при активных процессах деформирования функция  $f_2(t)$  обращается в единицу независимо от величин  $\gamma$  и  $m$ . Таким образом, функция  $f_2(t)$  специально выбиралась так, чтобы учитывать эффект деформационной разгрузки материала. Разумеется, любые из принятых аппроксимаций функций  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  выбирались из условий наилучшего приближения с заданной точностью опытных результатов и в общем случае могли быть улучшены.

В рассматриваемых опытах на сжатие с разгрузкой вязкоэластичного материала наблюдались характерные отличия от ранее описанных зависимостей напряжений от деформаций. А именно: здесь реализовывалось не растяжение, а сжатие с изменением знака кривизны на кривых “напряжение – деформация”. Кроме того, в опытах на сжатие достигались конечные, хотя и ограниченные, деформации. По этой причине можно было заранее предполагать усложнение зависимостей  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  от их аргументов.

В частности, в показателях экспоненциальных функций помимо линейных вводились нелинейные функции деформаций, что позволяло учитывать их конечные величины. Дополнительное усложнение было введено в функцию  $\varphi(t)$  путем использования в ней функции  $\varphi_2(t)$ , аналогичной функции  $f_2(t)$ . Это делалось из-за необходимости учитывать почти мгновенное и значительное падение напряжений в момент начала разгрузок при конечных деформациях. Таким образом, изменение аналитических представлений функций старения и вязкости было непосредственно связано с изменением характерных признаков экспериментальных зависимостей напряжений от деформаций.

Руководствуясь изложенными соображениями и проводя численный анализ выбора коэффициентов, входящих в функции  $\varphi(t)$  и  $f(t)$  при возрастающих и убывающих деформациях, были найдены следующие представления функций  $\varphi(t)$  и  $f(t)$ , используемых для описания условных напряжений:

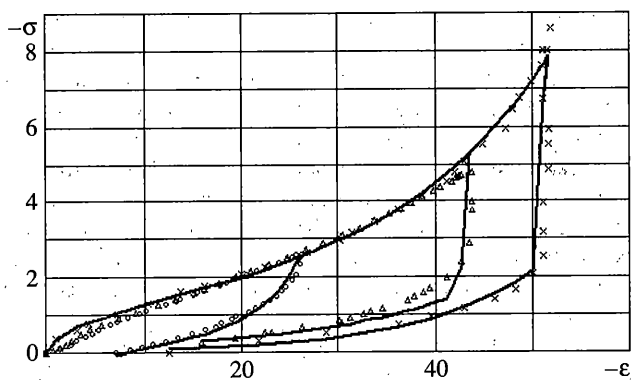
$$\varphi(t) = \left( \gamma_p + (1 - \gamma_p) \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{\max p}} \right)^{m_p} \right) \exp \left( -1.3 \cdot 10^{-2} A_*(t) + \alpha \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right) \right) \quad (3.7)$$

$$f(t) = \left( \xi_p + (1 - \xi_p) \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_{\max p}} \right)^{n_p} \right) \exp \left( -2.29 \cdot 10^{-2} A_*(t) + \alpha \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right) \right) \quad (3.8)$$

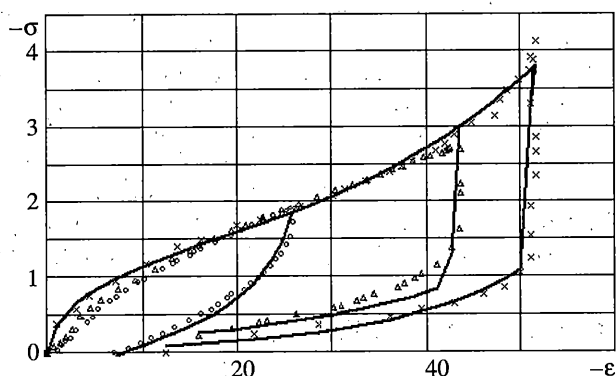
$$\alpha \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right) = 2.5 \cdot 10^{-7} \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right) - 5.3 \cdot 10^{-6} \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right)^{9.1 \cdot 10^{-4}} + 4.75 \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right)^{2.6 \cdot 10^{-6}} - 3.35 \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right)^{0.13} + 8.7 \cdot 10^{-3} \left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_s} \right)^2 \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_s = -4.4\% \quad (p = 1, 2, 3)$$

Здесь  $A_*(t)$  – величина удельной рассеянной энергии, выраженная в МПа; Значения  $p$  соответствуют кривым, изображенным на фиг. 1 и относящимся к первому, второму и третьему образцам:



Фиг. 4



Фиг. 5

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 1, \quad m_1 = 1, \quad \varepsilon_{1\max} = -26\% \\ \gamma_2 = 0.523, \quad m_2 = 1.554, \quad \varepsilon_{2\max} = -44\% \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = 0.222, \quad m_3 = 2.23, \quad \varepsilon_{3\max} = -52\% \\ \xi_1 = 0.0065, \quad n_1 = 230, \quad \varepsilon_1 = -26\% \\ \xi_2 = 1.04 \cdot 10^{-5}, \quad n_2 = 377.3, \quad \varepsilon_2 = -44\% \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\xi_3 = 0.0065, \quad n_3 = 230, \quad \varepsilon_3 = -52\%$$

Полученные величины  $\gamma_p, \xi_p, m_p, n_p$  учитывают влияние удельной рассеянной энергии на функции  $\varphi_2(t)$  и  $f_2(t)$ . Пользуясь приведенными представлениями  $R(t), \varphi(t), f(t)$  в виде (3.5), (3.7)–(3.11), по формуле (3.1) строились теоретические значения условных напряжений  $\sigma_e(t)$  на активных и пассивных участках деформирования. Эти зависимости для каждого из трех видов образцов приведены сплошными линиями на фиг. 4. Аналогичные выражения функций  $\varphi_u(t)$  и  $f_u(t)$  по формуле (4) использовались для вычисления истинных напряжений  $\sigma_i(t)$ . Соответствующие теоретические зависимости  $\sigma_i(t)$  от деформаций показаны сплошными линиями на фиг. 5.

Экспериментальные значения  $\sigma_e(t)$  и  $\sigma_i(t)$  показаны на фиг. 4 и 5 так же, как и на фиг. 1 и 2. Из фиг. 4 и 5 видно, что теоретические и экспериментальные величины ус-

ловных и истинных напряжений хорошо согласуются между собой для всех испытанных образцов. Это свидетельствует о возможности применять нелинейную эндохронную теорию стареющих вязкоэластичных материалов для описания конечных деформаций рассматриваемого типа полимеров по крайней мере до деформаций 50% включительно, как при активном деформировании, так и при разгрузке.

**4. Структурно-энергетический анализ полученных результатов.** Теоретическое описание результатов экспериментов, приведенное выше, позволяет идентифицировать механические характеристики нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоэластичных материалов применительно к рассматриваемым процессам деформирования. Здесь показывается, что в рамках указанной теории при ограниченных конечных деформациях можно получить дополнительную информацию об изменении во времени напряженно-деформированного состояния образцов.

Идея, лежащая в основе анализа, приводящего к новой информации, предусматривает построение инвариантных функционалов, обладающих определенными физическими признаками. Чем больше таких функционалов имеется в распоряжении исследователей, тем больше знаний о процессах деформирования можно получить, изучая изменение функционалов во времени. В [1, 4] было показано, как, разлагая удельную работу внутренних сил на ее структурные составляющие, можно в общем случае получить сведения о мгновенной и замедленной обратимости, а также необратимости изменения внутренней структуры материала, о его старении и работе среднего напряжения на объемной температурной деформации. При указанных разложениях использовались обобщенные модели Максвелла и Кельвина – Фойгта.

Ограничиваясь одномерным напряженно-деформированным состоянием, можно представить удельную работу внутренних сил  $A(t)$  в виде суммы четырех слагаемых

$$A(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\varepsilon(\tau) = A_e(t) + A_v(t) + A_*(t) + A_c(t)$$

$$A_e(t) = \frac{\sigma^2(t)}{2R(0)\varphi(t)} \quad (4.1)$$

$$A_v(t) = \frac{\varphi(t)}{2} \iint_{00}^{tt} R(2t_*(t) - t_*(\tau_1) - t_*(\tau_2)) d\varepsilon(\tau_1) d\varepsilon(\tau_2) - A_e(t)$$

$$A_*(t) = - \int_0^t \frac{\varphi^2(\tau)}{f(\tau)} \iint_{00}^{\tau\tau} R'(2t_*(\tau) - t_*(\tau_1) - t_*(\tau_2)) d\varepsilon(\tau_1) d\varepsilon(\tau_2) d\tau$$

$$R'(x) \equiv dR(x)/dx \quad (4.2)$$

$$A_c(t) = -\frac{1}{2} \iiint_{000}^{t\tau\tau} R(2t_*(\tau) - t_*(\tau_1) - t_*(\tau_2)) d\varepsilon(\tau_1) d\varepsilon(\tau_2) d\varphi(\tau)$$

Здесь  $A_e(t)$  – удельная мгновенно обратимая (упругая) энергия,  $A_v(t)$  – удельная замедленно обратимая (вязкоупругая) энергия,  $A_*(t)$  – удельная необратимая (рассеянная) энергия,  $A_c(t)$  – удельная энергия старения.

В выражении (4.1) отсутствует пятое слагаемое, учитывающее удельную работу среднего напряжения на объемной температурной деформации, так как описываемые опыты проводились при температуре 30°C, принимавшейся за равновесную.

Физический смысл выражений (4.2) выясняется при анализе их изменений в процессах активного и пассивного деформирования материала. При обращении в нуль в не-



который момент времени напряжения  $\sigma(t)$  величина  $A_e(t)$  обращается в нуль в тот же момент времени. Поэтому  $A_e(t)$  можно назвать “мгновенно обратимой” удельной энергией.

Функционал  $A_v(t)$  обладает свойством асимптотического убывания во времени, если, начиная с некоторого момента, напряжение остается равным нулю [1, 4]. По сравнению с  $A_e(t)$  функционал  $A_v(t)$  можно назвать “замедленно обратимой” удельной энергией, хотя, как это показывается ниже, скорость убывания  $A_v(t)$  может при определенных условиях значительно возрасть, оставаясь конечной величиной.

Функционал  $A_*(t)$  – неубывающая функция времени, поскольку ее производная  $W_*(t) \equiv dA_*(t)/dt$  неотрицательна при любых процессах нагружения или разгрузки материала. С ее помощью удобно описывать процессы, связанные с рассеянием тепла и необратимым изменением внутренней структуры материала. Последнее происходит при превышении мощностью  $W_*(t)$  некоторого порогового значения  $W_s$  [1, 5]. Эта структурная составляющая удельной работы внутренних сил называется удельной “поглощенной” энергией и обозначается  $A_a(t)$ .

Функционал  $A_c(t)$  обращается в нуль при любом напряженно-деформированном состоянии, если функция  $\phi(t)$ , связанная с изменением упругих модулей, входящих в обобщенные модели Максвелла и Кельвина – Фойгта, остается постоянной величиной. Поскольку величины указанных модулей могут рассматриваться как показатели старения материала (действительно, полимерные материалы могут становиться более жесткими, например из-за процессов полимеризации, т.е. возникновения дополнительных химических связей между молекулами, не связанных с их нагружением, или из-за процессов диффузии пластификаторов), то функция  $\phi(t)$  называется функцией “старения”, а функционал  $A_c(t)$ , соответственно, – удельной энергией “старения”.

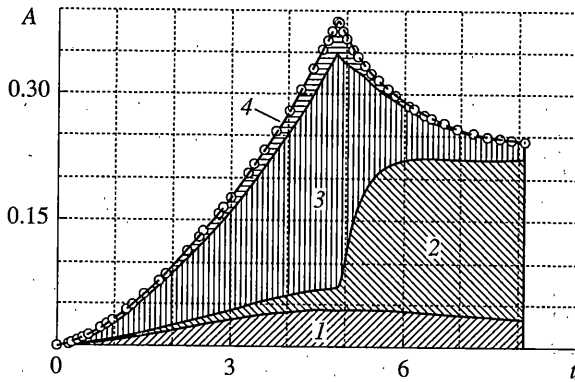
В отличие от неотрицательных величин  $A_e(t)$ ,  $A_v(t)$ ,  $A_*(t)$  – функционал  $A_c(t)$  может менять знак: становится положительной или отрицательной величиной в зависимости от знака производной  $\dot{\phi}(t) \equiv d\phi(t)/dt$ .

Анализ изменения во времени перечисленных структурных составляющих удельной работы внутренних сил представляет практический интерес, так как, например, по величинам  $A_e(t)$  и  $A_v(t)$  можно судить о соотношении удельных энергий несамоуравновешенного ( $A_e(t)$ ) и самоуравновешенного ( $A_v(t)$ ) напряженных состояний, оказывающих влияние на кратковременную и длительную прочность материала.

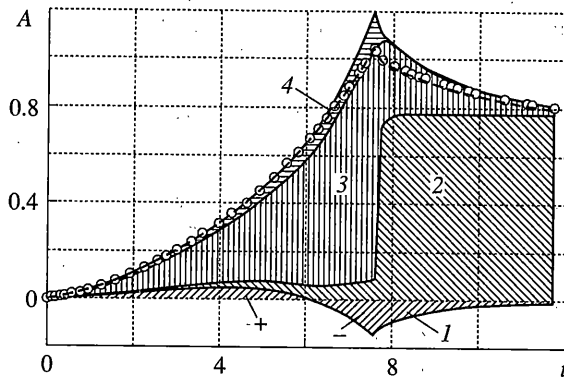
Изменение во времени величины  $A_*(t)$  позволяет оценивать наиболее опасные моменты деформирования, сопровождающиеся (при  $W_*(t) > W_s$ ) накоплением повреждений в материале – возникновением необратимого изменения его внутренней структуры. И наконец, изменение функционала  $A_c(t)$  при его отрицательном значении (когда  $\dot{\phi}(t) > 0$ ) указывает на появление дополнительных связей между молекулами вязкоэластичного материала. Эти связи могут возникать или из-за химических реакций, о которых говорилось выше, или иметь чисто механическую природу, в частности, так происходит при конечных сжимающих деформациях.

Величины структурных составляющих удельной работы внутренних сил зависят от конкретных законов связи напряжений и деформаций, поэтому они различаются при выборе условных или истинных напряжений. В первом случае их определяют по формулам (4.2), а во втором – в этих формулах функции  $\phi(t)$  и  $f(t)$  заменяются на  $\phi_u(t)$  и  $f_u(t)$  соответственно. При сжимающих напряжениях и деформациях для одних и тех же моментов времени  $A(t)$  оказывается меньше, если используются истинные напряжения, по сравнению со значением  $A(t)$  при условных напряжениях.

На фиг. 6–8 приведены графические изображения  $A(t)$  (светлые точки), а также  $A_e(t)$ ,  $A_v(t)$ ,  $A_*(t)$ ,  $A_c(t)$  – при условных напряжениях (области 1–4 соответственно). Аналогичные изображения при истинных напряжениях приведены на фиг. 9–11. Во всех



Фиг. 6



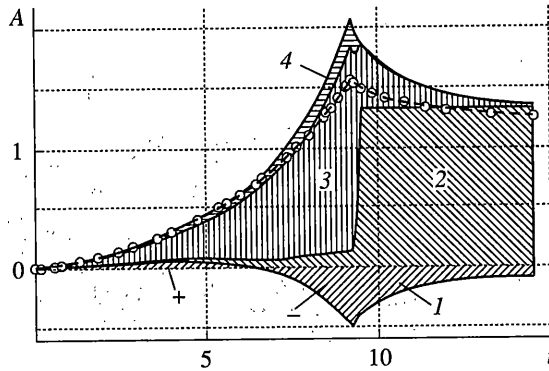
Фиг. 7

случаях указанные величины измеряются в МПа, а время  $t$  – в минутах. Для каждого момента времени величина структурной составляющей удельной работы внутренних сил определяется разностью между верхними и нижними ординатами области, имеющей соответствующий цифровой индекс.

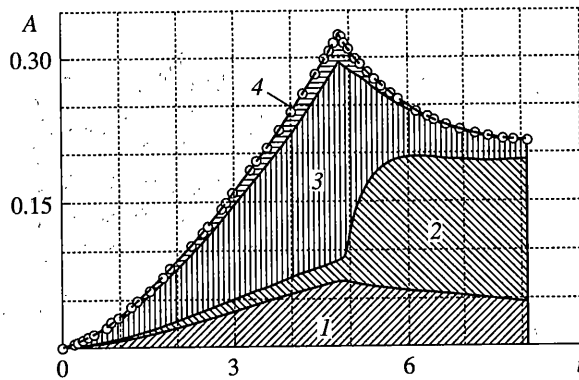
На фиг. 6 и 9 показаны графические изображения  $A(t)$  и ее структурные составляющие для первого образца ( $\epsilon_{\max} = -26\%$ ), на фиг. 7 и 10 – для второго образца ( $\epsilon_{\max} = -44\%$ ) и на фиг. 8 и 11 – для третьего образца ( $\epsilon_{\max} = -52\%$ ). Можно заметить характерные различия величин  $A_c(t)$ ,  $A_v(t)$ ,  $A_*(t)$ ,  $A_c(t)$ , изображенных на этих фигурах.

Прежде всего, обращает внимание изменение знака удельной энергии старения  $A_c(t)$ , наблюдаемое при условных напряжениях в опытах со вторым и третьим образцами (фиг. 7 и 8). При использовании истинных напряжений (фиг. 10 и 11) функционал  $A_c(t)$  остается положительным, хотя его изменение во времени также происходит не монотонно. Заметим, что при наименьших конечных деформациях сжатия (до  $-26\%$ ) (фиг. 6 и 9) изменение знака  $A_c(t)$  при условных напряжениях не происходит, т.е. и при условных, и при истинных напряжениях  $A_c(t)$  остается положительной величиной.

Факт изменения знака удельной энергии старения связан с изменением функции  $\phi(t)$ : при  $\phi(t) < 0$ ,  $A_c(t) > 0$  (деструкция материала), а при  $\phi(t) > 0$ ,  $A_c(t) < 0$  (ужесточение материала). Рост функции  $\phi(t)$  соответствует росту секущего модуля на кривой за-



Фиг. 8

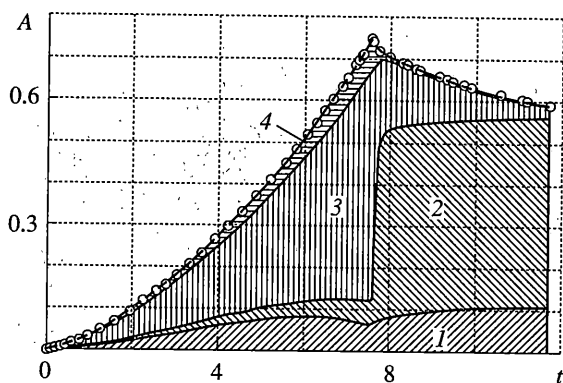


Фиг. 9

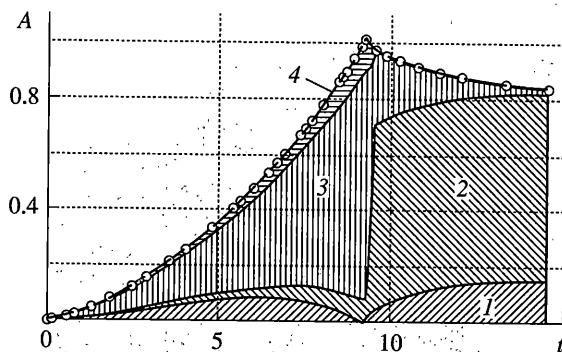
висимости  $\sigma$  от  $\varepsilon$ , а ее уменьшение – убыванию этого модуля. В опытах на растяжение образцов обычно наблюдается уменьшение  $\phi(t)$ , а в производившихся опытах на сжатие уменьшение  $\phi(t)$  наблюдалось лишь при очень малых деформациях, после чего начинался рост этой функции, тем больший, чем больше были деформации сжатия (фиг. 1 и 2). Совпадение знака функции  $\phi(t)$  при малых деформациях растяжения и сжатия указывает на существование малой области этих деформаций, в которой для вязкоэластичных материалов остается справедливым закон линейной теории Больцмана – Вольтерра.

Следствием из установленного факта является принципиальная возможность получения совпадающих между собой ядер  $R(t)$  из опытов на растяжение и сжатие, если в них оставлять постоянными достаточно малые деформации.

Поскольку изменение знака производной  $\phi(t)$  наблюдалось при использовании и условных, и истинных напряжений (фиг. 1, 2), в каждом из этих случаев функционал  $A_c(t)$  менялся немонотонно. Однако важным является то обстоятельство, что при истинных напряжениях величина  $A_c(t)$  оставалась положительной, что не соответствовало существенному увеличению жесткости материала вплоть до окончания опытов. Важность этого связана с тем, что рост жесткости материала обычно объясняется причинами немеханических воздействий на него (химических или физических), между тем в проведенных опытах таких воздействий не было. При больших деформациях од-



Фиг. 10



Фиг. 11

ноосного сжатия происходило очевидное уплотнение материала и некоторое тепловыделение, в результате чего между его молекулами могли возникать дополнительные связи, однако более слабые, чем это бывает при полимеризации, сопровождающейся длительным и значительным нагревом материала.

Таким образом, можно предполагать, что убывание функционала  $A_c(t)$  связывается не только с внешними, но и внутренними процессами тепловыделения. Это приводит к необходимости решать связанные задачи термовязкоэластичности. Между тем такая усложненная постановка задачи, как видно из проведенного анализа, вытекает в тех случаях, когда используются условные напряжения. В то же время, если в законах нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоэластичных материалов применять истинные напряжения, то по крайней мере в рассматриваемой области изменения конечных сжимающих деформаций (до  $-50\%$ ) в подобном усложнении постановки задач нет необходимости. Поэтому целесообразно применение истинных напряжений при анализе сопротивления материалов с ограниченными конечными деформациями.

Заметим, что, невзирая на отрицательное значение функционала  $A_c(t)$ , при некоторых временах деформирования, соответствующее суммарное значение удельной работы внутренних сил  $A(t)$  при условных напряжениях остается больше аналогичного значения  $A(t)$  при истинных напряжениях. Это видно из графиков на фиг. 7, 8, 10, 11, а также вытекает из ранее проводившегося анализа. Контроль точности определения  $A(t)$  проводился сравнением расчетов, выполненных при суммировании структурных

составляющих удельной работы внутренних сил и при непосредственном вычислении интеграла в формуле (4.1). Разница соответствующих значений  $A(t)$ , была меньше 1%.

Вторым результатом, достойным быть отмеченным, является характер изменения величин  $A_v(t)$  и  $A_*(t)$  в момент начала разгрузок. На фиг. 7, 8, 10, 11 видно резкое падение  $A_v(t)$  и столь же резкое возрастание  $A_*(t)$  при переходе от активного сжимающего деформирования к разгрузке. Далее величина  $A_*(t)$  незначительно возрастает, меняясь в ограниченных пределах.

Анализ этого явления проводился двумя способами: физическим и математическим. Вначале анализировалось изменение  $A_v(t)$ . Ранее отмечалось, что замедленно обратимая удельная энергия  $A_v(t)$  соответствует самоуравновешенному напряженному состоянию. При падении напряжений деформация эластичного связующего начинает соответственно убывать, встречая сопротивление ранее отслоившегося от него наполнителя. Чем дольше продолжалось активное деформирование, тем больше оказывалось отслоение наполнителя. В результате наблюдается обратная ползучесть, в ходе которой наполнитель из-за сокращения деформаций связующего медленно возвращается в свое исходное положение. В течение всего времени деформирования реакция наполнителя направлена против усилий со стороны связующего. Следовательно, в момент, предшествующий началу разгрузки, реакция наполнителя препятствовала активному деформированию материала. Поэтому в тот момент, когда началась кинематическая разгрузка (в опытах изменялся знак скорости деформации), из-за инерции процесса соприкосновения наполнителя наступал короткий период времени, когда напряженное состояние из самоуравновешенного превращалось в несамоуравновешенное. А последнее, как это следует из примера мгновенного снятия удельной упругой энергии  $A_e(t)$  при снятии напряжения, начинает быстро уменьшаться.

Итак, наблюдаемый эффект быстрого уменьшения  $A_v(t)$  связан с кратковременным переходом части самоуравновешенного напряженного состояния материала в несамоуравновешенное. Этот переход осуществляется в течение малого времени, пока изменяющая свое направление реакция со стороны наполнителя не станет препятствовать разгрузке. В результате в опытах уже после быстрого уменьшения  $A_c(t)$  наблюдается замедленный процесс обратной ползучести. В пользу этого объяснения говорят также ранее приведенные в таблице сведения об изменении во времени размеров образцов и скорости звука. В этой таблице нет сведений о том, как изменились деформация и скорость звука при быстром начале разгрузки. Но имеется подтверждение факта обратной ползучести и ее замедления с течением времени.

Математический способ проверки правильности полученного изменения  $A_v(t)$  и  $A_*(t)$  проводился методом асимптотического анализа. В основе его были следующие допущения: считалось, что в момент начала разгрузки происходит мгновенное изменение скорости деформации; константы  $n_1, n_2, n_3$ , входящие в формулы (3.11), принимались равными бесконечности.

Тогда вычисление  $A_v(t)$ ,  $A_*(t)$  и  $W_*(t) = dA_*(t)/dt$  упрощалось, причем изменение  $W_*(t)$  происходило качественно так же, как у  $\delta$ -функции Дирака, в которой сингулярность наблюдалась в момент начала разгрузки. Из этого следовало, что в дальнейшем удельная рассеянная энергия  $A_*(t)$  не менялась, оставаясь постоянной величиной. Такие результаты качественно хорошо согласуются с видом кривых, приведенных на фиг. 7, 8, 10, 11.

Необходимо отметить, что при разгрузках удельная замедленно обратимая энергия  $A_v(t)$  переходит в сумму  $A_*(t) + A_c(t)$ , поэтому ясно, что быстрое уменьшение  $A_v(t)$  вызывает столь же быстрое увеличение  $A_*(t)$ . Как указано в работах [1, 4], быстрый рост  $A_*(t)$  приводит к превышению пороговой мощности удельной рассеянной энергии  $W_s$ . Следовательно, именно в момент наступления разгрузки происходит значительный рост удельной поглощенной энергии  $A_d(t)$ , а в дальнейшем ее увеличение не наблюда-

ется. Из этого вытекает, что наиболее опасный момент для испытанного материала совпадает с переходом от активного деформирования к кинематической разгрузке. Отсюда в свою очередь можно заключить о росте накопленных повреждений в вязкоэластичных материалах при возрастании частот кинематических процессов “нагружение-разгрузка”.

Заметим, что при разгрузке первого образца резкого изменения  $A_v(t)$  и  $A_*(t)$  не наблюдалось. Это подтверждалось методом асимптотического анализа, из которого следовало, что уровни падения  $A_v(t)$  и роста  $A_*(t)$  возрастали с ростом деформации, при которой начиналась разгрузка. Физически это соответствовало тому, что при малой величине  $A_v(t)$  процесс перехода к несамоуравновешенному напряженному состоянию занимал мало времени и поэтому в опыте с первым образцом этот процесс не наблюдался.

**5. Выводы и рекомендации.** На основании выполненных исследований установлена возможность описания с помощью нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоэластичных материалов процессов конечного ограниченного деформирования, если в законах связи напряжений и деформаций использовать истинные напряжения. В рассмотренных опытах на осевое сжатие с разгрузкой область допустимого изменения конечных деформаций достигала  $-50\%$ .

Используя результаты структурно-энергетического анализа, можно получать дополнительную информацию по сравнению с полученной зависимостью напряжений от деформаций. В частности, было показано, что при определенном уровне сжимающих конечных деформаций наблюдается быстрое уменьшение замедленно обратимой удельной энергии при быстрой кинематической разгрузке. Физически это соответствует кратковременному переходу самоуравновешенного напряженного состояния в несамоуравновешенное.

При решении задач о бифуркации сжатых вязкоэластичных стержней с использованием модуля Кармана [6] необходимо принимать во внимание зависимость модуля разгрузки от уровня достигнутой деформации сжатия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 04-01-08037 и № 05-01-00598).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быков Д.Л., Коновалов Д.Н. Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов // Изв. АН. МГТ. 2002. № 4. С. 63–76.
2. Апетьян В.Э., Быков Д.Л. Определение нелинейных вязкоупругих характеристик наполненных полимерных материалов // Космонавтика и ракетостроение. 2002. № 3 (28). С. 202–214.
3. Polak E. Optimization: Algorithms and Consistent Approximations. N.Y.: Springer-Verlag, 1997. 779p.
4. Быков Д.Л. Использование структурных составляющих удельной работы внутренних сил для описания сопротивления вязкоупругих материалов // Изв. АН. МГТ. 2003. № 3. С. 99–111.
5. Апетьян В.Э., Быков Д.Л. Анализ немонотонной зависимости напряжений от деформаций в вязкоупругих материалах // Изв. АН. МГТ. 2004. № 4. С. 106–115.
6. Ильюшин А.А. Пластичность. М.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.

Королев

Поступила в редакцию  
12.06.2005