

УДК 539.374

© 2005 г. С.Е. АЛЕКСАНДРОВ, Р.В. ГОЛЬДШТЕЙН

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ О ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКЕ ДЛЯ ВЯЗКИХ МАТЕРИАЛОВ

Рассматриваются особенности применения теоремы о верхней оценке для двух классов материалов (вязкие материалы и композитные материалы, состоящие из вязкого и идеально жесткопластического материалов) и для специального вида граничных условий, когда поверхность тела свободна от напряжений всюду, за исключением поверхности трения. Показано, что верхняя оценка требуемого усилия деформирования может быть получена для вязких материалов, но не может быть получена для композитных. Для последнего класса материалов предложен приближенный метод. Получено численное решение для иллюстративного примера.

Модель вязкого материала нашла широкое применение для описания процессов деформирования металлических материалов при повышенных температурах [1]. Для таких процессов важное значение имеет задача определения (или оценки) усилия, требуемого для деформирования материала при заданной скорости инструмента. Для идеально жесткопластических материалов один из способов получения оценки усилия деформирования – метод верхней оценки. Теорема о верхней оценке для вязких материалов была доказана в [2] в терминах обобщенных переменных. Эта теорема также может быть записана в виде [3]:

$$\iiint_V E^* dV - \iint_{S_p} P_i U_i^* dS \geq \iiint_V E dV - \iint_{S_p} P_i U_i dS \quad (1)$$

$$E = \int_0^{\xi_{eq}} \sigma_{eq} d\xi_{eq}, \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}, \quad \xi_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\xi_{ij} \xi_{ij})^{1/2} \quad (2)$$

где  $V$  – объем деформируемого материала,  $S_p$  – часть поверхности, на которой заданы поверхностные силы ( $S_p$  включает часть поверхности, на которой все граничные условия заданы в напряжениях и часть поверхности, на которой заданы смешанные условия, но, в последнем случае, в подынтегральное выражение входят только слагаемые, зависящие от заданных поверхностных сил);  $P_i$  – проекции поверхностных сил;  $U_i$  – проекции действительного вектора скорости;  $U_i^*$  – проекции кинематически возможного вектора скорости;  $\sigma_{eq}$  – эквивалентное напряжение,  $\xi_{eq}$  – эквивалентная скорость деформации;  $\tau_{ij}$  – девиаторные компоненты тензора напряжения;  $\xi_{ij}$  – компоненты тензора скорости деформации.

Для вязких материалов эквивалентное напряжение является функцией эквивалентной скорости деформации. В частности, одна из наиболее популярных зависимостей, которая принимается в публикуемой статье, имеет вид

$$\sigma_{eq} = K \xi_{eq}^n \quad (3)$$

где  $K$  и  $n$  – постоянные. Подставляя (3) в (2), получим

$$E = \frac{K}{(1+n)} \xi_{eq}^{1+n} \quad (4)$$

Таким образом, величина  $E$  полностью определяется полем скорости. В частности  $E^*$  получается из (4) при подстановке кинематически возможного поля скорости.

Кинематически возможные поля скорости должны удовлетворять уравнению несжимаемости и кинематическим граничным условиям. Отметим, что модель идеально-жесткопластического материала, подчиняющегося условию текучести Мизеса, получается, если  $\sigma_{eq} = \sqrt{3} k$ , где  $k = \text{const}$  – предел текучести при чистом сдвиге. В этом случае  $E$  совпадает с мощностью пластической деформации, определяемой для обоих классов материалов выражением

$$W = \sigma_{ij} \xi_{ij} = \sigma_{eq} \xi_{eq} \quad (5)$$

Очевидно, что  $W = E = \sqrt{3} k \xi_{eq}$  для идеально жесткопластических материалов и  $W = K \xi_{eq}^{1+n}$  для вязких материалов.

Задавая кинематически возможное поле скорости, можно оценить правую часть (1), в которую входят только действительные величины. При применении модели идеально-жесткопластического материала это позволяет оценить мощность неизвестных поверхностных сил, используя равенство,

$$\iiint_V W dV = \iint_{S_p} P_i U_i dS + \iint_{S_U} P_i U_i dS \quad (6)$$

где  $S_U$  – часть поверхности, на которой заданы граничные условия в скоростях или смешанные граничные условия (в последнем случае, в подынтегральное выражение входят только слагаемые, зависящие от заданных компонент вектора скорости). В большинстве практических важных задач оценка мощности неизвестных поверхностных сил дает оценку неизвестного усилия. На этом основан метод верхней оценки, широко применяемый как в технологической, так и в конструкционной пластичности. При распространении этого метода на вязкие материалы возникают две основные трудности: так как в общем случае  $E \neq W$ , то подстановка (6) в (1) не дает, вообще говоря, оценки мощности неизвестных поверхностных сил, наиболее популярные законы трения несовместимы с (1). В наиболее распространенных случаях во втором поверхностном интеграле в (6) отлична от нуля только одна компонента вектора скорости. Пусть эта компонента будет  $U_1 = U$ , а соответствующая поверхностная сила, которую требуется оценить,  $-P_1 = P$ . Тогда, подставляя (6) в (1), получаем

$$\iiint_V E^* dV - \iint_{S_p} P_i U_i^* dS \geq \iiint_V (E - W) dV + U \iint_{S_U} P dS \quad (7)$$

Для идеально жесткопластических материалов  $E \equiv W$  и первый интеграл в правой части (7) исчезает, давая требуемую верхнюю оценку усилия. Для вязких материалов, подчиняющихся (3):

$$E - W = -\frac{nK}{(1+n)} \xi_{eq}^{1+n} < 0 \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что в общем случае для вязких материалов нельзя получить верхнюю оценку неизвестного усилия из (1).

Трудность, связанная с трением, возникает из-за того, что наиболее популярные законы трения не определяют непосредственно величину удельных сил трения, которая входит в поверхностный интеграл в левой части (1). В частности, трудности с примене-

нием закона трения Кулона носят общий характер и отмечаются, например, в [4]. Другие общие проблемы с применением граничных условий трения в методах, основанных на экстремальных принципах теории пластичности, обсуждаются в [5]. В случае идеально жесткопластического материала совместимый с методом верхней оценки закон трения имеет форму

$$\tau_f = mk = m\sigma_{eq}/\sqrt{3} \quad (9)$$

где  $\tau_f$  – удельные силы трения и  $m = \text{const}$ . Для этой модели материала  $k = \text{const}$  и, поэтому  $\tau_f$  – известная постоянная величина. Закон трения в виде (9) используется и для вязких материалов, но в этом случае  $\sigma_{eq}$  зависит от поля скорости, вследствие (3), и, таким образом, действительная величина сил трения неизвестна. Иногда для вязких материалов используют закон трения в виде  $\tau_f = \text{const}$  [6], который совместим с (1), но этот закон имеет весьма ограниченное применение. При  $m = 1$  закон (9) называется законом максимального трения. Решения при использовании закона максимального трения обладают рядом особых свойств. В частности, в случае рассматриваемых вязких материалов применение закона максимального трения эквивалентно условию прилипания [7]. Но последнее условие формулируется в скоростях и поэтому поверхностный интеграл в левой части (1), относящийся к силам трения, исчезает. Отметим, что верхняя нагрузка, найденная при применении закона максимального трения, является также верхней нагрузкой при применении любого другого закона трения. В дальнейшем будем рассматривать только закон максимального трения.

Предположим, что поверхность тела свободна от напряжений, за исключением поверхности трения. Тогда, неравенство (1) может быть переписано в виде

$$\iiint_V E^* dV \geq \iiint_V E dV \quad (10)$$

Из (4) и (5) можно найти

$$W = (1 + n)E \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим

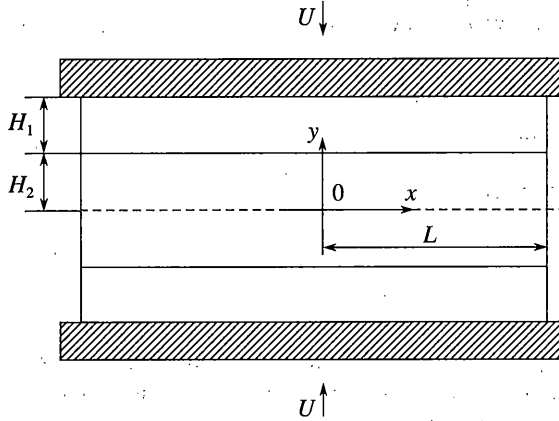
$$\iiint_V W^* dV \geq \iiint_V W dV \quad (12)$$

Полагая, как и раньше, что на поверхности  $S_U$ , которая в рассматриваемом случае совпадает с поверхностью трения, отлична от нуля только компонента вектора скорости  $U_1 = U$ , из (6) и (12) получим

$$\iiint_V W^* dV \geq U \iint_{S_U} P dS \quad (13)$$

Таким образом, при принятых ограничениях получаем выражение вполне аналогичное случаю идеально жесткопластического тела. В частном случае осадки сплошных и полых цилиндров этот результат был получен в [8].

При деформировании кусочно-однородных материалов для описания поведения разных компонент могут требоваться качественные различные модели материалов [9]. В частности, одна из возможных комбинаций – идеально жесткопластический и вязкий материал. В случае рассмотренных выше граничных условий можно получить верхнеграничное решение, предполагая, что деформируемый объем состоит из любого из этих материалов. Ниже, однако, показано, что при деформировании кусочно-однородного объема верхняя оценка на требуемое усилие не может быть получена из (1). Для определенности положим, что деформируемый объем состоит из двух областей, одна из которых занята идеально жесткопластическим материалом, а вторая – вязким.



Фиг. 1

Первую область обозначим  $V_r$ , а вторую –  $V_v$ . Предполагается, что на границе материалов имеет место условие прилипания. Тогда, неравенство (10) перепишется в виде

$$\int \int \int_{V_v} E^* dV + \int \int \int_{V_r} W^* dV \geq \int \int \int_{V_v} E dV + \int \int \int_{V_r} W dV \quad (14)$$

Используя (6), неравенству (14) можно придать форму

$$\int \int \int_{V_v} E^* dV + \int \int \int_{V_r} W^* dV \geq \int \int \int_{V_v} (E - W) dV + U \int \int_{S_U} P dS \quad (15)$$

Как и в (7), в правой части (15) остается первый интеграл, значение которого неизвестно и не вычисляется по кинематически возможному полю скорости.

Для получения некоторого приближенного значения усилия можно положить, что выполняется приближенное равенство  $W \approx W^*$ , где  $W^*$  вычисляется из (5) по полю скорости, полученному после минимизации левой части (14). Тогда, из (6) получим

$$\int \int \int_{V_v + V_r} W^* dV \approx U \int \int_{S_U} P dS \quad (16)$$

Если к поверхности трения примыкает идеально жесткопластический материал, то в левую часть этого равенства и неравенства (14) должно быть добавлено соответствующее слагаемое. Кроме того, в идеально жесткопластическом материале возможны разрывы скоростей. Вклад таких разрывов в пластическую мощность также должен быть добавлен в левую часть равенства (16) и неравенства (14).

В качестве примера рассмотрим осадку трехслойной полосы между двумя шероховатыми плитами в условиях плоскодеформированного состояния (фиг. 1). Такая задача для комбинации вязкопластического и идеально жесткопластического материала была рассмотрена в [10] для бесконечной полосы (без учета ряда краевых условий), т.е. по сути было получено обобщение известной задачи Прандтля о сжатии полосы из идеально жесткопластического материала, например [4]. В работе [10] отмечен ряд особенностей, возникающих из-за учета вязкого сопротивления деформированию.

Плиты двигаются со скоростью  $U$ . Предполагается, что слой вязкого материала находится между двумя слоями идеально жесткопластического материала. Толщина каждого из идеально жесткопластических слоев  $H_1$ , а толщина вязкого слоя  $2H_2$ . Длина полосы  $2L$ . Ввиду симметрии достаточно рассмотреть область  $0 \leq x \leq L$  и  $0 \leq y \leq H_1 + H_2$ .

Проекции вектора скорости в пластическом материале будем обозначать  $u_x^{(r)}$  и  $u_y^{(r)}$ , а в вязком —  $u_x^{(v)}$  и  $u_y^{(v)}$ . Кинематические граничные условия имеют вид

$$u_x^{(r)} = u_x^{(v)} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (17)$$

$$u_y^{(r)} = -U \quad \text{при} \quad y = H_1 + H_2 \quad (18)$$

$$u_y^{(v)} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (19)$$

$$u_x^{(r)} = u_x^{(v)}, \quad u_y^{(r)} = u_y^{(v)} \quad \text{при} \quad y = H_2 \quad (20)$$

На поверхности  $y = H_1 + H_2$  действует закон максимального трения. Так как к этой поверхности примыкает идеально жесткопластический материал, действительное поле скорости вблизи поверхности трения является сингулярным [11], причем главный сингулярный член проекции скорости  $u_x^{(r)}$  должен быть порядка  $O[(H_1 + H_2 - y)^{1/2}]$ .

Введем безразмерные координаты, скорости деформации и комплексы

$$Y = \frac{y}{H_1 + H_2}, \quad X = \frac{x}{L}, \quad \zeta_{ij} = \frac{(H_1 + H_2)}{U} \xi_{ij} \quad (21)$$

$$l = \frac{L}{H_1 + H_2}, \quad h_2 = \frac{H_2}{H_1 + H_2}, \quad s = \frac{K}{k(n+1)} \left( \frac{U}{H_1 + H_2} \right)^n \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n+1}$$

Принимая во внимание асимптотическое поведение скорости  $u_x^{(r)}$  вблизи поверхности трения, зададим кинематически возможное поле скорости в идеально жесткопластическом материале в форме

$$\frac{u_x^{(r)}}{U} = [A + B(1 - Y)^{1/2}]Xl, \quad \frac{u_y^{(r)}}{U} = (1 - Y) \left[ A + \frac{2}{3}B(1 - Y)^{1/2} \right] - 1 \quad (22)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — произвольные безразмерные постоянные. Поле скорости (22) удовлетворяет уравнению несжимаемости и граничным условиям (17) для  $u_x^{(r)}$  и (18) для  $u_y^{(r)}$  при любом выборе  $A$  и  $B$ . Используя (22), безразмерные скорости деформации в идеально жесткопластическом материале определяются в виде

$$\zeta_{xx}^{(r)} = -\zeta_{yy}^{(r)} = A + B(1 - Y)^{1/2}, \quad \zeta_{xy}^{(r)} = -\frac{BXl}{4(1 - Y)^{1/2}} \quad (23)$$

Вследствие симметрии относительно оси  $x$ , проекция скорости  $u_x^{(v)}$  должна быть четной функцией  $Y$ . Поэтому, положим

$$\frac{u_x^{(v)}}{U} = b(a - Y^2)Xl, \quad \frac{u_y^{(v)}}{U} = -b \left( a - \frac{1}{3}Y^2 \right) Y \quad (24)$$

Поле скорости (24) удовлетворяет уравнению несжимаемости и граничным условиям (17) для  $u_x^{(v)}$  и (19) для  $u_y^{(v)}$  при любом выборе  $a$  и  $b$ . Безразмерные скорости деформации в вязком материале определяются в виде

$$\zeta_{xx}^{(v)} = -\zeta_{yy}^{(v)} = b(a - Y^2), \quad \zeta_{xy}^{(v)} = -blyY \quad (25)$$

Подставляя (22) и (24), в (20), получаем

$$A = 1 - \frac{2}{3}bh_2^3 - \frac{B}{3}(h_2 + 3)(1 - h_2)^{1/2}, \quad ba = 1 + bh_2^2\left(1 - \frac{2}{3}h_2\right) + \frac{B}{3}(1 - h_2)^{3/2} \quad (26)$$

Касательная скорость на поверхности трения определяется из (22) в форме  $u_x^{(r)} = UAXL$ . Тогда, пластическая мощность на поверхности трения на единицу длины будет

$$w_f = kU|A|lL \int_0^1 X dX = \frac{kU|A|lL}{2} \quad (27)$$

Эквивалентная скорость деформации при плоском течении выражается в виде

$$\xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{U}{(H_1 + H_2)} (\xi_{xx}^2 + \xi_{xy}^2)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{U}{(H_1 + H_2)} \xi_{eq} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (14), с учетом (21), и добавляя слагаемое (27), получаем

$$s \int_0^{h_2} \int_0^1 \xi_{eq}^{(v)^{1+n}} dXdY + 2 \int_{h_2}^1 \int_0^1 \xi_{eq}^{(r)} dXdY + \frac{|A|l}{2} \rightarrow \min \quad (29)$$

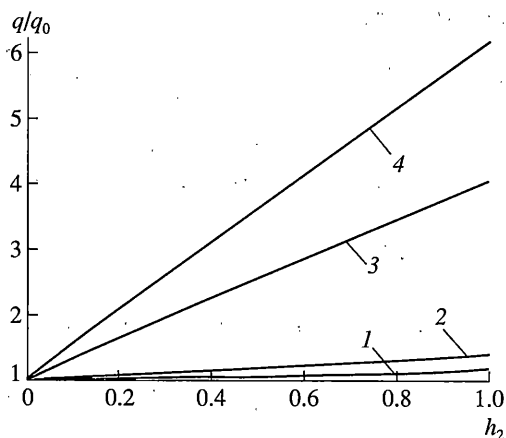
Как следует из (23), второй интеграл в (29) несобственный, но его сходимость очевидна. В (29) необходимо исключить  $A$  и  $ba$  с помощью (26), а затем минимизировать полученную функцию двух переменных по  $B$  и  $b$ . Определенные таким образом  $B$  и  $b$  должны быть подставлены в уравнение (16), которое в данном случае, с учетом добавки (27), примет вид

$$q = \frac{Q}{2kL} = s(n+1) \int_0^{h_2} \int_0^1 \xi_{eq}^{(v)^{1+n}} dXdY + 2 \int_{h_2}^1 \int_0^1 \xi_{eq}^{(r)} dXdY + \frac{|A|l}{2} \quad (30)$$

$$Q = \int_{-L}^L P dx$$

где  $Q$  – усилие на единицу длины.

В отличие от идеально жесткопластических решений, настоящее решение существенно зависит от скорости плит. Характерные скорости движения инструмента в процессах обработки металлов давлением: 0.2 м/с для гидравлических прессов, 0.4 м/с для кривошипных машин, 7 м/с для машин ротационного типа и 18 м/с для молотов [12]. В [3] для сверхпластичного сплава на основе олова приводятся следующие значения величин  $K$  и  $n$ , входящих в соотношение (3),  $n = 0.5$  и  $K = 9.8 \text{ МПа} \cdot \text{мин}^{0.5}$ . Характерный предел текучести при чистом сдвиге для ряда металлических материалов  $k = 85 \text{ МПа}$ . Эта величина принимается для идеально жесткопластического материала. Минимизация в (29) и последующее вычисление  $q$  должны быть произведены численно. В расчетах предполагалось, что  $H_1 + H_2 = 0.04 \text{ м}$ . Результаты расчетов для  $l = 5$  показаны на фиг. 2, на котором 1 соответствует  $U = 0.2 \text{ м/с}$ , 2 –  $U = 0.4 \text{ м/с}$ , 3 –  $U = 7 \text{ м/с}$  и 4 –  $U = 18 \text{ м/с}$ . Величина  $q_0$  определяется, как значение  $q$  слоя идеально жесткопластического материала толщины  $H_1 + H_2$ , т.е. при  $h_2 = 0$ . В рассматриваемом случае  $q_0 \approx 4.22$  и это значение практически совпадает с решением, полученном в [11], где было использовано поле скорости, отличное от (22), но также учитывающее сингулярность вблизи поверхности максимального трения. Из фиг. 2, видно, что требуемое усилие возрастает с увеличением скорости движения плит и относительной толщины вязкого слоя, что вполне согласуется с физическим смыслом. Отметим, что при  $h_2 = 1$  нельзя считать,



Фиг. 2

что сжимается слой вязкого материала при максимальном трении. В последнем случае было бы необходимо в кинематически возможном поле скорости учесть условие прилипания [7], что привело бы к полному определению  $a$  и  $b$  в (24). При произвольных  $a$  и  $b$  решение получается при удельных силах трения, равных пределу текучести слоя идеального жесткопластического материала, толщина которого стремится к нулю при  $h_2 \rightarrow 1$ .

Работа выполнена в рамках проектов РФФИ (05-01-00153) и НШ 1849.2003.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малинин Н.Н. Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.
2. Hill R. New horizons in the mechanics of solids // J. Mech. Phys. Solid. 1956. V. 5. P. 66–74.
3. Tomita Y., Sowerby R. An approximate analysis for studying the plane strain deformation of strain rate sensitive materials // Int. J. Mech. Sci. 1979. V. 21. P. 505–516.
4. Друянов Б.А., Непершин Р.И. Теория технологической пластичности. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
5. Hill R. A general method of analysis for metalworking processes // J. Mech. Phys. Solids. 1963. V. 11. P. 305–326.
6. Качанов Л.М. Ползучесть тонкого слоя, сжимаемого жесткими плитами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение: 1960. № 6. С. 138–140.
7. Александров С.Е., Данилов В.И., Чиканова. О зоне торможения при моделировании осесимметричных процессов обработки металлов давлением в условиях ползучести // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 1. С. 149–151.
8. Alexandrov S. An analysis of the axisymmetric compression of viscous materials // J. Mater. Proc. Technol. 2000. V. 105. № 3. P. 278–283.
9. Sliwa R. A test determining the ability of different materials to undergo simultaneous plastic deformation to produce metal composites // Mater. Sci. Engng. 1991. V. A135. P. 259–265.
10. Alexandrov S., Mishuris G., Miszuris W. An analysis of the plane-strain compression of a three layer strip // Arch. Appl. Mech. 2001. V. 71. № 8. P. 555–566.
11. Alexandrov S., Richmond O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Int. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36. № 1. P. 1–11.
12. Банкетов А.Н., Бочаров Ю.А., Добринский Н.С., Ланской Е.Н., Прайс В.Ф., Трофимов И.Я. Кузнечно-штамповочное оборудование. М.: Машиностроение, 1970. 602 с.