

УДК 531.3

© 2005 г. В.Ф. ЖУРАВЛЁВ, Д.М. КЛИМОВ

## О ДИНАМИКЕ ВОЛЧКА ТОМСОНА (ТИП-ТОП) НА ПЛОСКОСТИ С РЕАЛЬНЫМ СУХИМ ТРЕНИЕМ

Динамике волчка Томсона посвящена обширная литература. Достаточно подробную библиографию можно найти в [1].

Наиболее принципиальным моментом в процессе построения математической модели такого волчка является выбор характера взаимодействия волчка и плоскости, на которую он опирается, в точке контакта. Чаще всего в задачах качения тел по твердым поверхностям используется условие отсутствия проскальзывания, приводящее к неголономной постановке задачи.

На неудовлетворительность такой постановки было обращено внимание в статье Контенсу [2]. В этой работе было показано в частности, что применение закона сухого трения Кулона в дифференциальной форме с последующим интегрированием по площадке контакта приводит к тому, что главный вектор сил сухого трения скольжения при достаточно больших угловых скоростях вращения приобретает черты вязкого трения.

Полная модель сухого трения в контакте (не только главный вектор, но и главный момент) без ограничений на кинематику скольжения была построена в [3]. Эта модель и используется в настоящей заметке, в которой изучаются как вопросы локального анализа (устойчивость стационарных вращений), так и глобальное поведение волчка, включая поражающий любознательного наблюдателя эффект его полного переворота.

**1. Модель сухого трения.** Приведем некоторые используемые в дальнейшем основные факты, следуя работе [4]. Будем рассматривать область контакта в виде круга радиуса  $\rho$ , в котором нормальное напряжение зависит только от расстояния  $\tau$  до центра круга:  $\sigma(\tau)$ . Относительное скольжение осуществляется со скоростью  $v$ , угловая скорость вращения обозначена  $\omega$  (фиг. 1).

Скорость относительного скольжения  $\mathbf{v}_c$  в точке области контакта, имеющей полярные координаты  $\tau, \theta$  выражается так  $\mathbf{v}_c = (v - \omega\tau\sin\theta, \omega\tau\cos\theta)$ .

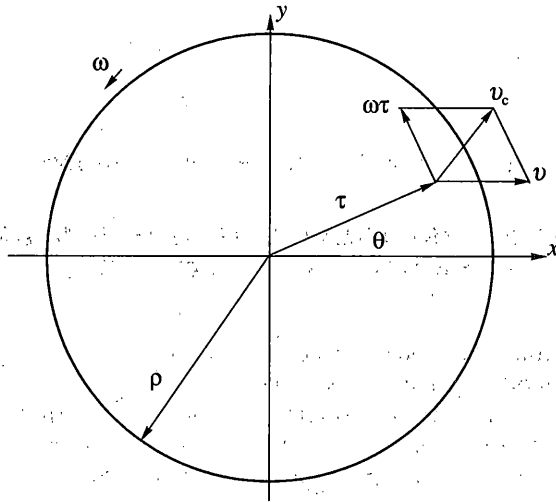
Дифференциал силы трения, направленной против относительной скорости в этой точке, в соответствии с законом Кулона имеет вид

$$d\mathbf{F} = -f\sigma(\tau) \frac{\mathbf{v}_c}{|\mathbf{v}_c|} ds$$

где  $f$  – коэффициент сухого трения.

Момент этой элементарной силы есть

$$dM = \tau_x dF_y - \tau_y dF_x = -f\sigma(\tau)(\tau\omega - v\sin\theta)\tau ds/|\mathbf{v}_c|$$



Фиг. 1

Введем обозначения  $u = \omega\rho$ ,  $r = \tau/\rho$ . Учитывая эти обозначения, получим выражения для момента и для ненулевой компоненты силы

$$M(u, v) = -f\rho^3 \int_0^1 r^2 \sigma(r) \int_0^{2\pi} \frac{ur - v \sin \theta}{\sqrt{u^2 r^2 - 2uvr \sin \theta + v^2}} d\theta dr \quad (1.1)$$

$$F(u, v) = -f\rho^2 \int_0^1 r \sigma(r) \int_0^{2\pi} \frac{v - ur \sin \theta}{\sqrt{u^2 r^2 - 2uvr \sin \theta + v^2}} d\theta dr$$

В представленной форме в наиболее распространенном случае контакта по Герцу оба выражения имеют вид эллиптических интегралов, однако, в подходящем образом выбранных переменных, они могут быть вычислены в элементарных функциях [3].

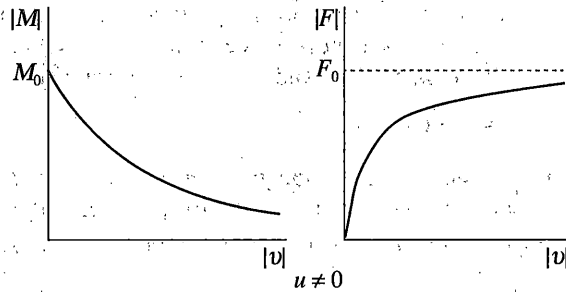
Типичное поведение функций  $M(u, v)$  и  $F(u, v)$  в зависимости от скорости скольжения  $v$  изображено на фиг. 2, переменная  $u$  рассматривается в качестве параметра. Эти функции могут быть удобно представлены следующими аппроксимациями Паде:

$$M = -M_0 \frac{u}{|u| + \alpha|v|}, \quad F = -F_0 \frac{v}{|v| + \beta|u|}, \quad u^2 + v^2 \neq 0 \quad (1.2)$$

Коэффициенты  $M_0$ ,  $F_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  Паде-аппроксимации (1.2) выражаются через четыре первых момента распределения нормального напряжения в области контакта. Например, для точечного контакта по Герцу, т.е. в случае распределения нормальных напряжений по формуле

$$\sigma(r) = \frac{N}{2\pi\rho^2} \sqrt{1-r^2}$$

для коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  можно получить:  $\alpha = 15\pi/16$ ,  $\beta = 8/3\pi$ . Для некоторых других законов распределения нормального напряжения значения коэффициентов модели (1.2) приведены в [4]. С теорией аппроксимаций Паде можно познакомиться в [5].



Фиг. 2

Заметим, что хотя формулы (1.2) аналитически следуют из (1.1) их можно рассматривать также и как самостоятельную модель сухого трения при комбинированной кинематике. В этом случае все коэффициенты такой модели подлежат экспериментальному определению.

Модель сухого трения (1.2) является прямым обобщением одномерного закона Кулона, который из неё следует

$$M|_{v=0} = -M_0 \operatorname{sign} u, \quad F|_{u=0} = -F_0 \operatorname{sign} v$$

К модели (1.2) следует добавить выражение для зоны застоя, вычисленное в [6]:

$$M^2/M_0^2 + F^2/F_0^2 = 1 \tag{1.3}$$

Никаких ограничений на скорости в этой модели нет. Представляется важным подчеркнуть два обстоятельства.

Во-первых, эта модель не эквивалентна модели вязкого трения. Сила трения становится похожей на вязкую силу лишь при больших угловых скоростях вращения  $u$ , когда из (1.2) можно получить приближенно

$$F \approx -\frac{F_0}{\beta\rho|\omega|} v = -\xi v \tag{1.4}$$

Но даже и тогда, когда можно считать угловую скорость вращения большой, не следует забывать о том, что получающийся коэффициент диссипации

$$\xi = F_0/\beta\rho|\omega| \tag{1.5}$$

зависит от этой скорости и при анализе областей устойчивости это необходимо учитывать. При изучении глобального поведения волчка ограничиваться законом (1.4) нельзя. Необходимо исходить из полной модели (1.2).

Во-вторых, нетрудно видеть, что функции (1.1) и (1.2) по совокупности переменных  $u, v$  не имеют предела в нуле (частичные пределы не совпадают). Отсюда в частности следует, что при стремлении радиуса пятна контакта к нулю нельзя получить в качестве предела одномерный закон Кулона.

Таким образом, из модели реального сухого трения в общем случае нельзя получить ни упрощенной одномерной модели, ни вязкой модели. Распространенная в литературе модель “абсолютно шероховатой поверхности” является синтетической моделью, не обеспечиваемой никакими реальными физическими силами.

**2. Уравнения вращательных движений симметричного твердого тела.** Наиболее простые уравнения динамики твердого тела, которые не имеют вырождений ни при

каких его ориентациях, можно получить для динамически симметричного случая следующим образом. Пусть ось динамической симметрии задаётся единичным вектором  $\mathbf{e}$ . Вектор момента количеств движения можно представить так [7]:

$$\mathbf{K} = A\boldsymbol{\omega}_{\perp} + C\mathbf{r}\mathbf{e}, \quad (C\mathbf{r} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e} = H) \quad (2.1)$$

здесь  $A$  – экваториальный момент инерции волчка,  $C$  – полярный момент инерции,  $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$  – проекция угловой скорости волчка на плоскость, перпендикулярную оси симметрии (вектору  $\mathbf{e}$ ),  $r$  – проекция угловой скорости волчка на эту ось. Из (2.1) найдем  $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ :

$$\boldsymbol{\omega}_{\perp} = (\mathbf{K} - (\mathbf{K} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e})/A \quad (2.2)$$

Учитывая, что  $r\mathbf{e} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}/C$ , для полной угловой скорости волчка получим выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\perp} + r\mathbf{e} = \frac{1}{A}\mathbf{K} + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)(\mathbf{K} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \quad (2.3)$$

в котором угловая скорость выражена только через кинетический момент и единичный вектор оси симметрии.

Для построения кинематических уравнений исходим из формулы Эйлера  $\dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}$ . Подставляя в нее (2.3) и затем (2.2), находим  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{K} \times \mathbf{e}/A$ .

Если момент внешних сил зависит от положения оси симметрии и от угловой скорости и не зависит от угла поворота волчка вокруг оси симметрии, то полная замкнутая система уравнений, описывающая его движение около неподвижной точки, имеет вид

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}(\mathbf{e}, \boldsymbol{\omega}), \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{K} \times \mathbf{e}/A \quad (2.4)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  выражается через  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{K}$  формулой (2.3). Фазовые переменные в системе (2.4) есть проекции векторов  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{e}$  на оси неподвижной системы координат  $(k_x, k_y, k_z, e_x, e_y, e_z)$ .

Имеется один первый интеграл  $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$ . Эти уравнения ранее были использованы в задаче о раскрутке шара в магнитном поле [8]. При численном интегрировании задачи о перевороте волчка будем исходить именно из этих уравнений. Для поиска же частных решений удобнее исходить из несколько другой формы этих уравнений, полученной в [7].

**3. Вторая форма уравнений динамически симметричного твердого тела.** Эта форма получается после исключения из системы (2.4) переменной  $\mathbf{K}$ . Дифференцируя второе уравнение этой системы, получим

$$\ddot{\mathbf{e}} = \frac{1}{A}(\dot{\mathbf{K}} \times \mathbf{e} + \mathbf{K} \times \dot{\mathbf{e}}) = \frac{1}{A}(\mathbf{M} \times \mathbf{e} + \frac{1}{A}\mathbf{K} \times [\mathbf{K} \times \mathbf{e}])$$

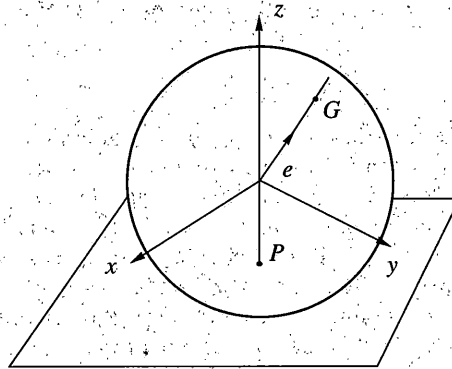
Откуда следует

$$A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} = \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + \frac{H}{A}\mathbf{e} \times \mathbf{K} = \mathbf{M} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - H\dot{\mathbf{e}}$$

Окончательно будем иметь

$$H\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}), \quad A\mathbf{e} \times \ddot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{M}_{\perp} \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{M}_{\perp}$  – проекция момента  $\mathbf{M}$  на плоскость, перпендикулярную вектору оси симметрии  $\mathbf{e}$ .



Фиг. 3

В прежних предположениях об аргументах момента  $M$  система (3.1) замкнута относительно фазовых переменных  $(H, e, \dot{e})$ , поскольку угловая скорость  $\omega$  разделяется на перпендикулярную оси  $e$  часть, равную  $\omega_{\perp} = e \times \dot{e}$  и на угловую скорость вокруг оси, что описывается переменной  $H$ .

**4. Уравнения динамики волчка тип-топ, опирающегося на горизонтальную плоскость в условиях кулонова трения.** Переменные, в которых будем описывать движение волчка, поясняются на фиг. 3. Силы, действующие на волчок в точке  $P$  его контакта с плоскостью, состоят из силы нормальной реакции  $N = Mk$ , где  $k$  представляет собой единичный вектор вертикальной оси, а также из силы и момента сухого трения, которые в соответствии с (1.2) могут быть записаны так:

$$F = \frac{F_0 V_p}{|V_p| + \beta |u|}, \quad M = \frac{M_0 u}{|u| + \alpha |V_p|}, \quad F_0 = fN \quad (4.1)$$

$$V_p = V_G - \omega \times (ae + Rk), \quad u = \rho \omega_z$$

Здесь  $R$  – радиус волчка,  $\rho$  – радиус пятна контакта,  $f$  – коэффициент сухого трения.

Уравнения движения волчка на плоскости с сухим трением будут

$$m\dot{V}_G = F + G + N \quad (4.2)$$

$$K = (ae + Rk) \times (F + N) + Mk$$

$$\dot{e} = K \times e / A$$

где  $G = -mgk$  – вес волчка,  $m$  – его масса,  $a$  – расстояние до центра масс.

К уравнениям следует добавить условие связи  $V_{pz} \equiv 0$ . Это условие позволяет вычислить реакцию связи

$$N = m(\dot{V}_{Gz} + g) = m\left(a \frac{d}{dt}(y\omega_x - x\omega_y) + g\right)$$

**5. Частные решения.** Движения волчка, на которых не рассеивается энергия, определяются условием  $F = 0$  и  $M = 0$ . В работах по динамике тел на жесткой поверхности последнее условие чаще всего принимается без обсуждения, как само собой разумеющееся. Это условие можно принять как некое приближение, если допустить, что радиус пятна контакта  $\rho$  мал по сравнению с радиусом волчка  $R$ .

Из условия  $\mathbf{F} = 0$  следует, что  $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}) = 0$  и в системе (3.1)  $H = \text{const}$  и остается уравнение

$$A\mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}} + H\dot{\mathbf{e}} = a\mathbf{e} \times \mathbf{N} \quad (5.1)$$

У этого уравнения существует два типа частных решений. Первый, когда  $\mathbf{e} \times \mathbf{N} = 0$  и  $\dot{\mathbf{e}} \equiv 0$  означает вращение волчка вокруг вертикали  $\mathbf{e} = \pm \mathbf{k}$ . Второй тип частных решений в (5.1) представляет собой регулярные прецессии, когда  $\dot{\mathbf{e}} = \nu \mathbf{k} \times \mathbf{e}$ . Подстановка этого решения в (5.1) позволяет определить модуль угловой скорости прецессии соотношением  $-A\nu^2 \cos\theta + H\nu = an$ , где  $\theta$  – угол между осью волчка и вертикалью (угол прецессии),  $n$  – модуль нормальной реакции, равный  $mg$ .

Устойчивость частных решений изучается посредством линеаризации уравнений (4.2) или (3.1) в окрестности этих решений. При этом устойчивость прецессий удобно изучать после дополнительного преобразования поворота с угловой скоростью прецессии.

Устойчивость вертикальных вращений ранее исследовалась в [2]. Устойчивость, как вертикальных вращений, так и регулярных прецессий полно и строго изучена в [9].

Что касается тех движений волчка Томсона, которые делают его столь занимательной игрушкой и благодаря которым он вызывает большой интерес, то это отнюдь не стационарные движения. Это те движения, при которых волчок из нижнего статически устойчивого положения равновесия, будучи закрученным, полностью переворачивается, попадая в верхнее статически неустойчивое положение равновесия. Объяснить такое поведение ссылкой на возможность устойчивого вращения вокруг верхнего положения недостаточно, необходимо указать хотя бы одну траекторию с переворотом. Ситуация осложняется еще и тем, что связь волчка с опорной поверхностью односторонняя, из-за чего требуется контроль знака нормальной реакции. Такой контроль должен осуществляться, каким бы методом ни решалась задача качественным, асимптотическим, или численным.

**6. Численное решение уравнений движения волчка.** На фиг. 4–13 представлены результаты численного решения уравнений (4.2) с использованием системы символических вычислений Maple при следующих значениях параметров волчка и начальных условиях:  $a = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $R = 1.5 \cdot 10^{-2}$  м,  $m = 6 \cdot 10^{-3}$  кг,  $A = 8 \cdot 10^{-7}$  кгм<sup>2</sup>,  $C = 7 \cdot 10^{-7}$  кгм<sup>2</sup>,  $z(0) = 0.9$ ,  $r(0) = 200$  1/сек.

На фиг. 4 показано, что, стартуя из малой окрестности нижнего положения равновесия ( $z(0) = -0.9$ ), волчок вначале входит в это положение равновесия (центр масс опускается), после чего устанавливается режим монотонного переворачивания, заканчивающийся в верхнем положении ( $z = 1$ ).

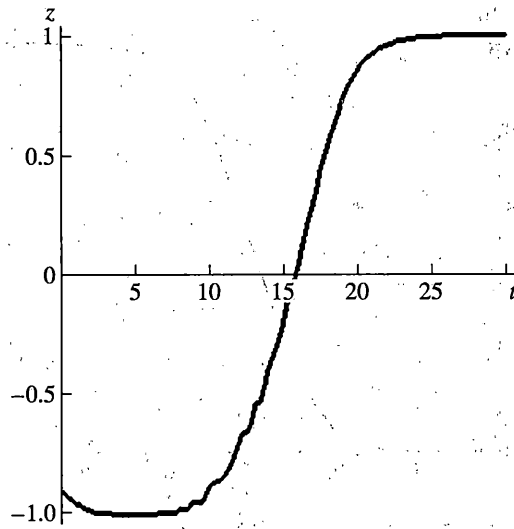
Из фиг. 5 следует, что в окрестности начального момента времени нормальная реакция становится меньше, чем вес волчка. Это, в частности, оправдывает требование проверки ее знака. Однако, на вычисляемой траектории отрыва волчка от опорной плоскости не происходит. Тем самым фиг. 4 полностью подтверждает экспериментально наблюдаемый эффект.

На фиг. 6 показана точность вычислений. В качестве меры точности берется отклонение от единицы нормы единичного вектора  $\mathbf{e}$ :  $\Delta = |\mathbf{e}| - 1$ .

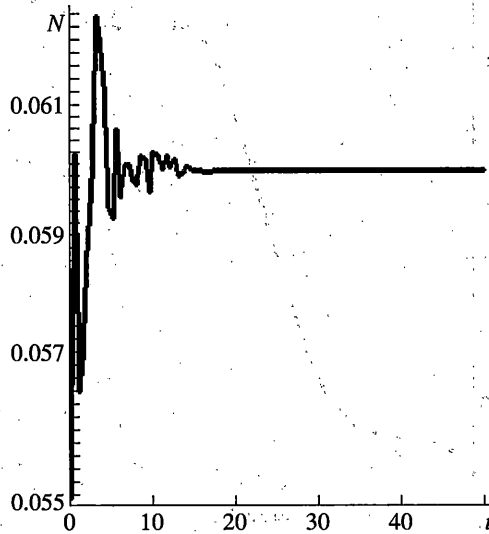
На фиг. 7 изображено поведение проекции угловой скорости волчка на вертикаль. Видно, что, несмотря на переворот волчка, знак этой проекции не меняется. Этот факт приходится отмечать потому, что некоторые авторы его наивно находят “парадоксальным”.

Поведение же проекции угловой скорости волчка на ось его симметрии приведено на фиг. 8. Такое поведение полностью согласуется фиг. 7.

На фиг. 9 изображено поведение проекции центра сферы на горизонтальную плоскость, а на фиг. 10 изображено поведение проекций сил сухого трения.



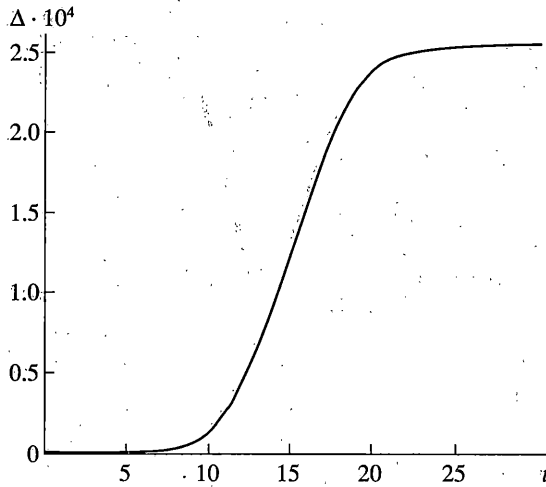
Фиг. 4



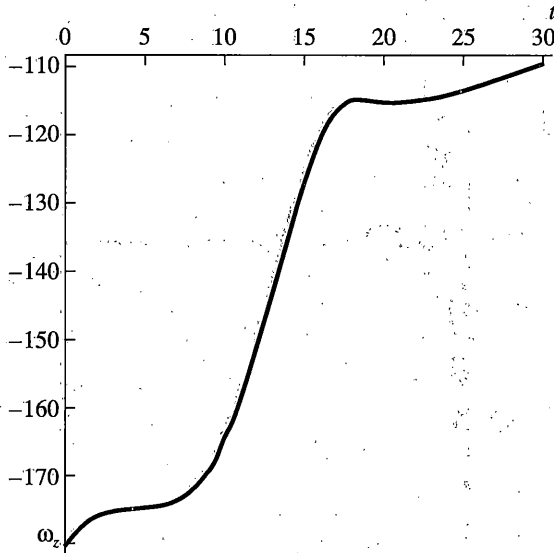
Фиг. 5

На фиг. 11 демонстрируется эффект изменения параметров волчка. В три раза уменьшена неуровновешенность  $a = 1 \cdot 10^{-3}$ . На графике видно, что полного переворота в этом случае не происходит, движение волчка стремится к регулярной прецессии с  $z = 0.4$ . Существование подобных стационарных режимов обсуждалось в пункте 5.

Последние две фиг. 12, 13 изображают решение, полученное в неголономной постановке. Соответствующие уравнения получаются из уравнений (4.2), в которых первое уравнение позволяет найти не только  $N$ , как это уже делалось в голономной постановке, но и  $F$ . Уравнения сильно упрощаются, однако полученные решения ничего общего ни с экспериментом, ни с решениями в голономной постановке не имеют.



Фиг. 6



Фиг. 7

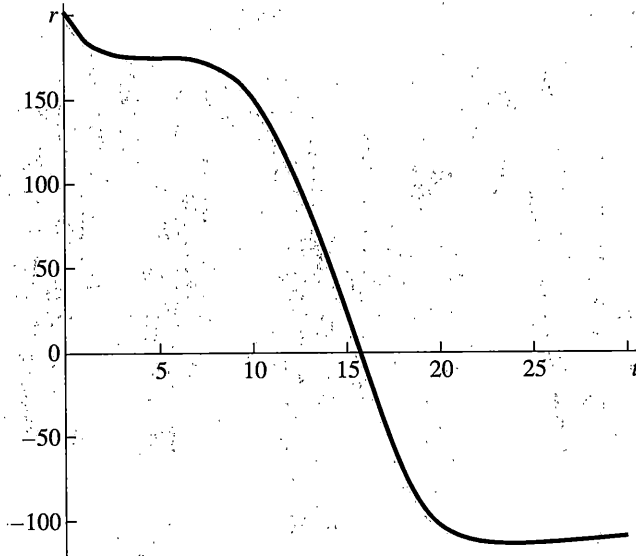
**7. Комментарий.** Главной целью настоящей работы помимо изучения динамики неустойчивого волчка явилось намерение обратить внимание специалистов, занимающихся задачами качения твердых тел по шероховатым поверхностям, на широко распространенное ошибочное представление о законах сухого трения в точке контакта тела с плоскостью.

Чаще всего приходится иметь дело с представлением, что сила сухого трения в точке контакта направлена против скорости скольжения и может быть записана в виде

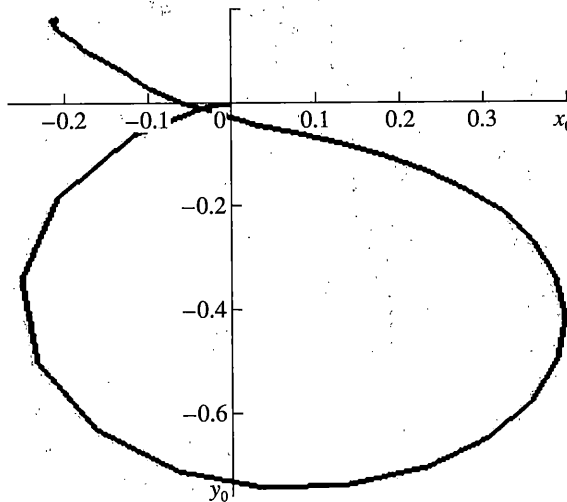
$$\mathbf{F} = -F_0 \mathbf{V}/|\mathbf{V}| \quad (6.1)$$

при этом проскальзывание отсутствует, если приложенная горизонтальная сила по модулю не превосходит  $F_0$ .





Фиг. 8

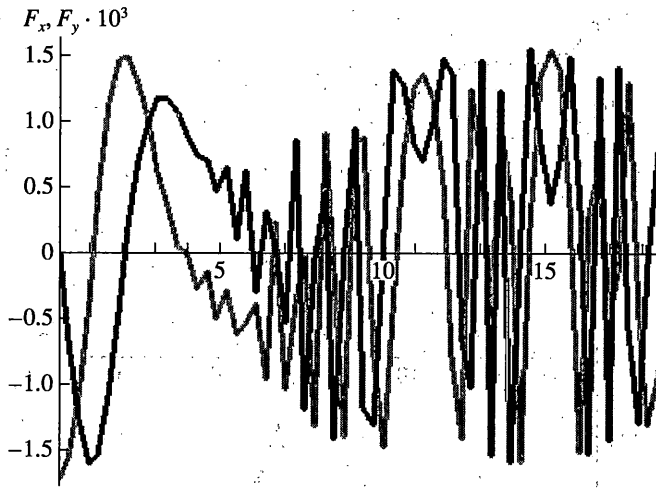


Фиг. 9

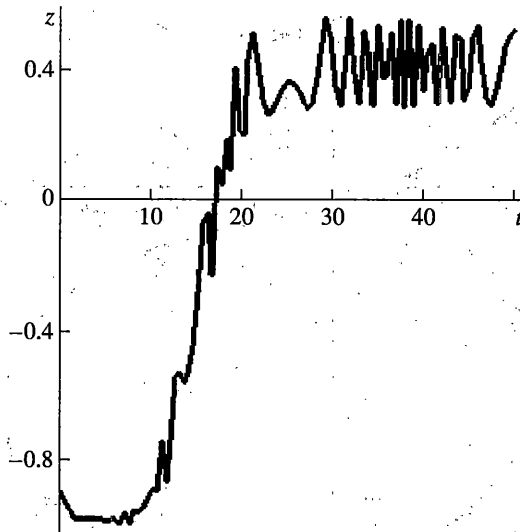
Закон (6.1) представляет собой умозрительное обобщение закона сухого трения Кулона на случай точечного контакта при произвольном скольжении. Между тем, изначально закон Кулона был сформулирован только для случая развитой площадки контакта и только для поступательного скольжения.

Такое обобщение является неправомерным. Закон (6.1) должен быть либо выведен из одномерного закона Кулона, либо приниматься в качестве новой гипотезы трения, отличной от классической.

Попытка строгого аналитического вывода такого закона трения, который можно было бы использовать в задачах качения твердых тел, и была предпринята Контенсу [2]



Фиг. 10



Фиг. 11

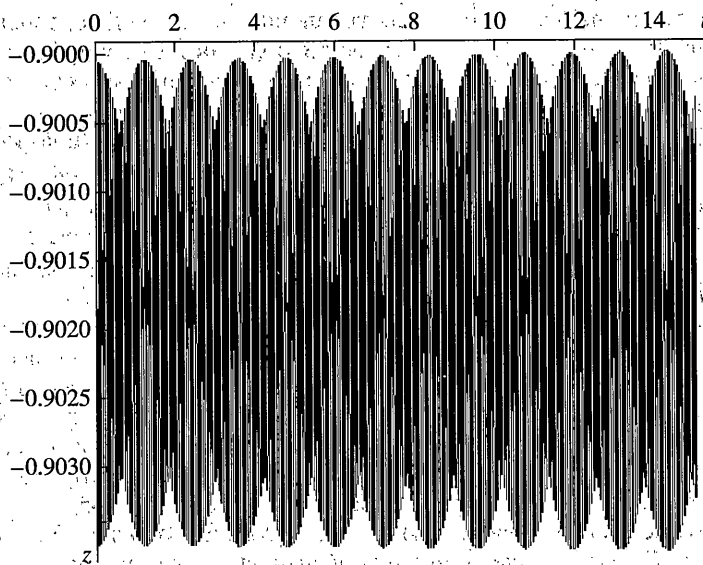
как раз в силу того, что закон (6.1), воспринимаемый как новая гипотеза трения, вступил в грубое противоречие с экспериментом.

Полученное Контенсу выражение для силы сухого трения в виде двойного интеграла по площадке контакта было вычислено точно в элементарных функциях в [3]. В этой же работе был также вычислен и момент элементарных сил трения и дано представление силы и момента дробно-линейными составляющими их разложений Паде (1.2), качественно эквивалентными интегральным представлениям.

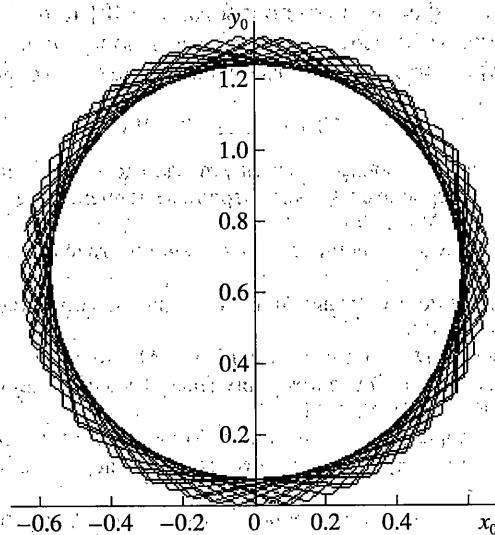
В частности вместо (6.1) следствием классического закона Кулона является формула

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_0 \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}| + \beta|u|} \quad (6.2)$$

которая совпадает с (6.1) только если  $u \equiv 0$ , то есть скорость вращения отсутствует.



Фиг. 12



Фиг. 13

Из сказанного следует, что неголономная постановка задачи о качении твёрдых тел по шероховатым поверхностям принципиально несостоятельна: условие отсутствия проскальзывания может быть принято только при  $u = 0$ , но в этом случае кинематическое условие оказывается интегрируемым, то есть связь является голономной.

К грубым ошибкам приводит использование закона (6.1) вместо (6.2) и тогда, когда проскальзывание есть. Эффект резкого уменьшения трения скольжения при появлении даже незначительного вращения хорошо известен на практике. Например, для перемещения полотера требуется приложить гораздо большую силу, если щетка не вращается. Явление заноса автомобиля на повороте также есть проявление закона трения (6.2).

Остановимся также на использованных уравнениях вращательного движения твердого тела (уравнения (2.4) и (3.1)). Эти уравнения обладают тремя преимуществами по сравнению с часто используемыми в подобных задачах уравнениями (уравнения Эйлера, уравнения в переменных Андуайе, уравнения в кватернионах и т.п.).

Во-первых, эти уравнения существенно проще любых других. Динамическая часть уравнений (2.4) т.е.  $\dot{K} = M$  в принципе не может выглядеть проще. Нелинейность здесь присутствует только в зависимости момента внешних сил от фазовых переменных, что представляет собой подробность конкретной задачи. Кинематическая часть уравнений  $\dot{e} = K \times e/A$  не содержит тригонометрических функций и является квадратично нелинейной.

Во-вторых, эти уравнения не вырождаются ни при каких значениях фазовых переменных. Таким же преимуществом обладают уравнения в кватернионах, однако они существенно сложнее. Именно по этой причине нельзя признать удачным решение уравнений динамики волчка в [12], где были использованы в качестве искомых переменных углы Эйлера, приводящие к особенностям при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ , то есть как раз в тех точках, которые представляют наибольший интерес. К недостаткам работы [12] можно отнести также достаточно грубое предположение, что  $N \approx mg$ .

Третье преимущество уравнений (2.4) состоит в том, что они записаны в наблюдаемых переменных. Ни углы Эйлера, никакие другие углы, ни кватернионы наблюдаемыми не являются. В противоположность этому получаемая в результате решения уравнений (2.4) зависимость  $e(t)$  дает предельно простое представление о движении.

Уравнения (2.4) были эффективно использованы в [8] при изучении движения неуравновешенного сферического ротора в магнитном поле. Эквивалентные им уравнения (3.1) позволили в [13] проинтегрировать уравнения ядерного магнитного резонанса.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 320 с.
2. Контенсу П. Связь между трением качения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 66–77.
3. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.
4. Журавлев В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 81–88.
5. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
6. Журавлев В.Ф., Киреев А.А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН. МТТ. № 2. 2005. С. 3–14.
7. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука. 2001. 320 с.
8. Мартыненко Ю.Г. Раскрутка гироскопа с неконтактным подвесом // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 5. С. 35–40.
9. Каранетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС. 1988. 165 с.
10. Румянцев В.В. Об устойчивости движения гироскопов некоторого вида // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 5–19.
11. Самсонов В.А. Ветвление и некоторые свойства нелинейных механических систем. Нелинейная механика. М.: Физматлит, 2001. С. 321–361.
12. Leine R.I., Glocker Ch. A set-valued force law for spatial Coulomb-Contensou friction // Europ. J. Mech. 2003. V. 22. P. 193–216.
13. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.