

УДК 539.374

© 2005 г. В.В. ВАКУЛЮК, Б.Е. ПОБЕДРЯ

О НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Рассматривается нелинейная теория вязкоупругости, обладающая всеми преимуществами теории, в которой напряжения выражаются через деформации интегральными операторами возрастающей кратности. На примере одномерного случая показывается взаимнообратность определяющих операторных соотношений. Доказывается адекватность теории.

1. Бурное развитие теории вязкоупругости связано с появлением новых материалов на полимерной основе. Реологические свойства таких материалов хорошо описываются интегральными операторами, связывающими напряжения с деформациями [1].

Линейная теория вязкоупругости в настоящее время хорошо разработана и успешно применяется при расчете материалов, обладающих памятью [1–3]. Значительный прогресс при таких расчетах был достигнут благодаря изобретению А.А. Ильюшина метода аппроксимаций. Этот метод был далее распространен на случаи, когда численное решение задач линейной теории упругости при различных упругих постоянных позволило найти решение соответствующей задачи теории вязкоупругости в квадратурах на всем временном интервале. Введение канонических операторов вязкоупругости позволило применить метод аппроксимаций для решения квазистатических задач механики композитов с несколькими вязкоупругими компонентами [4].

Однако во многих случаях приходится привлекать нелинейную теорию вязкоупругости.

В работе [4] показано, что даже по виду кривой ползучести $\Pi(t)$ (фиг. 1) можно судить о применимости или неприменимости линейных определяющих соотношений теории вязкоупругости. Участок кривой ползучести $t_1 \leq t \leq t_2$ называется участком установившейся ползучести, а участок $t > t_2$ – участком неустановившейся ползучести.

Обзор нелинейных определяющих соотношений дан в работах [4–6]. Опишем основные положения, содержащиеся в них.

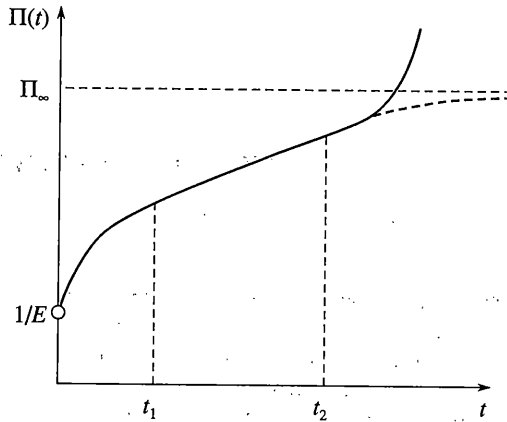
Согласно общему постулату изотропии [7] связь между напряжениями $\sigma(t)$ и деформациями $\epsilon(t)$ в теории вязкоупругости представляется в виде тензора-оператора

$$\sigma = F\{\epsilon\} \quad (1.1)$$

который должен быть инвариантен относительно группы преобразований, характеризующей некоторый класс анизотропии изучаемой среды. Поместив тензоры $\sigma(t)$ и $\epsilon(t)$ в некоторые функциональные пространства, и пользуясь теоремами представления общего вида функционалов в различных пространствах, получаем конкретный вид соотношений (1.1). Для связи между напряжениями и деформациями эти соотношения были получены в работах [1, 5].

2. Самой общей формой записи физически нелинейных операторов вязкоупругой среды является кратно-интегральный ряд Вольтерры [1]:

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^N \int_0^t \dots \int_0^t \Gamma_{ij i_1 j_1 \dots i_n j_n}^{(n)}(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \epsilon_{i_1 j_1}(\tau_1) \dots \epsilon_{i_n j_n}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (2.1)$$



Фиг. 1

при этом N может быть и бесконечностью. Все другие существующие теории являются частным случаем этой. Ядра $\Gamma^{(n)}$ представляют собой тензор $2(1 + n)$ ранга и называются ядрами релаксации n -го порядка. Эти тензоры являются инвариантными относительно некоторой группы преобразований, характеризующей определенный вид механической анизотропии. Вид ядер релаксации 1, 2 и 3-го порядков для различных классов анизотропии указан в [1].

Уравнение (2.1) можно обратить, т.е. выразить деформации через напряжения, причем все резольвентные ядра, которые называются ядрами ползучести, находятся с помощью квадратур по заданным ядрам релаксации [1, 5]:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{n=1}^N \int_0^t \dots \int_0^t K_{ij i_1 j_1 \dots i_n j_n}^{(n)}(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \sigma_{i_1 j_1}(\tau_1) \dots \sigma_{i_n j_n}(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (2.2)$$

Полученные соотношения (2.1) и (2.2) являются достаточно сложными и не всегда адекватными, т.е. содержат больше неизвестных материальных функций, чем можно определить экспериментально.

Для того чтобы сделать такие теории адекватными, пользуются известными упрощениями теории нелинейной вязкоупругости, подробно изложенными, например, в работах [1, 5] – главной нелинейной, квазилинейной и главной квазилинейной теориями вязкоупругости. Иногда в этих трех теориях можно дополнительно вводить следующие упрощения: из бесконечного ряда берется линейное и только одно нелинейное слагаемое, например, $n = 1$ и $n = 3$; объемные деформации считаются упругими; упругие деформации принимаются линейными. Можно сделать следующие выводы по сравнению данных теорий: кратно-интегральная запись учитывает взаимное влияние напряжений разных моментов времен на деформации, чего нет при использовании физически нелинейных соотношений в форме однократных интегралов. Следствием этого является то, что в случае кратно-интегральной записи теоретические кривые деформаций быстрее следуют за изменением напряжений по сравнению с записью однократными интегралами, что точнее описывает многие эксперименты.

Частным случаем теории (2.1) является следующая главная квазилинейная теория вязкоупругости [1]:

$$\begin{aligned}
 s_{ij} &= \int_0^1 \Gamma(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau - \int_0^1 \Gamma_\varphi(t-\tau) \varphi(e, \theta) e_{ij}(\tau) d\tau \\
 \sigma &= \int_0^1 \Gamma_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau - \int_0^1 \Gamma_\psi(t-\tau) \psi(e, \theta) \theta(\tau) d\tau
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Здесь обычно считается, что линейные и нелинейные ядра релаксации разбиваются на сингулярную и регулярную составляющие

$$\begin{aligned}
 \Gamma(t) &= 2G\delta(t) - \tilde{\Gamma}(t), \quad \Gamma_1(t) = K\delta(t) - \tilde{\Gamma}_1(t) \\
 \Gamma_\varphi(t) &= \Gamma_\varphi^0\delta(t) - \tilde{\Gamma}_\varphi(t), \quad \Gamma_\psi(t) = \Gamma_\psi^0\delta(t) - \tilde{\Gamma}_\psi(t)
 \end{aligned}$$

Если $\Gamma_\varphi^0 = \Gamma_\psi^0 = 0$, то соответствующая теория называется главной квазилинейной с мгновенной линейной упругостью. В случае если объем среды изменяется упруго, соотношения (2.3) принимают вид

$$\sigma = K\theta$$

Если же рассматривается несжимаемая среда, то физические соотношения (2.3) принимают вид

$$s_{ij} = \int_0^t \Gamma(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau - \int_0^t \Gamma_\varphi(t-\tau) \varphi(e) e_{ij}(\tau) d\tau
 \tag{2.4}$$

Если в теориях (2.3), (2.4), положим

$$\Gamma(t) = \Gamma_1(t) = \Gamma_\varphi(t) = \Gamma_\psi(t) = 0$$

то получим из (7) теорию малых упругопластических деформаций для активных нагрузжений Ильюшина [7], а из (2.3) – обобщение этой теории. Если $\varphi(e)$ является линейной функцией e , то соотношение (2.4) описывает главную кубичную теорию вязкоупругости Ильюшина–Огибалова.

Необходимо отметить, что главные нелинейные теории релаксации и ползучести, вообще говоря, не являются взаимно обратными [1]. Однако если функция релаксации $R(t)$ такова, что ее производная мало изменяется, можно указать два случая, когда они являются взаимно обратными с некоторой степенью точности [1].

3. Не все эксперименты можно описать, используя рассмотренные выше теории. В частности, почти все они не приспособлены для описания аномалий при разгрузке после ползучести: теоретическая величина возврата деформации после снятия напряжения оказывается больше, чем в эксперименте. Аномалии при немонотонном напряжении, когда периодические нагрузки приводят не к интуитивно ожидаемому замедлению ползучести, а, наоборот, к ее ускорению, тоже остаются за пределами возможностей адекватных теорий вязкоупругости [8].

Поэтому в [2, 9] было предложено новое представление нелинейной связи между напряжениями и деформациями в теории вязкоупругости.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(t) &= \int_0^t A_{ijklmn}(t, \tau) \varepsilon_{kl}(\tau) p_{mn}(t, \tau) d\tau \\
 p_{mn}(t, \tau) &\equiv \left[\delta_{ij} - \alpha \int_0^\tau q_{mnpq}(t, \xi) \varepsilon_{pq}(\xi) d\xi \right]^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

где $[\cdot]^{-1}$ обозначает тензор, обратный тензору, заключенному в квадратные скобки. Здесь $A_{ijklmn}(t, \tau)$, $q_{mnpq}(t, \tau)$ – компоненты тензоров ядер релаксации шестого и четвертого ранга соответственно, α – некоторый малый параметр. (При $\alpha = 0$ соотношения (3.1) превращаются в соотношения линейной теории вязкоупругости.) Для изотропной среды тензор $A_{ijklmn}(t, \tau)$ имеет три независимые компоненты, а тензор $q_{mnpq}(t, \tau)$ – две.

Для простоты будем рассматривать одномерный случай соотношений (3.1):

$$\sigma(t) = \int_0^t A(t, \tau) \varepsilon(\tau) p(t, \tau) d\tau \quad (3.2)$$

$$p(t, \tau) = 1 / \left(1 - \alpha \int_0^\tau q(t, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi \right) \quad (3.3)$$

Здесь α – некоторый "малый" параметр. (При $\alpha = 0$ соотношения (3.2), (3.3) превращаются в соотношения линейной теории вязкоупругости.) Будем считать, что обратные соотношения, выражающие деформации через напряжения имеют тот же вид, т.е.

$$\varepsilon(t) = \int_0^t B(t, \tau) \sigma(\tau) r(t, \tau) d\tau \quad (3.4)$$

здесь аналогично

$$r(t, \tau) = 1 / \left(1 - \alpha \int_0^\tau Q(t, \xi) \sigma(\xi) d\xi \right) \quad (3.5)$$

Найдем, как связаны ядра соответствующих операторов. Рассмотрим процесс

$$\sigma(t) = \sigma_0 \delta(t) \quad (3.6)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Обозначим

$$\beta \equiv \alpha \sigma_0 \quad (3.7)$$

$$N_\beta(\tau) \equiv \frac{B(\tau, 0)}{1 - \beta Q(\tau, 0)} \quad (3.8)$$

Тогда подставляя в выражение (3.2) соотношения (3.3)–(3.5) с учетом (3.6)–(3.8) получим

$$\delta(t) = \int_0^t A(t, \tau) N_\beta(\tau) d\tau \left(1 - \beta \int_0^\tau q(t, \xi) N_\beta(\xi) d\xi \right) \quad (3.9)$$

Разложим $N_\beta(\tau)$ по степеням β . Из определения (3.8) получим

$$N_\beta(\tau) = B(\tau, 0) [1 + \beta Q(\tau, 0) + \beta^2 Q^2(\tau, 0) + \dots] \quad (3.10)$$

$$1 / \left(1 - \beta \int_0^\tau q(t, \xi) N_\beta(\xi) d\xi \right) = 1 + \beta \int_0^\tau q(t, \xi) N_\beta(\xi) d\xi + \beta^2 \left(\int_0^\tau q(t, \xi) N_\beta(\xi) d\xi \right)^2 + \dots \quad (3.11)$$

Подставив в (3.11) разложение (3.10) получим

$$1/\left(1 - \beta \int_0^\tau q(t, \xi) N_\beta(\xi) d\xi\right) = 1 + \beta \int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) [1 + \beta Q(\xi, 0) + \beta^2 Q^2(\xi, 0) + \dots] d\xi +$$

$$+ \beta^2 \left[\int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) [1 + \beta Q(\xi, 0) + \beta^2 Q^2(\xi, 0) + \dots] d\xi \right]^2 + \dots \quad (3.12)$$

Теперь подставим разложения (3.12) и (3.7) в (3.9) и приравняем выражения при одинаковых степенях β :

$$\delta(t) = \int_0^t A(t, \tau) B(\tau, 0) d\tau \quad \text{при } \beta^0$$

$$0 = \int_0^t A(t, \tau) \left[B(\tau, 0) Q(\tau, 0) + B(\tau, 0) \int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) d\xi \right] d\tau \quad \text{при } \beta^1$$

или $Q(\tau, 0) = -\int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) d\xi$. При β^2 получим

$$0 = \int_0^t A(t, \tau) \left[B(\tau, 0) Q^2(\tau, 0) + B(\tau, 0) Q(\tau, 0) \int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) d\xi + \right.$$

$$\left. + B(\tau, 0) \int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) Q(\xi, 0) d\xi \right] d\tau$$

или

$$Q^2(\tau, 0) + Q(\tau, 0) \int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) d\xi + \int_0^\tau q(t, \xi) B(\xi, 0) Q(\xi, 0) d\xi = 0$$

и так далее.

Из соотношения (3.13) по определению следует, что ядра $A(t, \tau)$ и $B(t, \tau)$ – взаимно обратные. Этот же результат можно получить из выражения (3.9), если в соотношениях (3.7) положить $\alpha = 0$.

Необходимо отметить, что процесс нагружения (3.6) является простым экспериментом на ползучесть материала. В результате из (3.4) имеем

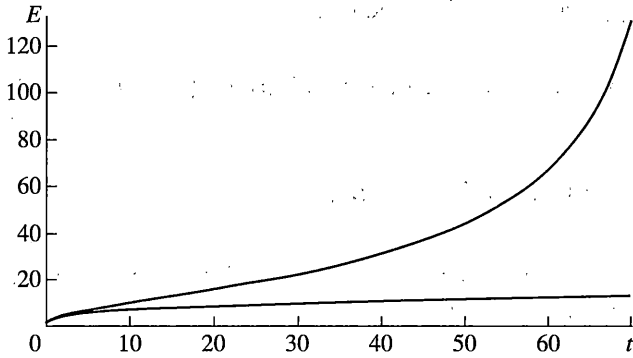
$$\varepsilon(t)/\sigma_0 = B(t, 0)r(t, 0) \quad (3.14)$$

Но из (3.5) для процесса нагружения (3.7) получим

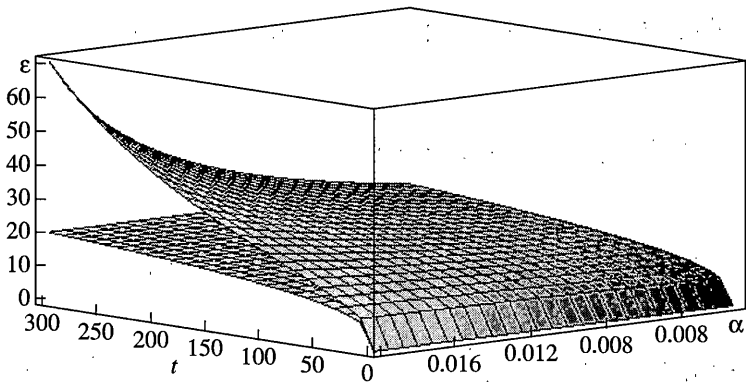
$$r(t, \tau) = \frac{1}{1 - \alpha \sigma_0 Q(t, \tau)}, \quad r(t, 0) = \frac{1}{1 - \alpha \sigma_0 Q(t, 0)}$$

В результате из (3.14) с учетом обозначений (3.8):

$$\varepsilon(t)/\sigma_0 = N_\beta(t)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Или, возвращаясь к полной записи, получим

$$\alpha Q(t, 0) = \frac{\varepsilon(t) - \sigma_0 B(t, 0)}{\varepsilon(t) \alpha \sigma_0} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{B(t, 0)}{\varepsilon(t)}$$

На фиг. 2 представлено сравнение кривых, построенных с использованием нелинейного соотношения (3.4), где взято

$$B(t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(0.7)(t - \tau)^{0.7}}, \quad Q(t - \tau) = \frac{1}{\Gamma(0.5)(t - \tau)^{0.5}}, \quad \sigma(t) = \sigma_0 = 1, \quad \alpha = 0.05$$

и линейного соотношения с той же функцией $B(t - \tau)$ под интегралом. Здесь $\Gamma(a)$ – гамма функция Эйлера. При этом линейному соотношению $\alpha = 0$ соответствует график, располагающийся ниже.

На фиг. 3 показан график изменения со временем $\varepsilon(t)$ при различных значениях $\alpha = 0.001..0.02$ (остальные параметры соответствуют фиг. 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00397).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: ИМСС УрО РАН, 2003. 411 с.
3. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е.* Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 119–157.
4. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
5. *Победря Б.Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973. С. 417–428.
6. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1970. 328 с.
7. *Ильюшин А.А.* Пластичность. (основы общей математической теории). М.: Изд-во АН СССР, 1963. 350 с.
8. *Самарин Ю.П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйб. ун-та, 1979. 84 с.
9. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.07.2005