

УДК 531.8

© 2005 г. А.П. ЛЕУТИН

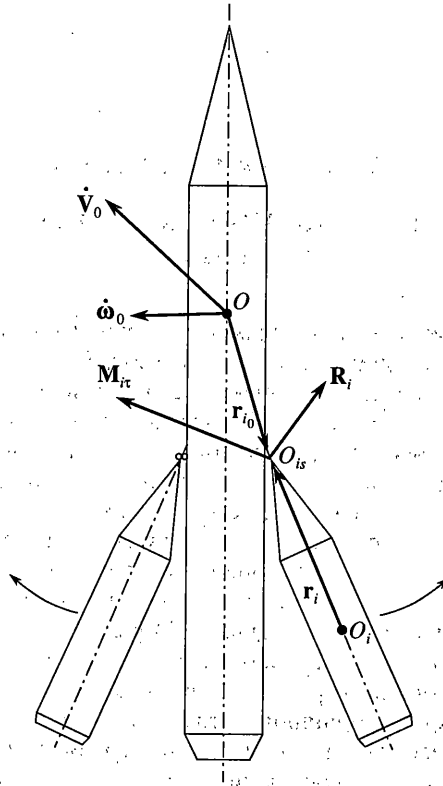
МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ ШАРНИРАМИ С ТРЕНИЕМ

Рассмотрено движение сложных механических систем, состоящих из носителя и шарнирно соединенных с ним грузов. Развита методика, позволяющая аналитически разрешить динамические уравнения системы относительно ускорений отдельных тел, в результате чего достигается значительная экономия количества арифметических операций по сравнению с подходами, которые используют стандартные численные методы. На основе теории подобия получены простые аппроксимации для расчета размеров контактной области шарнира. С учетом зависимости коэффициента кулонова трения от контактного давления определены сила и моменты трения, действующие в сферических шарнирах. Предложена схема расчета трения, состоящая из двух итерационных циклов. Приведены практические примеры расчета относительного разворота ступеней летательных аппаратов, доказывающие высокую скорость сходимости итераций. Полученные результаты подтверждают принцип Четаева о наименьшем сопротивлении движению механических систем при наличии трения в связях.

Механические системы, состоящие из соединенных тел, весьма многообразны [1–5]. Среди объектов машиностроения распространены системы, состоящие из центрального тела (носителя) и присоединенных к нему носимых тел (грузов). Структура таких систем представляет собой “дерево”. Широко известным примером является космическая ракета-носитель “Союз”: четыре ускорителя прикреплены по бокам к центральной ступени (фиг. 1). В процессе разделения ракеты после разрыва нижних узлов крепления ускорителей происходит их разворот относительно верхних узлов на заданный угол, затем разрыв верхних узлов и окончательный отвод ускорителей в стороны от центральной ступени. Системами со структурой дерева являются также платформенные механизмы и тренажеры, модели летательных аппаратов с баками, перемещения топлива в которых имитируются колебаниями математических маятников и т.д.

1. Аналитическое разрешение уравнений движения системы относительно ускорений отдельных тел. При проектировании механических систем их движение моделируется путем интегрирования на ЭВМ соответствующих дифференциальных уравнений, полученных с использованием общих методов механики. Наиболее употребительные способы численного интегрирования основаны на представлении уравнений динамики в нормальной форме Коши $\dot{X} = F(X, t)$, где $X(t)$ – вектор фазовых координат, в число которых входят, наряду с линейными и угловыми координатами, также линейные и угловые скорости тел. Отсюда следует практически важная задача разрешения взаимосвязанных уравнений динамики системы относительно ускорений отдельных тел.

Ниже описан подход, позволяющий аналитически разрешить динамические уравнения систем, имеющих структуру дерева, относительно ускорений тел. При этом ис-



Фиг. 1

пользуются простейшие методы, не требующие специальных представлений матриц. Показано, что аналитический способ “конструирования” уравнений в форме Коши позволяет обойти громоздкое обращение матриц высокого порядка и является поэтому более экономичным, чем подходы, использующие стандартные численные процедуры линейной алгебры.

Предлагаемый подход основан на принципе освобождаемости: каждое тело, условно считающееся свободным, движется под действием заданных внешних сил и неизвестных реакций, определяемых из кинематических условий связи данного тела с другими телами. Однако традиционное определение реакций путем использования условий связи сразу во всех узлах приводит к громоздкой системе линейных уравнений; ее матрица зависит от относительных линейных и угловых положений тел, а порядок растет пропорционально их числу. При использовании стандартных численных алгоритмов количество арифметических операций быстро возрастает. Поскольку реакции приходится рассчитывать на каждом шаге интегрирования несколько раз (например, в методе Рунге-Кутты – четырежды), то происходит нежелательное замедление процесса счета, особенно заметное при большом количестве тел.

Для получения компактных аналитических соотношений и, соответственно, экономии арифметических операций и сокращения времени проведения расчетов предложен следующий прием [6]. Неизвестные линейные и угловые ускорения носителя в начале, на первом шаге, предполагаются заданными. Тогда силы и моменты реакций в каждом из узлов крепления определяются, исходя из кинематических условий связи

носителя и соответствующего груза. Поскольку грузы взаимодействуют друг с другом не непосредственно, а только через носитель, то сложная задача о движении системы носитель + грузы разбивается на простые подзадачи о связанном движении носителя и каждого из грузов ("парциальные" движения грузов). При этом уравнения вращения груза можно записывать как в наиболее распространенной форме – относительно его центра масс, так и относительно узла связи [2, 3]. Оптимальный выбор полюса моментов определяется в зависимости от типа связи данного груза.

На втором шаге неизвестные ускорения носителя определяются из уравнений его движения с учетом сил и моментов реакций, действующих со стороны всех грузов. В результате выражения для ускорений носителя и грузов, сил и моментов реакций связей представляются в компактном аналитическом виде через матрицы размерности не выше третьей, как и при свободном движении тел.

В качестве примеров рассмотрим свободно перемещающиеся в пространстве системы тел, которые состоят из носителя и грузов, соединенных с ним сферическими и цилиндрическими шарнирами с трением.

1.1. Движение носителя и грузов, связанных с ним сферическими шарнирами. Уравнения динамики освобожденного пространственного движения твердых тел – носителя и L грузов – запишем в виде:

$$\dot{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{g} + g\mathbf{n}_{a0} - m_0^{-1} \sum_{i=1}^L \mathbf{R}_i \quad (1.1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = I_0^{-1} \left\{ \mathbf{M}_{a0} - [\boldsymbol{\omega}_0, I_0 \boldsymbol{\omega}_0] - \sum_{i=1}^L ([\mathbf{r}_{i0}, \mathbf{R}_i] + \mathbf{M}_{i\tau}) \right\}$$

$$\dot{\mathbf{V}}_i = \mathbf{g} + g\mathbf{n}_{ia} + m_i^{-1} \mathbf{R}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = J_i^{-1} \{ \mathbf{M}_{ia} + \mathbf{M}_{i\tau} - [\boldsymbol{\omega}_i, J_i \boldsymbol{\omega}_i] + m_i [\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{v}}_i] \} \quad (1.2)$$

$$J_i = I_i - m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^2$$

Здесь \mathbf{g} – вектор гравитационного ускорения; m – масса тела; \mathbf{V} , $\boldsymbol{\omega}$ – векторы абсолютной (относительно инерциального пространства) скорости центра масс и угловой скорости тела; $\dot{\mathbf{V}}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ – векторы абсолютного ускорения центра масс и углового ускорения тела; \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_{i0} – радиус-векторы центра O_{is} i -го шарнира ($i = 1, \dots, L$) относительно центров масс i -го груза O_i и носителя O (фиг. 1); $\dot{\mathbf{v}}_i$ – абсолютное ускорение центра i -го шарнира; $m_i [\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{v}}_i]$ – момент сил инерции, действующий на груз относительно O_{is} ; \mathbf{n}_a – перегрузка тела под действием главного вектора активных сил \mathbf{F}_a ; \mathbf{M}_a – главный момент активных сил: для носителя – относительно центра масс, для груза – относительно центра шарнира (с учетом силы тяжести); I_0 – матрица моментов инерции носителя относительно его центра масс в связанных осях; I_i , J_i – соответственно матрица моментов инерции i -го груза относительно O_i и O_{is} [3]; \mathbf{R}_i – сила реакции в i -м шарнире с учетом силы трения; $\mathbf{M}_{i\tau}$ – момент трения относительно O_{is} , определяемый с помощью итерационного алгоритма. Действие сил реакций и моментов трения на грузы со стороны носителя принято положительным. Величины, относящиеся к носителю, отмечены индексом 0, к i -му грузу – i ; $(\dots)^{-1}$ – операция обращения матриц; \tilde{a} – кососимметричная матрица, используемая для записи векторных произведений с вектором \mathbf{a} .

Грузы представляют собой физические маятники, точки подвеса которых (центры шарниров) движутся с ускорениями, обусловленными движением носителя. В уравнениях моментов для грузов в качестве полюсов удобно выбрать центры шарниров, так как это позволяет исключить неизвестные силы реакций и максимально упростить их определение.

Сила тяжести действует одинаково на все тела системы; поэтому реакции в узлах связи не зависят от нее и вместо абсолютного ускорения центра масс носителя \dot{V}_0 удобнее рассматривать $\dot{V}'_0 = \dot{V}_0 - g$ – ускорение носителя под действием активных сил и реакций в узлах связи без силы тяжести. Аналогично вместо абсолютного ускорения центра i -го шарнира \dot{v}_i рассмотрим разность ускорений $\dot{v}'_i = \dot{v}_i - g$.

На первом шаге, условно считая векторы ускорений носителя \dot{V}'_0 и $\dot{\omega}_0$ заданными, с использованием уравнений движения i -го груза (1.2) и условия равенства абсолютных ускорений носителя и груза в центре шарнира $\dot{v}_i = \dot{v}'_{i0}$, получаем вектор силы реакции в этом шарнире

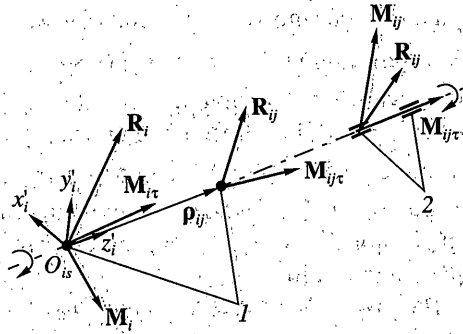
$$\begin{aligned} R_i &= N_i \dot{v}'_i + \delta R'_i \\ N_i &= m_i(E + m_i \tilde{r}'_i J_i^{-1} \tilde{r}'_i), \quad \dot{v}'_i = C_i^T (\dot{V}'_0 - \tilde{r}'_{i0} \dot{\omega}_0 + \tilde{\omega}_0^2 r'_{i0}) \\ \delta R'_i &= -m_i(g n_{ia} - \tilde{r}'_i J_i^{-1} (M'_{ia} + M'_{i\tau}) + \tilde{\omega}_0^2 r'_i) \\ M'_{ia} &= M_{ia} - \tilde{\omega}_i J_i \omega_i \end{aligned} \tag{1.3}$$

При матричной записи векторные величины, задающие геометрические, кинематические и динамические характеристики тел, определены в их связанных осях и записаны как столбцы (сила реакции и момент трения в каждом шарнире заданы в осях соответствующего груза); M_{ia} – момент активных сил i -го груза (без силы тяжести) относительно центра i -го шарнира; C_i – переменная ортогональная матрица, задающая преобразование (поворот) координат из осей носителя $Ox_0y_0z_0$ в оси i -го груза $O_ix_iy_iz_i$; E – единичная матрица; $(\dots)^T$ – операция транспонирования.

Если масса и моменты инерции носителя значительно больше, чем у подвешенных грузов (например, это имеет место при отделении отработавших ускорителей ракеты от маршевой ступени), то движение носителя можно считать заданным и не зависящим от грузов. Тогда при приближенном решении можно ограничиться первым шагом.

На втором шаге, подставляя (1.3) в уравнения движения носителя (1.1) и производя суммирование по всем грузам, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных векторов \dot{V}'_0 и $\dot{\omega}_0$, заданных в осях носителя,

$$\begin{aligned} A \dot{V}'_0 + B \dot{\omega}_0 &= a, \quad B^T \dot{V}'_0 + F \dot{\omega}_0 = b \\ A &= m_0 E + \sum N'_i, \quad N'_i = C_i N_i C_i^T, \quad B = -\sum \tilde{r}'_{i0}, \quad \tilde{r}'_{i0} = N'_i \tilde{r}'_{i0} \\ F &= I_0 - \sum \tilde{r}'_{i0} \tilde{r}'_{i0}, \quad a = g m_0 n_{a0} - \sum \delta R'_i, \quad \delta R'_i = C_i \delta R'_i + N'_i w_i \\ b &= M'_{a0} - \sum (C_i M'_{i\tau} + \tilde{r}'_{i0} \delta R''_i), \quad w_i = \tilde{\omega}_0^2 r'_{i0} \\ M'_{a0} &= M_{a0} - \tilde{\omega}_0 I_0 \omega_0 \end{aligned} \tag{1.4}$$



Фиг. 2

Применив матричный метод исключения неизвестных, определим из системы (1.4) ускорения носителя с учетом его взаимодействия с грузами

$$\dot{V}_0' = M_0^{-1}(a - BF^{-1}b), \quad \dot{\omega}_0 = F^{-1}(b - B^T \dot{V}_0') \quad (1.5)$$

$$M_0 = A - BF^{-1}B^T$$

где матрица M_0 , элементы которой имеют размерность массы, задает обобщенные массовые характеристики носителя с подвешенными грузами. Подставляя (1.5) в (1.3), получаем векторы сил реакций в шарнирах и затем из (1.2) окончательно находим нормальную форму уравнений несвободного движения грузов.

Полученное решение является обобщением известной механической модели летательного аппарата, содержащего полости с жидким топливом; движения свободной поверхности топлива имитируются колебаниями математических маятников, параметры которых соответствуют гармоникам колебаний поверхности.

1.2. Движение носителя и грузов, соединенных с ним цилиндрическими и сферическими шарнирами. Рассмотрим случай, когда грузы вращаются относительно носителя на своих узлах крепления. Они могут быть конструктивно выполнены в виде комбинаций из нескольких (не менее двух) сферических и цилиндрических шарниров; их общая ось является осью вращения груза; при этом хотя бы один из сферических шарниров воспринимает усилия вдоль этой оси. На фиг. 2 сферические и цилиндрические шарниры обозначены цифрами (1) и (2) соответственно. На i -й груз действуют полная сила реакции R_i , момент трения $M_{i\tau}$ и момент сил реакций M_i :

$$R_i = \sum_{j=1}^{J_i} R_{ij}, \quad M_{i\tau} = \sum_{j=1}^{J_i} M_{ij\tau}, \quad M_i = \sum_{j=1}^{J_i} (M_{ij} + [\rho_{ij}, R_{ij}])$$

где $J_i \geq 2$ – количество шарниров в i -м узле, M_{ij} – моменты в цилиндрических шарнирах, направленные перпендикулярно их общей оси; ρ_{ij} – радиус-вектор центра j -го шарнира относительно центра O_{is} одного из сферических шарниров. В качестве полюса в уравнении моментов (1.2) для i -го груза можно принять любую точку на его оси вращения [2–4]; для единообразия со случаем сферического шарнира и наибольшего упрощения уравнений выберем точку O_{is} . Суммарный момент трения $M_{i\tau}$ “тормозит” относительно вращению груза на i -ой оси, а момент M_i препятствует относительноному развороту груза перпендикулярно оси. В системе координат $O_{is}x_iy_iz_i'$, жестко связан-

ной с i -м грузом (ось z_i^1 направлена по оси вращения), имеем неизвестный вектор-столбец $M_i = [M_{ix}, M_{iy}]^T$. Момент трения M_{it} , определяемый с помощью итераций, задан в этих же осях. Неизвестную силу реакции $R_i = [R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}]^T$ задаем, как и в случае сферического шарнира, в осях груза. Для матриц поворота B_{i0} и B_i от системы координат $O_{i0}x_{i0}^1y_{i0}^1z_{i0}^1$ к координатам носителя $Ox_0y_0z_0$ и i -го груза $O_ix_iy_iz_i$ выполняется соотношение $B_{i0} = C_iB_i$. Аналогично $D_{i0} = C_iD_i$, где D_{i0}, D_i – проекционные 3×2 -матрицы, составленные из двух первых столбцов матриц B_{i0}, B_i , т.е. из ортов направлений, перпендикулярных общей оси вращения тел [6, 7].

На первом шаге спроектируем на оси груза условие касания каждого груза и носителя $\dot{v}_i^1 = \dot{v}_{i0}^1$ в центре сферического шарнира, выбранного в качестве полюса. Условие отсутствия относительного разворота груза перпендикулярно оси вращения $\Delta\dot{\omega}_{ix} = \Delta\dot{\omega}_{iy} = 0$ ($\Delta\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_i - \dot{\omega}_0 + [\omega_i, \omega_0]$) – вектор относительного углового ускорения груза) записываем в проекциях на координатные оси x_i^1, y_i^1 . В результате для определения пар векторов R_i и M_i получаем систему матричных уравнений (ниже индекс i опущен):

$$\begin{aligned} R + SM &= N\dot{v}' + \delta R^*, & (D^T J^{-1} D)M &= -S^T \dot{v}' + D_0^T \dot{\omega}_0 + k \\ S &= -m\tilde{r}J^{-1}D, & \delta R^* &= -m(gn_a - \tilde{r}\dot{\omega}' + \tilde{\omega}^2 r) \\ k &= -D^T(\dot{\omega}' + \tilde{\omega}C^T\omega_0), & \dot{\omega}' &= J^{-1}(M'_a + BM_\tau) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Полученная система является наиболее простой, так как неизвестная суммарная сила реакции не создает момента относительно полюса и исключается из второго условия связи.

Решение (1.6) естественным образом представляется в виде линейных зависимостей от ускорения центра каждого шарнира и углового ускорения носителя:

$$\begin{aligned} M &= M^v \dot{v}' + M^\omega \dot{\omega}_0 + \delta M^*, & R &= R^v \dot{v}' + R^\omega \dot{\omega}_0 + \delta R^{**} \\ M^v &= -J^T S^T, & M^\omega &= J^T D_0^T, & \delta M^* &= J^T k \\ R^v &= N - SM^v, & R^\omega &= -SM^\omega, & \delta R^{**} &= \delta R^* - S\delta M^* \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$J' = (D^T J^{-1} D)^{-1} = D^T \left(J - \frac{J(b_3 b_3^T)J}{b_3^T J b_3} \right) D$$

Матрица J' определяется с помощью формул Фробениуса для обращения блочной матрицы $B^T J B$, где $B = (D|b_3)$, b_3 – третий столбец матрицы поворота B [8].

Величины $R^v, M^v, R^\omega, M^\omega$ являются частными производными силы и момента реакций по ускорениям центра данного шарнира и угловому ускорению носителя. Используя соотношения (1.3) для ускорения центра шарнира, представим выражения (1.7) в виде линейных зависимостей от абсолютных ускорений носителя:

$$\begin{aligned} R &= R^v \dot{V}_0 + R^\omega \dot{\omega}_0 + \delta R, & M &= M^v \dot{V}_0 + M^\omega \dot{\omega}_0 + \delta M \\ R^v &= R^v C^T, & R^\omega &= R^\omega - R^v \tilde{r}_0, & \delta R &= \delta R^{**} + R^v w \\ M^v &= M^v C^T, & M^\omega &= M^\omega - M^v \tilde{r}_0, & \delta M &= \delta M^* + M^v w \end{aligned} \quad (1.8)$$

где матрицы $R^v, R^\omega, M^v, M^\omega$ – частные производные силы и момента реакций по ускорениям носителя.

На втором шаге получим систему уравнений для определения неизвестных ускорений носителя $\dot{V}_0, \dot{\omega}_0$. Система и ее решение имеют вид, аналогичный (1.4), (1.5); матрично-векторные коэффициенты равны

$$A = m_0 E + \sum CR', \quad B = \sum CR'', \quad F = I_0 + \sum(\tilde{r}_0 CR'' + D_0 M'')$$

$$a = gm_0 n_{a0} - \sum \delta R', \quad \delta R' = C \delta R$$

$$b = M'_{a0} - \sum (B_0 M_\tau + \tilde{r}_0 \delta R' + D_0 \delta M)$$

Окончательные выражения для сил R_i и моментов реакций M_i найдем подстановкой ускорений носителя в (1.8).

Случай вращения грузов на сферических шарнирах ($M_i = 0$) может быть получен из случая вращения на осях при $S_i = 0, B_i = E$.

Полученное решение представляет собой обобщение классической задачи о движении свободного тела, несущего на себе симметричные маховики, вращающиеся без трения вокруг осей, проходящих через их центры масс [2].

По сравнению с [6], где уравнения вращения грузов записаны относительно центров масс, полученные выше системы уравнений являются более простыми, так как неизвестная сила реакции не создает момента относительно своего полюса. Кроме того, соотношения [6] неприменимы в практически важном предельном случае, когда грузы "вырождаются" в математические маятники.

Число степеней свободы пространственного движения системы "носитель + L грузов" равно $3L + 6$ (при вращении грузов на сферических шарнирах) и $L + 6$ (при вращении на осях). Поэтому при численном моделировании достаточно интегрировать (с учетом действия силы тяжести) 6 уравнений абсолютного движения носителя и $3L$ уравнений относительного вращения грузов на шарнирах. Для грузов на осях интегрируются L уравнений их относительного вращения, которые получаются из уравнений моментов (1.2) проектированием на соответствующую ось вращения. Переменные матрицы относительных поворотов C_i определяются на основе уравнений относительного вращения грузов [3].

1.3. Сравнительная оценка вычислительной трудоемкости различных методов. Традиционное определение векторов сил R_i и моментов реакций M_i ($i = 1, \dots, L$) путем непосредственного применения условий связи тел сразу во всех узлах, как отмечено выше, приводит к необходимости решения симметричной системы линейных уравнений порядка $3L$ (для сферических шарниров) и $5L$ (для осей) [7]. Точные численные методы решения таких систем при больших L требуют выполнения значительного количества арифметических операций — $N \sim L^3$ [9].

Отношение \bar{N} количества арифметических операций при расчете по методу квадратного корня (при решении систем с симметричной положительно определенной матрицей он требует наименьшего числа операций), к количеству операций по аналитическим соотношениям, составляет: для сферических шарниров $\bar{N} = (9L^3 + 72L^2 + 227L + 36)/(456L + 295)$, для осей $\bar{N} = 1/6(250L^3 + 1002L^2 + 3092L + 216)/(837L + 286)$.

При $L > 3$ аналитический подход становится выгоднее численных методов. Достигнутый таким образом выигрыш растет по мере увеличения количества грузов: при $L = 4$ требуется в 1.3 раза меньше операций для случая вращения грузов на сферических шарнирах и в 2.1 раза для вращения на осях, а при $L = 6$ — в 2 и 3.4 раза соответственно.

При использовании метода исключения Гаусса, который при большом числе тел требует приблизительно в два раза больше операций, чем метод квадратного корня, выигрыш также возрастает вдвое [9].

Таким образом, предложенный подход позволяет максимально приблизить время моделирования связанного движения тел ко времени моделирования их свободного движения, что является важным при массовых расчетах.

2. Приближенный аналитический расчет размера контактной области в шарнирах.

При проведении инженерных расчетов процессов движения шарнирно соединенных тел, когда при учете трения требуется достичь высокого быстродействия при приемлемой точности, целесообразно использовать простые аналитические соотношения, полученные путем аппроксимации расчетно-экспериментальных результатов решения контактных задач [10–18]. Ниже дано обобщение этого подхода, применяемого для цилиндрических шарниров, на малоисследованный случай сферических шарниров.

Цилиндрический шарнир схематизируется как бесконечный упругий цилиндр (втулка) радиуса ρ_1 , вставленный с малым зазором $\varepsilon \ll \rho_1$ в “проушину” – отверстие радиуса $\rho_2 = \rho_1 + \varepsilon$ внутри упругого пространства [14]. Сферический шарнир приближенно представлен упругой сферой радиуса ρ_1 (головка), которая вдавливается силой реакции R_n в “гнездо” – сферическую полость близкого радиуса $\rho_2 = \rho_1 + \varepsilon$ внутри упругого пространства [17]. При решении контактных задач в первом приближении не учитываются действие трения, приводящее к асимметрии распределения контактного давления, а также влияние микронеровностей поверхностей, образующихся после их механической обработки [12, 14]. Угловой размер θ_0 контактной области, симметричной относительно вектора R_n , представляет собой функцию физических параметров, определяющих действующую в текущий момент времени нагрузку (квазистатический случай), геометрию и упругие свойства контактирующих материалов шарнира.

При малых контактных углах справедлива формула Герца (углы заданы в градусах):

$$\theta_{0Г} = 57.3 \arcsin x \tag{2.1}$$

Для цилиндрического шарнира аргумент функции определяется равенством $x = 2\sqrt{\lambda}$, где $\lambda = 2P/(\pi\bar{\varepsilon}\rho_1 E)$ – безразмерный параметр нагружения шарнира, являющийся основным параметром подобия контактной задачи; P – погонная (на единицу длины шарнира, по гипотезе плоских сечений) сжимающая сила; $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\rho_1 \ll 1$ – относительный зазор; E_1, E_2, ν_1, ν_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона для материалов внутреннего цилиндра (сферы) 1 и внешнего пространства 2; $E = 2((1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2)^{-1}$ – приведенный модуль упругости материалов.

В пространственном случае $x = \sqrt[3]{\mu}$, где $\mu = 3R_n/(2\bar{\varepsilon}\rho_1^2 E)$ – параметр нагружения сферического шарнира, R_n – сила реакции.

Используя методы теории подобия, с учетом функционального вида соотношения (2.1) приводим зависимость угла контакта от физических (размерных) параметров к безразмерной форме

$$\theta_0 = \bar{f}(x, \bar{E}, \nu_1, \nu_2), \quad \bar{E} = E_1/E_2 \tag{2.2}$$

При увеличении переменной x (при постоянных значениях остальных параметров) контактный угол θ_0 монотонно растет, приближаясь при $x \rightarrow \infty$ к предельному значению $\theta_0^*(\bar{E}, \nu_1, \nu_2)$, которое близко к прямому углу и слабо зависит от упругих свойств материалов [14].

Для определения зависимости контактного угла от безразмерной переменной x имеем граничные условия: (1) при малых значениях x зависимость $\theta_0(x)$ совпадает с ре-

шением Герца, т.е. $\theta_0 \rightarrow 57.3x$ при $x \rightarrow 0$; (2) при увеличении x угол контакта монотонно растет, асимптотически стремясь к своему предельному значению θ_0^* .

На основании известного сходства решений контактных задач для цилиндров и сфер можно предположить, что вид безразмерных зависимостей (2.2) для обоих случаев будет близок. Анализируя результаты решения контактных задач, приходим к выводу, что в классе элементарных функций (простейших с точки зрения вычислений) наиболее близкими к зависимости угла θ_0 от переменной x по общему виду и математическим свойствам (нечетность, монотонность) являются две функции: обратный тригонометрический тангенс $\text{arctg} x$ и гиперболический тангенс $\text{th} x = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$. Использование других аппроксимаций (экспонент, дробно-линейных функций и др.) показало, что они имеют более низкую точность.

Для выполнения граничных условий представим первую приближенную зависимость в виде

$$\tilde{\theta}_{01} = 57.3C \text{arctg}(x/C) \quad (2.3)$$

где постоянная $C = \theta_0^*/90$ выбирается из условия (2). Аналогично получим вторую формулу

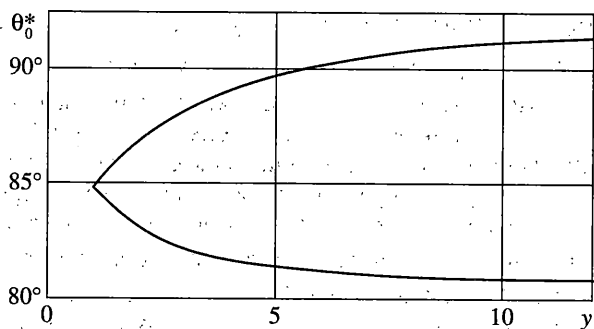
$$\tilde{\theta}_{02} = 57.3C' \text{th}(x/C'), \quad C' = \theta_0^*/57.3 \quad (2.4)$$

2.1. *Цилиндрический шарнир.* Полагая в (2.3) и (2.4) $x = 2\sqrt{\lambda}$, имеем приближенные соотношения

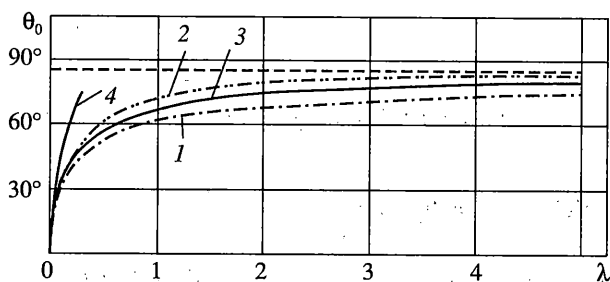
$$\tilde{\theta}_{01} = \theta_0^* \text{arctg}(180\sqrt{\lambda}/\theta_0^*)/1.57, \quad \tilde{\theta}_{02} = \theta_0^* \text{th}(114.6\sqrt{\lambda}/\theta_0^*)$$

С ростом относительной жесткости \bar{E} материалов шарнира предельный контактный угол $\theta_0^*(\bar{E}, \nu_1, \nu_2)$ монотонно уменьшается от $\sim 90^\circ$ до $\sim 80^\circ$. При вычислении этого угла целесообразно применять аналитические аппроксимации, полученные на основе расчетных данных [14] при средних значениях коэффициентов Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ (фиг. 3). Верхняя ветвь кривой, на которой модуль упругости цилиндра меньше модуля упругости внешнего пространства ($\bar{E} \leq 1$), описывается соотношением $\theta_0^* = 84.85 + 4.89 \text{arctg}(0.436\tilde{y})$, $\tilde{y} = y - 1$, $y = \bar{E}^{-1}$. Нижняя ветвь кривой, на которой жесткость цилиндра больше жесткости пространства ($\bar{E} \geq 1$), рассчитывается по формуле $\theta_0^* = 84.85 - 2.88 \text{arctg}(0.711\tilde{y})$, $y = \bar{E}$. При $y \leq 2$ удобно использовать соотношения $\theta_0^* \approx 84.85 \pm 2\tilde{y}$ (относительная погрешность не более 0.3%).

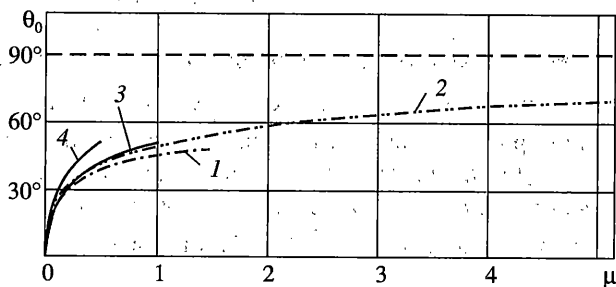
В качестве примера сопоставим полученные выше аппроксимации с точным численным решением [16] для одинаковых контактирующих материалов: $\bar{E} = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\theta_0^* = 84.85^\circ$. Кривые $\tilde{\theta}_{01}$ и $\tilde{\theta}_{02}$ обозначены цифрами 1 и 2, точная зависимость – 3, решение Герца – 4 (фиг. 4). Линейная комбинация $\tilde{\theta}_0 = k\tilde{\theta}_{01} + (1-k)\tilde{\theta}_{02}$ удовлетворяет граничным условиям и используется для повышения точности: параметр $0 \leq k \leq 1$ выбирается из условия наилучшего приближения точной кривой при больших контактных углах. При $0.5 < \bar{E} < 2$ среднее значение $\tilde{\theta}_0 = (\tilde{\theta}_{01} + \tilde{\theta}_{02})/2$ близко к θ_0 (наибольшее отличие не превышает $\sim 3\%$) и может быть рекомендовано для практики.



Фиг. 3



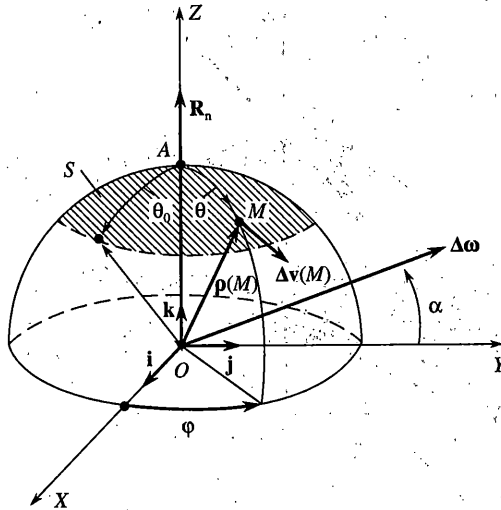
Фиг. 4



Фиг. 5

2.2. *Сферический шарнир.* Получение высокоточных аппроксимаций в настоящее время затруднено из-за недостаточного количества данных при больших значениях контактных углов. Вместе с тем аппроксимации первого приближения для сферических шарниров можно установить из (2.3) и (2.4) при $\chi = \sqrt[3]{\mu}$, используя результаты аналитических расчетов [17]. При этом в качестве величин $\theta_0^*(\bar{E}, \nu_1, \nu_2)$ выбираются их значения для цилиндрического шарнира с теми же постоянными упругости.

Сравним аппроксимации $\tilde{\theta}_{01}$ и $\tilde{\theta}_{02}$, полученные в результате такого подхода, с точной зависимостью $\theta_0(\mu)$ [17], соответствующей контакту упругой сферы с абсолютно жестким сферическим основанием: $\bar{E} = 0, \nu_1 = 0.3, \theta_0^* = 92.5^\circ$. Аппроксимации $\tilde{\theta}_{01}$ и $\tilde{\theta}_{02}$ обозначены цифрами 1 и 2, кривая 3 взята из [17], решение Герца – 4 (фиг. 5). Кри-



Фиг. 6

вая $\tilde{\theta}_{02}$ достаточно близка к точной зависимости: отличие не превышает ~5%. Поэтому для инженерных расчетов целесообразно использовать формулу $\tilde{\theta}_0 = \theta_0^* \text{th}(57.3\sqrt{\mu/\theta_0^*})$. Отметим, что в справочной литературе соотношения для расчета размера контактной области в сферическом шарнире отсутствуют. По мере накопления расчетно-экспериментальных данных точность аппроксимаций может быть повышена путем введения корректирующих функциональных множителей.

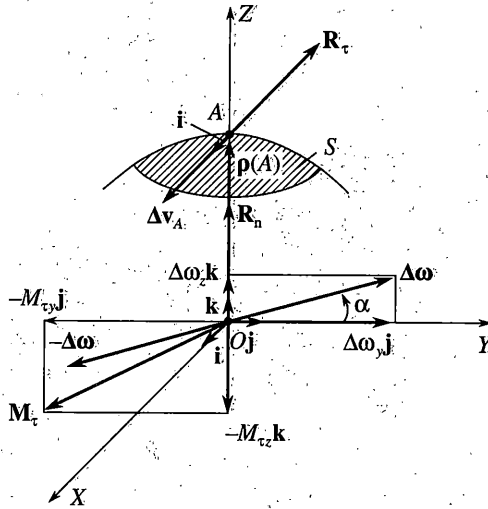
3. Сила и моменты кулонова трения в сферических шарнирах. В современной технике широко используются твердые антифрикционные покрытия, сохраняющие работоспособность узлов связи при больших контактных давлениях и низких температурах (в частности, в условиях космического полета). Разработана соответствующая модель силового взаимодействия твердых тел в шарнирах, учитывающая реальный характер распределения давления и сил трения по контактной поверхности [19]. Ниже рассмотрен наиболее сложный случай сферического шарнира.

При вычислении силы и момента трения пренебрегаем отличием поверхностей от идеальных сфер и считаем их центры совпадающими. Область контакта S и распределение давления по ней осесимметричны относительно вектора силы реакции R_n (п.2). С использованием закона Кулона для сил сухого трения получены соотношения для интегральных векторов силы R_τ и момента трения M_τ :

$$R_\tau = - \int_S f_\tau(M) p(M) e_v dS \quad (3.1)$$

$$M_\tau = \rho \int_S f_\tau(M) p(M) [e_v, \rho(M)/\rho] dS$$

Здесь $p(M)$ – контактное давление в произвольной точке M (фиг. 6); $\Delta v(M) = [\Delta\omega, \rho(M)]$ – вектор скорости точки M части шарнира, связанной с грузом, относительно той же точки на части, связанной с носителем; $\Delta v(M), e_v = \Delta v(M)/\Delta v(M)$ – соответственно, абсолютная величина и орт скорости $\Delta v(M)$; $\Delta\omega$ – угловая скорость груза отно-



Фиг. 7

сительно носителя, задающая мгновенную ось относительного вращения груза; $\rho(M)$ — радиус-вектор точки M относительно центра шарнира; $\rho = |\rho(M)|$ — радиус шарнира; $f_\tau(M)$ — коэффициент сухого трения. В задачах, где относительные скорости контактирующих поверхностей невелики, можно ограничиться простой зависимостью коэффициента трения от давления по закону Кулона: $f_\tau = f_\tau^0 + A_\tau/p$, где f_τ^0 , A_τ — постоянные для данной пары соприкасающихся материалов, определяемые экспериментальным путем; A_τ характеризует молекулярную сцепляемость (адгезию) материалов [10].

Векторы задаются своими проекциями на оси прямоугольной системы координат $OXYZ$, связанной с осью симметрии контактной задачи и относительной угловой скоростью груза так, чтобы расчет силы и момента трения был наиболее простым. Начало системы совпадает с центром шарнира, ось Z направлена вдоль вектора R_n в точку A — центр контактной области; i, j, k — орты осей координат; вектор $\Delta\omega$ лежит в плоскости OYZ и составляет с осью Y угол α .

Внутри контактной области движение части шарнира, принадлежащей грузу, относительно части, принадлежащей носителю, представляется в виде суперпозиции следующих движений: скольжения — поступательного движения точки A со скоростью $\Delta v(A)$; вращения вокруг оси Y со скоростью $\Delta\omega_y j$, которое порождает поступательное движение; верчения — вращения вокруг оси Z со скоростью $\Delta\omega_z k$ (фиг. 7).

Область контакта представляет собой часть сферической поверхности и в координатах $O\rho\theta\phi$ имеет вид: $0 \leq \theta \leq \theta_0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Как следует из известных решений рассматриваемой контактной задачи [13–17], распределение контактного давления является монотонно убывающей функцией $p = p(\theta)$, которая обращается в нуль на границе области и удовлетворяет условию уравнивания сжимающей силы

$$\rho^2 \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} p(\theta) \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi = R_n \quad (3.2)$$

где θ_0 — угловой размер контактной области (п. 2).

При вычислении силы и моментов трения используются приближенные зависимости для распределения давления, достаточно хорошо аппроксимирующие решение трехмерной задачи, согласно которому при действии силы \mathbf{R}_n , приложенной в точке O внутри неограниченного упругого пространства, радиальная составляющая напряжения изменяется по закону $\sigma_p \sim R_n \cos \theta / \rho^2$ [13]:

$$p(\theta) = p_0(\cos \theta - \cos \theta_0) \quad (3.3)$$

Отметим, что в случае цилиндрического шарнира согласно гипотезе плоских сечений аналогично получается $\sigma_p \sim P \cos \theta / \rho$ (P – погонная сжимающая сила [13]) и принята та же аппроксимация (3.3).

Максимальное давление p_0 в точке A определяется при заданной силе R_n из условия равновесия (3.2), которое запишем в виде

$$\rho^2 p_0 I_0(\theta_0) = R_n \quad (3.4)$$

Из (3.1)–(3.4) вследствие симметрии получаем одну составляющую силы и две составляющих момента трения (фиг. 7):

$$\mathbf{R}_\tau = -i f_\tau^0 \rho^2 p_0 I(\theta_0, \alpha) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{M}_\tau = -f_\tau^0 \rho^3 p_0 [j J(\theta_0, \alpha) + k K(\theta_0, \alpha)] \quad (3.6)$$

Выражения для двойных интегралов I_0, I, J, K приведены в [19]. Используя (3.4)–(3.6), с учетом закона Кулона представим векторы \mathbf{R}_τ и \mathbf{M}_τ через величину силы R_n :

$$\mathbf{R}_\tau = -i [f_\tau^0 R_n \chi(\theta_0, \alpha) + A_\tau \rho^2 \Gamma(\theta_0, \alpha)] \quad (3.7)$$

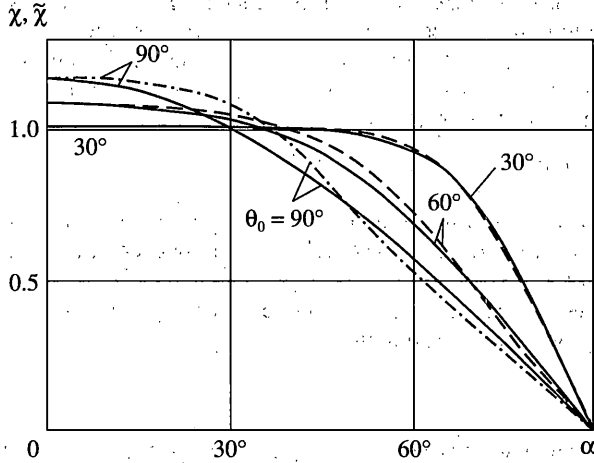
$$\mathbf{M}_\tau = -\rho \{ j [f_\tau^0 R_n \sigma_Y(\theta_0, \alpha) + A_\tau \rho^2 J'(\theta_0, \alpha)] + k [f_\tau^0 R_n \sigma_Z(\theta_0, \alpha) + A_\tau \rho^2 K'(\theta_0, \alpha)] \} \quad (3.8)$$

$$\chi = I^0 / I_0, \quad \sigma_Y = J^0 / I_0, \quad \sigma_Z = K^0 / I_0 \quad (3.9)$$

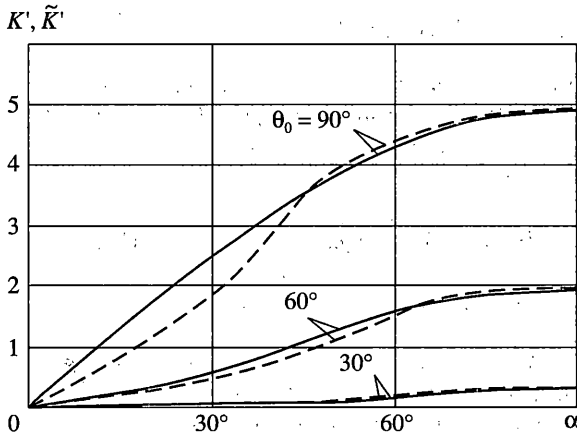
Здесь I^0, J^0, K^0 и Γ, J', K' – двойные интегралы, получающиеся соответственно из I, J, K . Примеры коэффициентов и интегралов трения, полученных численно, показаны на фиг. 8, 9 сплошными линиями; подробные таблицы с точностью до 4-х значащих цифр приведены в [19].

Интегральное действие трения в контактной области шарнира, в соответствии с его физической природой, препятствует относительному вращению и перемещению контактирующих тел. Сила трения противодействует скольжению одной части шарнира относительно другой и направлена против скорости центра контактной области. Момент трения скольжения $-M_{\tau Y} j$ вызван действием элементарных сил трения относительно центра шарнира и направлен против угловой скорости скольжения $\Delta \omega_Y j$. Соответственно, момент трения верчения $-M_{\tau Z} k$ направлен против скорости верчения $\Delta \omega_Z k$. Таким образом, для системы элементарных сил трения, непрерывно распределенных по поверхности, при симметричном распределении контактного давления выполнено известное свойство сосредоточенной силы: ее момент относительно произвольного полюса перпендикулярен ей.

Характерной особенностью полученных выше соотношений для силы и моментов трения является присутствие полных эллиптических интегралов и интегралов от них. Это вызвано использованием закона Кулона для трения. В общем случае сила и моменты трения представляются в виде интегралов по углу θ от выражений, содержащих эллиптические интегралы первого и третьего рода. Конечные аналитические вы-



Фиг. 8



Фиг. 9

ражения для столь сложных интегралов неизвестны, но в частных случаях получен ряд точных решений [19, 23]. При $\alpha = 0$, что соответствует относительному развороту груза и носителя в общей плоскости симметрии, аналитическое интегрирование удается довести до конца при произвольном угле θ_0 и получить линейные комбинации интегралов первого и второго рода $K(k_0)$ и $E(k_0)$, где $k_0 = \sin \theta_0$. В остальных случаях точные значения коэффициентов и интегралов определяются лишь при $\theta_0 = 90^\circ$, близком к предельным контактным углам. Для практического вычисления эллиптических интегралов наиболее выгодно использовать быстроходящиеся ряды, содержащие логарифмические множители $\ln x$, где $x = 1 - k^2$, k – модуль интеграла. В инженерных расчетах можно рекомендовать аппроксимации, коэффициенты которых получены по методу чебышевского приближения и дают относительную точность $\sim 0.3\%$ [23]:

$$\tilde{K}(x) = 1.3863 + 0.1845x - (0.5 + 0.0879x) \ln x$$

$$\tilde{E}(x) = 1 + 0.5708x - 0.1948x \ln x$$

3.1. “Превращение” сухого трения в вязкое. Зависимости силы и моментов сухого трения от угла α , задающего ориентацию вектора $\Delta \mathbf{O}$ относительно оси симметрии контактной области, хорошо аппроксимируются функциями $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$; в частном случае установлены точные соотношения [19]:

$$J'(\theta_0 = \pi/2, \alpha) = (\pi^2/2) \cos \alpha, \quad K'(\pi/2, \alpha) = (\pi^2/2) \sin \alpha$$

Покажем, что эти простейшие зависимости получаются и для шарнира с жидкой смазкой. При этом в области контакта на элементарную площадь dS в окрестности точки M действует сила вязкого трения $d\mathbf{R}'_{\tau}$, пропорциональная относительной скорости частей шарнира в этой точке: $d\mathbf{R}'_{\tau} = -k_{\tau} \Delta \mathbf{v}(M) dS$, где $k_{\tau} > 0$ – размерный коэффициент вязкого трения, увеличивающийся с возрастанием контактного давления. Подставляя $d\mathbf{R}'_{\tau}$ в интегралы (3.1), получим величины силы жидкостного трения и двух составляющих вектора его момента: $R'_{\tau} = R'_{\tau}(\theta_0, \alpha = 0) \cos \alpha$, $M'_{\tau Y} = M'_{\tau Y}(\theta_0, \alpha = 0) \cos \alpha$, $M'_{\tau Z} = M'_{\tau Z}(\theta_0, \alpha = \pi/2) \sin \alpha$. Таким образом, качественно различные законы сухого и вязкого трения (в жидкости отсутствует трение покоя) при вращении сферического шарнира приводят к тому, что интегральное действие сухого трения становится аналогичным действию вязкого. Иными словами, происходит кажущееся превращение сухого трения в вязкое.

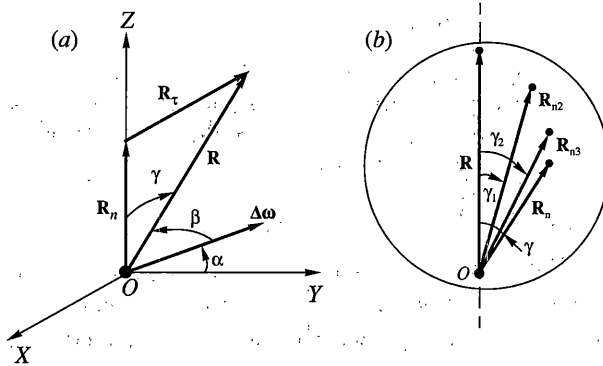
Анализ этого эффекта показал, что в его основе лежит механизм взаимного влияния поступательного движения (скольжения) полюса A и вращения (верчения) шарнира вокруг оси симметрии [19, 23]. Аналогичное явление подробно исследовано для случаев внешнего контакта тел, в частности, для движения пластин различной формы по шероховатой плоскости [2, 20–22].

Примеры сопоставления коэффициентов трения в шарнире, полученных на основе модели взаимодействия трения скольжения и верчения (штриховые линии), с их точными значениями (сплошные линии) приведены на фиг. 8, 9. Видно, что принятая модель правильно объясняет поведение кривых. Отличия при больших контактных углах обусловлены влиянием сферичности контактной области, когда вклад угловой скорости скольжения в скорости ее точек становится заметным.

4. Практический расчет связанного движения тел с учетом трения в шарнирах. Как показано выше, моменты трения нелинейным образом зависят от неизвестных сжимающих сил, в свою очередь зависящих от моментов трения. Для преодоления этого замкнутого круга целесообразно перенести моменты трения в правые части соотношений для расчета полных сил и моментов реакций и затем использовать вычислительный алгоритм с двумя итерационными циклами [19, 23].

Во внешнем цикле по заданным значениям моментов трения $M_{\tau i}$ определяются полные силы реакций \mathbf{R}_i во всех шарнирах. Таким образом, моменты трения считаются заданными, как и другие активные силы и моменты, действующие на тела [7]. В начале расчета в качестве первого приближения полагаем шарниры идеальными – $M_{\tau i} = 0$.

В случае статически определимых узлов крепления полная сила реакции \mathbf{R}_i ($i = 1, \dots, L$), равная сумме сжимающей силы \mathbf{R}_{ni} и перпендикулярной ей силы трения $\mathbf{R}_{\tau i}$ (фиг. 7, 10), и момент трения $M_{\tau i}$ в каждом узле определяются достаточно просто, поскольку слабо зависят от упругих свойств конструкции, наличия или отсутствия люфтов в шарнирах и других неидеальностей. В статически неопределимых системах расчет значительно усложняется, поскольку становится существенным учет реальных свойств конструкции (решение этой общей задачи выходит за рамки статьи).



Фиг. 10

На первой внешней итерации (при нулевых моментах трения) расчет производится по формулам п.1. При последующих внешних итерациях во избежание повторных расчетов и непроизводительных затрат машинного времени целесообразно считать только добавки $\delta R_i, \delta M_i$ к идеальным реакциям, определяемые через моменты трения $M_{i\tau}$. Линейные соотношения для добавок получаются из соответствующих формул п. 1 при сохранении в правых частях только моментов трения.

В результате достигается следующее сокращение количества арифметических операций: для разворота грузов на сферических шарнирах показатель экономии по сравнению с численным решением методом квадратного корня $\bar{N} = (9L^3 + 23L^2 + 67L - 3)/(120L + 66)$, для разворота на осях $\bar{N} = 1/6(250L^3 + 375L^2 + 959L + 54)/(204L + 66)$.

Аналитический алгоритм при $L \geq 2$ становится экономичнее численного метода: при $L = 4$ требуется в 2.2 раза меньше операций при вращении на сферических шарнирах и в 4.9 раза при вращении на осях, а при $L = 6$ – уже в 4 и 9.4 раза соответственно. Таким образом, вычислительная эффективность аналитического подхода при последующих итерациях внешнего цикла заметно возрастает по сравнению с первой итерацией.

Во внутреннем итерационном цикле производится разложение полученных значений полных сил на сжимающие силы и силы трения. В каждом сферическом шарнире неизвестная сжимающая сила определяется как катет силового треугольника, гипотенуза которого равна заданной полной силе реакции (фиг. 10, а):

$$R_n = R \cos \gamma \tag{4.1}$$

Из свойства прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу, следует, что концы векторов сжимающих сил R_{nk} , получаемых в итерациях ($k = 1, \dots$) при соответствующих углах трения γ_k , находятся на поверхности сферы, описанной около вектора R как вокруг диаметра (фиг. 10, b). При этом, как показано ниже, происходит уменьшение величины сжимающей силы и приближение к ее истинному направлению.

При известном угле трения угол α , задающий ориентацию вектора относительной угловой скорости относительно сжимающей силы, определяется по соотношению [24]:

$$\sin \alpha = \cos \beta / \cos \gamma \tag{4.2}$$

где β – угол между векторами полной силы реакции и относительной угловой скорости (фиг. 10, а). Угол трения между векторами полной и сжимающей сил составляет $\gamma = \arctg f_\tau$, где $f_\tau = f_\tau^0 (\chi + \bar{A}_\tau I')$ – коэффициент трения в шарнире (см. (3.7)). Безраз-

мерный параметр $\bar{A}_\tau = A_\tau / f_\tau^0 \bar{p}$ ($\bar{p} = R_n / \rho^2$ – среднее давление в шарнире) характеризует относительный вклад адгезии в суммарное действие трения.

Поскольку коэффициент χ и интеграл I' зависят от угла α и контактного угла θ_0 (п. 2, 3), которые сначала неизвестны, то необходимо задать их начальные приближения. С учетом (4.2) можно принять на первом шаге

$$\gamma_1 = 0; \quad \alpha_1 = \pi/2 - \beta \quad (4.3)$$

При росте коэффициента трения сходимость итераций замедляется, так как различие между сжимающей и полной силой возрастает. Значительное влияние на сходимость оказывает адгезия материалов, поскольку определяющий ее параметр \bar{A}_τ быстро растет при уменьшении сжимающей силы. В приведенных ниже примерах расчета для иллюстрации эффективности итерационного алгоритма приняты значительно завышенные значения коэффициентов трения.

После достижения во внутреннем цикле заданной точности расчета сжимающих сил управление алгоритмом передается во внешний цикл, где определяются уточненные значения моментов трения и полных сил реакций.

5. Примеры расчетов. 5.1. Рассмотрим сходимость итераций внутреннего цикла при пространственном развороте на сферическом шарнире двух крупногабаритных ступеней летательного аппарата (ЛА). Радиус шарнира 0.05 [м], относительный зазор $\bar{\epsilon} = 0.001$. Модули Юнга материала (стали) $E_{1,2} = 2 \cdot 10^{11}$ [Н/м²], коэффициенты Пуассона $\nu_{1,2} = 0.3$. Коэффициент трения принят равным $f_\tau^0 = 0.1$, отношение $A_\tau / f_\tau^0 = 4 \cdot 10^8$ [Н/м²]; параметр, определяющий вклад адгезии, $\bar{A}_\tau = 5$ [10].

Сжимающая сила в шарнире $R_n = 2 \cdot 10^5$ [Н], угол $\alpha = 30^\circ$, параметр нагружения $\mu = 0.55$, контактный угол $\theta_0 = 42.6^\circ$, сила трения $R_\tau = f_\tau R_n = 1.71 \cdot 10^5$ [Н], полная сила реакции $R = 2.63 \cdot 10^5$ [Н], угол трения $\gamma = \text{arctg} f_\tau = 40.5^\circ$, угол между векторами суммарной силы реакции и угловой скорости $\beta = \text{arccos}(\sin \alpha \cos \gamma) = 67.6^\circ$ (фиг. 10, а).

Для определения значений R_n , α , γ по заданным R и β получим следующую последовательность итераций. На первом шаге по (4.1–4.3) и формулам п. 2 определяем: $\gamma = 0$, $\alpha = 22.4^\circ$, $R_n = 2.63 \cdot 10^5$ [Н], $\bar{A}_\tau = 3.8$, $\mu = 0.72$, $\theta_0 = 46.0^\circ$. На втором шаге с использованием таблиц [19] соответственно получаем 36.9° , 28.4° , $2.1 \cdot 10^5$ [Н], 4.67 , 0.59 , 43.6° . На третьем шаге $\gamma = 40.1^\circ$, $\alpha = 29.8^\circ$, $R_n = 2.04 \cdot 10^5$ [Н].

За три итерации достигнута точность $\sim 2\%$, что вполне приемлемо для инженерных расчетов. В процессе счета векторы \mathbf{R}_{nk} ($k = 1, \dots$) приближаются к точному значению \mathbf{R}_n , причем концы этих векторов находятся на поверхности сферы, диаметр которой совпадает с вектором \mathbf{R} (фиг. 10, б).

5.2. Рассмотрим разворот двух тяжелых ступеней ЛА – носителя и груза – в их общей плоскости симметрии на оси, проходящей через два сферических шарнира ($\alpha = 0$, $\beta = 90^\circ$) [24]. Шарниры имеют те же прочностные и геометрические параметры, что и выше. Коэффициент трения $f_\tau^0 = 0.25$, отношение $A_\tau / f_\tau^0 = 10^9$ [Н/м²].

Силы реакций (заданы в [Н]) в каждом шарнире зависят от суммарного момента трения M_τ (в [Н · м]) следующим образом:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad R_x = 1.122 \cdot 10^6 \\ R_y &= 3.23 \cdot 10^5 - 0.026 M_\tau, \quad M_\tau = 2 f_\tau^0 \rho R_n (\sigma_y + \bar{A}_\tau J') \end{aligned} \quad (5.1)$$

Трение препятствует относительному развороту груза на угол ϕ , сообщая ему относительное угловое ускорение (фактически – торможение) $\ddot{\phi}_\tau = -6.5 \cdot 10^{-6} M_\tau$ [град/с²].

В первом приближении внешнего цикла шарниры принимаются идеальными – $M_\tau = \ddot{\phi}_\tau = 0$, $R = 1.168 \cdot 10^6$ [Н], относительное угловое ускорение груза $\ddot{\phi} = 8.67$ [град/с²].

Во внутреннем цикле происходит уточнение сжимающей силы: на первом шаге $\gamma = 0$, $R_n = 1.168 \cdot 10^6$ [Н], $\bar{A}_\tau = 2.1$, $\mu = 3.2$, $\theta_0 = 64.4^\circ$; на четвертом соответственно – 74.7° ; $3.1 \cdot 10^5$ [Н], 8.1, 0.95, 48.0° (отчетливо видно быстрое уменьшение сжимающей силы и области контакта).

На втором шаге внешнего цикла, используя (5.1), получаем: $R_n = 2.77 \cdot 10^5$ [Н], $\bar{A}_\tau = 9.0$, $\mu = 0.76$, $\theta_0 = 46.5^\circ$, $M_\tau = 1.2 \cdot 10^5$ [Н · м], $R = 1.167 \cdot 10^6$ [Н], $\ddot{\phi}_\tau = -0.78$ [град/с²]. Во внутреннем цикле имеем: на первом шаге $\gamma = 76.3^\circ$, $R_n = 2.76 \cdot 10^5$ [Н], $\bar{A}_\tau = 9.0$, $\mu = 0.76$, $\theta_0 = 46.4^\circ$; на третьем – 77.3° , $2.57 \cdot 10^5$ [Н], 9.7, 0.7, 45.6° .

На третьем шаге внешнего цикла получим аналогично второму шагу: $2.53 \cdot 10^5$ [Н], 9.9, 0.69, 45.4° , $1.16 \cdot 10^5$ [Н · м], $1.167 \cdot 10^6$ [Н], -0.75 [град/с²].

Таким образом, по величине относительного углового ускорения груза, вызванного тормозящим действием трения, за три итерации достигнута приемлемая точность $\sim 3.5\%$.

Видно, что внешний цикл (по моментам трения) сходится гораздо быстрее внутреннего (по силам), в результате чего полная сила реакции изменяется во внешнем цикле весьма незначительно. Это объясняется типичным для технических систем обстоятельством: радиусы шарниров в десятки раз меньше, чем расстояния от центра масс носителя до шарниров (это отношение является малым параметром данной задачи [24]). Поэтому моменты трения в шарнирах примерно в таком же отношении меньше моментов сил трения относительно центров масс носителя (см. (1.1, 1.2)) и не оказывают существенного влияния на полные силы реакций и, следовательно, на связанное движение тел (например, в рассмотренном случае торможение из-за трения составляет менее 10% от полного относительного ускорения груза).

Из приведенных результатов следует, что даже при завышенных значениях коэффициента трения с учетом адгезии достаточная для практики точность расчета достигается за небольшое число шагов. Поэтому предложенный алгоритм может послужить надежной базой для разработки эффективных динамических моделей систем шарнирно связанных тел.

6. Принцип наименьшего сопротивления для систем тел. Как показано выше, во внутренних циклах итераций (при вычисленных во внешнем цикле значениях полных сил реакций) происходит снижение сжимающих сил в шарнирах; в свою очередь, это приводит к уменьшению области контакта и величин моментов трения в шарнирах на последующих шагах внешнего цикла. Тем самым реализуется своеобразная отрицательная обратная связь по трению и его моменты стремятся к своим наименьшим значениям $M_\tau \rightarrow \min M_\tau$. В результате после достижения заданной точности величина торможения относительного разворота тел, вызываемого трением, также минимизируется. Ускорения тел приближаются к идеальным ускорениям, которые реализовались бы в данный момент времени при исчезновении трения в шарнирах (при условии сохранения положений и скоростей тел). Это можно сравнить с известным процессом “приработки” подшипников скольжения, когда при их эксплуатации постепенно происходит уменьшение трения вследствие стирания механических неровностей на контактирующих поверхностях [10, 12].

Таким образом, результаты моделирования движения конкретных носителей с грузами подтверждают общий принцип наименьшего сопротивления движению механических систем с трением (Н.Г. Четаев, 1934 г. [25]).

Отметим в заключение, что применяемый обычно способ вычисления момента трения в цилиндрических шарнирах в виде функции от величины полной силы реакции R (а не сжимающей силы R_n) не соответствует этому принципу [26]. При больших коэффициентах трения, которые реализуются при действии адгезии, имеет место значительное завышение торможения относительного разворота тел: так, в примере (п. 5.2) традиционный расчет дал бы вдвое большее торможение. Вместе с тем при малом трении этот способ вполне допустим на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ишлинский А.Ю. Механика гироскопических систем. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 482 с.
2. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
3. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
4. Лилов Л.К. Моделирование систем связанных тел. М.: Наука, 1993. 272 с.
5. Кейн Т.Р., Левинсон Д.А. Вывод уравнений движения для сложных космических летательных аппаратов // Ракетная техника и космонавтика. 1980. № 9. С. 158–173.
6. Леутин А.П. Аналитическое приведение динамических уравнений связанных тел к нормальной форме // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 5. С. 19–24.
7. Леутин А.П. Экстремальное свойство реакций связей систем соединенных тел // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 5. С. 878–885.
8. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
9. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 318 с.
10. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
11. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
12. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
13. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 575 с.
14. Теплый М.И. Контактные задачи для областей с круговыми границами. Львов: Высш. шк., 1983. 176 с.
15. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
16. Усов П.П. Определение зоны контакта и контактных напряжений при внутреннем соприкосновении цилиндрических тел // Машиноведение. 1981. № 6. С. 75–81.
17. Бондарева В.Ф. Контактные задачи для сферы // Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. С. 231–238.
18. Ligterink D.J. Frictional torque numbers for ball cup and journal bearings // Wear. 1982. V. 76. № 3. P. 293–298.
19. Ильин В.А., Леутин А.П. Сила трения и момент сил трения в шарнирных узлах крепления с учетом зависимости коэффициента трения от давления // Учен. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19, № 3. С. 60–74.
20. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
21. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
22. Киреевков А.А. Метод вычисления силы трения и момента сил трения в комбинированной модели сухого трения для круговых площадок контакта // Изв. АН. МТТ. 2003. № 3. С. 51–56.
23. Леутин А.П. Динамические эффекты в сферических шарнирах с сухим трением // Учен. зап. ЦАГИ. 2000. Т. 31. № 3–4. С. 55–67.
24. Ильин В.А. Сила трения и момент сил трения в шарнирных узлах крепления при развороте двух летательных аппаратов относительно этих узлов // Учен. зап. ЦАГИ. 1986. Т. 17, № 1. С. 64–81.
25. Четаев Н.Г. Устойчивость движения и работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
26. Артоболевский И.И. Теория механизмов. М.: Наука, 1967. 719 с.