МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2005

УДК 539.4:624.07

 М.У. НИКАБАДЗЕ

К ВАРИАНТУ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассматривается параметризация каждого слоя многослойной плоской криволинейной стержневой области на основе двух базовых кривых аналогично работе [1]. Применение нескольких базовых кривых при параметризации многослойной плоской криволинейной стержневой области позволяет точнее описывать изменение по толщине напряженно-деформированного состояния этой области. При этом, если при рассмотрении многослойных плоских криволинейных стержневых конструкций в качестве базовых применяются лицевые кривые слоев, то это дает возможность более реально учитывать характер межслойных контактов.

Формулируется кинематическая гипотеза, порождающая теорию многослойных плоских криволинейных стержней. Из полученного принципа виртуальной работы выведены уравнения движения и равновесия и соответствующие граничные условия, а также выписаны межслойные контактные условия при полном контакте слоев. Кроме того, даны краткие формы записи уравнений и граничных условий.

1. Параметризация многослойной плоской криволинейной стержневой области с несколькими базовыми кривыми. Рассмотрим многослойную плоскую криволинейную стержневую область евклидова пространства, состоящую из не более чем счетного числа слоев. Пусть слои пронумерованы по возрастанию, т.е. если, например, α – номер какого-нибудь слоя, то номером предыдущего слоя будет $\alpha - 1$, а последующего – $\alpha + 1$. Полагаем, что $\alpha \geq 1$ и при $\alpha = 1$ предшествующих слоев не имеем. Каждый слой имеет две лицевые кривые. Лицевую кривую слоя α, находящуюся со стороны предыдущего слоя $\alpha - 1$, назовем внутренней базовой кривой и обозначим через $\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathrm{L}}}$, а лицевую кривую слоя $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathrm{L}}}$, находящуюся со стороны последующего слоя $\alpha + 1$, назовем внешней базовой кривой и обозначим через $\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathrm{L}}}$. Считаем, что лицевые кривые каждого слоя – регулярные кривые, и, кроме того, в случаях ограниченного незамкнутого слоя торцы являются отрезками (при $\alpha = 1$ аналогичный вариант теории рассмотрен в [1]).

2. Векторное параметрическое уравнение слоя и система векторных параметрических уравнений многослойной плоской криволинейной стержневой области. Радиус-вектор произвольной точки $\underset{\alpha}{\mathrm{M}}$ любого слоя α представляется в виде

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) = \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1) + x^2 \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1) = (1 - x^2)\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1) + x^2 \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1) \tag{2.1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \forall x^2 \in [0, 1]$$

где векторные соотношения

$$\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}} = \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1), \quad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}} = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1), \quad \forall\alpha \tag{2.2}$$

являются векторными уравнениями базовых кривых $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$ и $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$ соответственно, x^1 – криволинейная координата на внутренней базовой кривой $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$, а $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Вектор

$$\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1) = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1) - \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1) \tag{2.3}$$

топологически отображающий внутреннюю базовую кривую $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$ на внешнюю $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$ не является перпендикулярным к базовым кривым. Причем конец каждого $\underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1)$ является началом $\underset{\alpha+1}{\mathbf{h}}(x^1)$, $\forall\alpha$, т.е. имеет место соотношение[1]

$$\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1) = \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1) + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta} \underset{\nu}{\mathbf{h}}(x^1) = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1) + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta} \underset{\nu}{\mathbf{h}}(x^1) \ \forall\alpha, \delta \tag{2.4}$$

Рассматривая соотношение (2.1), нетрудно заключить, что оно при фиксированном α – векторное параметрическое уравнение слоя α, а при изменении α нужное число раз и соблюдении условий (2.4) представляет систему векторных параметрических уравнений многослойной плоской криволинейной стержневой области.

Следует заметить, что при $x^2 = 0$ из (2.1) получаем векторное уравнение внутренней базовой кривой $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$ (первое соотношение (2.2)), при $x^2 = 1$ – внешней базовой кривой $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$ (второе соотношение (2.2)), а при $x^2 = \mathrm{const}$, $x^2 \in (0, 1)$ – векторное параметрическое уравнение эквидистантной от базовых кривых кривой $\underset{\alpha}{\mathrm{L}}$. Очевидно, при $x^1 = \mathrm{const}$, $x^2 = 0$ (2.1) определяет лежащую на $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$ некоторую точку, которую обозначим через $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{M}}$, а точки, являющиеся образами точки $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{M}}$ и лежащие на кривых $\underset{\alpha}{\mathrm{L}}$ и $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathrm{L}}}$, обозначим через $\underset{\alpha}{M}$ и $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{M}}$ соответственно.

3. Различные семейства реперов (базисов) и порожденные ими соответствующие семейства параметризаций плоской области. Дифференцируя (2.1) по x^1 и x^2, получаем соответственно

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_1(x^1, x^2) = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar{1}}(x^1) + x^2 \underset{\alpha}{\mathbf{h}}_1(x^1) = (1 - x^2)\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar{1}}(x^1) + x^2 \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\overset{+}{1}}(x^1)$$

[1] Применяются обычные правила тензорного исчисления [2–4]. В основном сохранены обозначения и соглашения, принятые в ранее опубликованных работах, с тем отличием, что в данной работе и под символами пишем индексы, обозначающие номера слоев. Используемые греческие индексы под символами принимают значения от обстоятельств, а прописные и строчные латинские индексы пробегают значения 1, 2 и 1, 2, 3 соответственно.

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_2 = \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1) = \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}(x^1) - \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}(x^1), \quad \forall x^2 \in [0,1], \quad \forall \alpha \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

$$\partial_I = \frac{\partial}{\partial x^I}, \quad \mathbf{r}_I = \partial_I \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_{\bar{1}} = \partial_1 \overset{(-)}{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}_{\dot{1}} = \partial_1 \overset{(+)}{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{h}_1 = \partial_1 \mathbf{h}$$

Из второго соотношения (3.1) видно, что $\mathbf{r}_2$ не зависит от x^2, т.е. $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_2 = \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1)$, $\forall x^2 \in [0, 1]$. В связи с этим можно принять

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar{2}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_2 = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\dot{2}} = \underset{\alpha}{\mathbf{h}}(x^1) \tag{3.2}$$

В силу (3.2) соотношения (3.1) можно представить одним соотношением

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_I = (1-x^2)\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\bar{I}}(x^1) + x^2 \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\dot{I}}(x^1), \quad \forall \alpha \tag{3.3}$$

Двойки векторов $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{2}}$, определенные в точках $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{M}} \in \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{L}}$, $\sim \in \{-, \varnothing, +\}$, $\forall\alpha$, соответственно, очевидно, образуют двумерные ковариантные базисы, а $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{M}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{2}}$, $\sim \in \{-, \varnothing, +\}$, $\forall\alpha$, – двумерные ковариантные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации рассматриваемой плоской области. По этим реперам (базисам), как известно [2–4], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{M}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{2}}$ (базисы $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{1}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{2}}$), $\sim \in \{-, \varnothing, +\}$, $\forall\alpha$. Действительно, определяя вектора $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{J}}$ соотношением

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{I}} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}^{\tilde{J}} = \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde{I}}^{\tilde{J}}, \quad \forall \alpha \tag{3.4}$$

нетрудно показать, что они образуют базис, который называется контравариантным базисом, если $\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{I}}$ – базис. Очевидно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденными реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой точке кривой $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{L}}$, $\forall\alpha$, двумерные реперы (базисы), получим соответствующие семейства двумерных реперов (базисов), называемые $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{L}}{}_{\underset{\alpha}{g}(\sim)}$-семействами реперов (базисов) и порождающие ими соответствующие семейства параметризаций, называемые $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{L}}{}_{\underset{\alpha}{g}(\sim)}$-семействами параметризаций, $\sim \in \{-, \varnothing, +\}$, $\forall\alpha$. Геометрические характеристики, сопровождающие $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{L}}{}_{\underset{\alpha}{g}(\sim)}$-семейства параметризаций, будем называть $\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{L}}{}_{\underset{\alpha}{g}(\sim)}$-семействами геометрических характеристик (базисов, символов Кристофеля, компонент тензоров, ...), $\sim \in \{-, \varnothing, +\}$, $\forall\alpha$.

Определяя матрицы

$$\underset{\alpha}{g}_{\tilde I \check J} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde I} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\check J}, \quad \underset{\alpha\beta}{g}{}^{\bullet\bullet}_{\tilde I \check J} = \underset{\beta\alpha}{g}{}^{\bullet\bullet}_{\check J \tilde I} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde I} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\check J}, \quad \sim, \smile \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

и получаемые из них жонглированием индексами матрицы, видно, что в силу (3.4) имеют место соотношения

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_I = \underset{\alpha}{g}{}_I^{\tilde K} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde K} = \underset{\alpha}{g}_{I\tilde K} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde K}, \quad \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^I = \underset{\alpha}{g}{}^{I\tilde K} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde K} = \underset{\alpha}{g}{}^{I}_{\tilde K} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde K}, \quad \sim \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}$$

или более общие соотношения

$$\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde I} = \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde I}^{\check K} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\check K} = \underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde I \bullet}^{\bullet \check K} \underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\check K}, \quad \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde I}^{\check K} = \underset{\alpha\alpha}{g}{}_{\tilde I \bullet}^{\bullet \check K}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \quad \sim, \smile \in \{-, \varnothing, +\} \tag{3.6}$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

В силу первого соотношения (3.6) нетрудно показать, что

$$\underset{\alpha\beta}{g}{}_{\tilde I \bullet}^{\bullet \check K} = \underset{\alpha\delta}{g}{}_{\tilde I \bullet}^{\bullet \hat N} \underset{\delta\beta}{g}{}_{\hat N \bullet}^{\bullet \check K}, \quad \sim, \smile, \wedge \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall \alpha, \beta, \delta \tag{3.7}$$

В рассматриваемом случае ковариантные и контравариантные компоненты дискриминантного тензора для слоя α можно определить в виде

$$\begin{aligned} \underset{\alpha}{c}{}^{\bullet\bullet}_{\tilde I \tilde J} &= \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}\, \epsilon_{IJ} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde I} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde J}) \cdot \mathbf{n} = \left|\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde I} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde J}\right| \\ \underset{\alpha}{c}{}^{\tilde I \tilde J}_{\bullet\bullet} &= \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}{}^{-1}}\, \epsilon^{IJ} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde I} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde J}) \cdot \mathbf{n} = \left|\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde I} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde J}\right| \\ \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}} &= \det(\underset{\alpha}{g}_{\tilde I \tilde J}) > 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости слоя α.

На основании (3.6) и первого соотношения (3.8) имеем

$$\sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}\, \epsilon_{IJ} = (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde I} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde J}) \cdot \mathbf{n} = \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde I}^{\check K} \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde J}^{\check L} (\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\check K} \times \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\check L}) \cdot \mathbf{n} = \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\smile)}{g}}}\, \epsilon_{IJ} \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde I}^{\check K} \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde J}^{\check L}$$

а отсюда в свою очередь получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\smile)}{g}}}\, \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde I}^{\check K} \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde J}^{\check L}, \quad \forall \alpha, \quad \sim, \smile \in \{-, \varnothing, +\} \\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\sim}{\smile})}{\vartheta}} &= \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}\, \underset{\alpha}{\overset{(\smile)}{g}}{}^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde I}^{\check K} \underset{\alpha}{g}{}_{\tilde J}^{\check L}, \quad \forall \alpha, \quad \sim \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \smile \in \{-, +\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

При $\sim = \varnothing$, например, из второго соотношения (3.9) имеем

$$\underset{\alpha}{\overset{(\smile)}{\vartheta}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}\, \underset{\alpha}{\overset{(\smile)}{g}}{}^{-1}} = \epsilon_{KL} \underset{\alpha}{g}{}_1^{\check K} \underset{\alpha}{g}{}_2^{\check L} = \underset{\alpha}{g}{}_1^{\check 1} = (1 - x^2) \underset{\alpha}{g}{}_{\bar 1}^{\check 1} + x^2 \underset{\alpha}{g}{}_{\overset{+}{1}}^{\check 1}, \quad \forall \alpha, \quad \smile \in \{-, +\} \tag{3.10}$$

Из (3.10) при $\smile\, = -$ и $\smile\, = +$ получаем соответственно

$$\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\vartheta}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}\,\underset{\alpha}{\overset{(-)}{g}}{}^{-1}} = 1 + x^2\big(\underset{\alpha}{g}{}^{1}_{\overset{+}{1}} - 1\big), \quad \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\vartheta}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}\,\underset{\alpha}{\overset{(+)}{g}}{}^{-1}} = 1 + (1 - x^2)\big(\underset{\alpha}{g}{}^{\overset{+}{1}}_{\bar{1}} - 1\big), \quad \forall\alpha$$

Заметим также, что в силу (3.8) имеют место формулы

$$\mathbf{n}\times\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{I}} = \underset{\alpha}{c}{}^{\bullet\bullet}_{\tilde{I}\tilde{J}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{J}}, \quad \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{I}} = \underset{\alpha}{c}{}^{\tilde{I}\tilde{J}}_{\bullet\bullet}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{J}}\times\mathbf{n}, \quad \sim\,\in\{-, \varnothing, +\}, \quad \forall\alpha \tag{3.11}$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Из второго соотношения (3.11) с учетом первого соотношения (3.11) и (3.10) вектора $L_{\underset{\alpha}{g}}$-семейства контравариантного базиса с помощью $\underset{\alpha}{L}_{\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}$-семейства базисов, $\sim\,\in\{-, +\}$, представляются в виде

$$\begin{aligned}
&\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{I} = \underset{\alpha}{c}{}^{IJ}_{\bullet\bullet}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{J}\times\mathbf{n} = \underset{\alpha}{c}{}^{IJ}_{\bullet\bullet}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{K}}_{J}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{K}}\times\mathbf{n} = \underset{\alpha}{c}{}^{IJ}_{\bullet\bullet}\underset{\alpha}{c}{}^{\bullet\bullet}_{\tilde{L}\tilde{K}}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{K}}_{J}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{L}} = \sqrt{\underset{\alpha}{g}{}^{-1}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{g}}}\,\epsilon^{IJ}\epsilon_{LK}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{K}}_{J}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{L}}\\
&\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{I} = \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{IJ}\epsilon_{LK}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{K}}_{J}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{L}}, \quad \sim\,\in\{-, +\}, \quad \forall\alpha
\end{aligned} \tag{3.12}$$

На основании (3.3) и (3.12) нетрудно получить выражения следующих матриц

$$\begin{aligned}
&\underset{\alpha}{g}_{I\tilde{J}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{I}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{J}} = (1 - x^2)\underset{\alpha}{g}_{\bar{I}\tilde{J}} + x^2\underset{\alpha}{g}_{\overset{+}{I}\tilde{J}}, \quad \underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{J}}_{I} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{I}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{J}} = (1 - x^2)\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{J}}_{\bar{I}} + x^2\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{J}}_{\overset{+}{I}}\\
&\underset{\alpha}{g}{}^{I\tilde{N}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{I}}\cdot\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{N}} = \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{IJ}\epsilon_{LK}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{K}}_{I}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{L}\tilde{N}}, \quad \underset{\alpha}{g}{}^{I}_{\tilde{N}} = \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\vartheta}}{}^{-1}\epsilon^{IJ}\epsilon_{NK}\underset{\alpha}{g}{}^{\tilde{K}}_{J}, \quad \sim\,\in\{-, +\}, \quad \forall\alpha
\end{aligned} \tag{3.13}$$

В рассматриваемом случае для единичного тензора второго ранга, обозначаемого через **E**, в силу (3.6) и (3.7) имеем представление

$$\mathbf{E} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{I}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{I} = \underset{\alpha}{g}{}^{\breve{J}}_{I}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{I}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\breve{J}} = \underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\tilde{I}}\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{I}} = \underset{\beta}{g}{}^{\breve{J}}_{\tilde{I}}\underset{\beta}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{I}}\underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve{J}} = \underset{\alpha\beta}{g}{}^{\bullet\breve{J}}_{\tilde{I}}\underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde{I}}\underset{\beta}{\mathbf{r}}_{\breve{J}}, \quad \sim, \smile\,\in\{-, \varnothing, +\}, \quad \forall\alpha, \beta \tag{3.14}$$

Таким образом, из (3.14) видно, что элементы введенных соотношениями (3.5) матриц, к числу которых принадлежат также (3.13), являются компонентами единичного тензора второго ранга (в случае теории многослойных конструкций представление единичного тензора второго ранга дано в [5]).

4. Кинематическая гипотеза. Рассмотрим две конфигурации многослойной плоской криволинейной стержневой области – отсчетную[2] и актуальную.

Место произвольной точки слоя α многослойной плоской криволинейной стержневой области в актуальной конфигурации представляются в виде (2.1), а в отсчетной конфигурации задается радиус-вектором

$$\begin{aligned}
&\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) = \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1) + x^2\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{h}}}(x^1) = (1 - x^2)\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1) + x^2\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1)\\
&\forall\alpha\in\mathbb{N}, \quad \forall x^2\in[0, 1]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

---

[2] Величины, относящиеся к отсчетной конфигурации, будем отмечать знаком градуса сверху, а к актуальной – писать без знака градуса.

где векторные соотношения $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}} = \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1)$, $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}} = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1)$, $\forall\alpha$ являются векторными уравнениями базовых кривых $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathrm{L}}}}$ и $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathrm{L}}}}$ соответственно.

Вектор $\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{h}}}(x^1) = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1) - \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1)$, топологически отображающий внутреннюю базовую кривую $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathrm{L}}}}$ на внешнюю $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathrm{L}}}}$, перпендикулярен к внутренней базовой кривой $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathrm{L}}}}$.

Считаем, что аналогично (2.4) имеет место соотношение

$$\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1) = \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1) + \sum_{\nu=\alpha}^{\alpha+\delta} \underset{\nu}{\mathring{\mathbf{h}}}(x^1) = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1) + \sum_{\nu=\alpha+1}^{\alpha+\delta} \underset{\nu}{\mathring{\mathbf{h}}}(x^1), \quad \forall\alpha, \delta$$

Кинематическая гипотеза теории формулируется следующим образом: *место произвольной точки слоя α многослойной плоской криволинейной стержневой области, которое в отсчетной конфигурации определялось радиус-вектором (4.1), в актуальной конфигурации будет определяться радиус-вектором (2.1).*

Следует заметить, что в силу принятой кинематической гипотезы геометрические соотношения отсчетной конфигурации получатся из соответствующих соотношений актуальной конфигурации. Действительно, с этой целью достаточно величины, входящие в соотношения актуальной конфигурации, снабжать сверху знаком градуса и учитывать перпендикулярность $\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{h}}}$ к базовой кривой $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathrm{L}}}}$, $\forall\alpha$.

5. Векторы перемещений и их вариации. Введем в рассмотрение векторы перемещений точек внутренней и внешней базовых кривых и вектор перемещения произвольной точки для каждого слоя α. Обозначая векторы перемещений точек внутренней и внешней базовых кривых слоя α соответственно через $\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1)$ и $\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1)$, в силу их определения будем иметь

$$\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1) = \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1) - \overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1), \quad \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1) = \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1) - \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}}(x^1), \quad \forall\alpha \tag{5.1}$$

Для вектора перемещения произвольной точки слоя α, обозначая его через $\underset{\alpha}{\mathbf{u}}(x^1, x^2)$, с учетом (2.1), (4.1) и (5.1) получаем выражение

$$\underset{\alpha}{\mathbf{u}}(x^1, x^2) = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) - \underset{\alpha}{\mathring{\mathbf{r}}}(x^1, x^2) = (1 - x^2)\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}} + x^2 \overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}} \tag{5.2}$$

Видно, что в силу (5.1) и (5.2) для вариаций векторов перемещений имеем соответственно

$$\begin{gathered}\delta\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1) = \delta\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1), \quad \delta\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1) = \delta\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}(x^1)\\ \delta\underset{\alpha}{\mathbf{u}}(x^1) = \delta\underset{\alpha}{\mathbf{r}} = (1 - x^2)\delta\overset{(-)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1) + x^2\delta\overset{(+)}{\underset{\alpha}{\mathbf{u}}}(x^1), \quad \forall\alpha\end{gathered} \tag{5.3}$$

6. Градиенты места и векторов перемещений и их вариации. Вводя в рассмотрение набла-операторы для отсчетной и актуальной конфигураций соответственно соотношениями[3]

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde I}\partial_I = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde I}\frac{\partial}{\partial x^I}, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\nabla}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde I}\partial_I = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde I}\frac{\partial}{\partial x^I}, \quad \sim\in\{-,\varnothing,+\}, \quad \forall\alpha$$

нетрудно определить градиенты мест и векторов перемещений. Для градиентов мест в отсчетной и актуальной конфигурациях будем иметь соответственно

$$\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\underset{\beta}{\overset{(\smile)}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde I}\partial_I\underset{\beta}{\overset{(\smile)}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde I}\underset{\beta}{\mathbf{r}}_I, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\nabla}}\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde I}\partial_I\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\mathbf{r}}} = \underset{\alpha}{\mathbf{r}}{}^{\tilde I}\underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}_{\breve I}, \quad \smile,\sim\in\{-,\varnothing,+\}, \quad \forall\alpha,\beta \tag{6.1}$$

а в силу (5.1), (5.2) и (6.1) для градиентов векторов перемещений получаем

$$\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}} - \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\mathbf{r}}}, \quad \underset{\beta}{\overset{(\smile)}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \underset{\beta}{\overset{(\smile)}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}} - \underset{\beta}{\overset{(\smile)}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\mathbf{r}}}, \quad \smile,\sim\in\{-,\varnothing,+\}, \quad \forall\alpha,\beta \tag{6.2}$$

Для нахождения вариаций от градиентов векторов перемещений в отсчетной конфигурации следует исходить из первого соотношения (6.2). Варьируя его, имеем

$$\delta\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\delta\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{u}}} = \delta\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(\sim)}{\mathbf{r}}} = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\delta\underset{\alpha}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\mathbf{r}}}, \quad \smile,\sim\in\{-,\varnothing,+\}, \quad \forall\alpha,\beta \tag{6.3}$$

Очевидно, в отсчетной конфигурации оператор вариации и набла-оператор коммутируют, а в актуальной не коммутируют.

В силу (5.2) транспонированные градиенты векторов перемещений в отсчетной конфигурации связаны между собой соотношениями

$$\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\smile)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = [\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}(x^1) - \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}(x^1)]\underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde 2} + (1-x^2)\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}{}^T + x^2\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}{}^T \tag{6.4}$$

$$\smile,\sim\in\{-,\varnothing,+\}, \quad \forall\alpha,\beta$$

Варьируя (6.4) и учитывая (5.3) и (6.3), будем иметь

$$\delta\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\delta\underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = [\delta\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}} - \delta\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}]\underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde 2} + (1-x^2)\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\delta\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}{}^T + x^2\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\delta\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}{}^T \tag{6.5}$$

$$\sim\in\{-,\varnothing,+\}, \quad \forall\alpha,\beta$$

Видно, что из (6.5) имеем представление

$$\delta\underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = \underset{\beta}{\overset{\overset{\circ}{(\sim)}}{\nabla}}\delta\underset{\alpha}{\mathbf{u}}{}^T = [\underset{\beta}{g}{}^{\tilde 2}_{\breve K}(\delta\overset{\overset{\circ}{(+)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L} - \delta\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L}) + (1-x^2)\nabla_K\delta\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L} + x^2\nabla_K\delta\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L}]\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\breve L}\underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\breve K} =$$

$$= (\delta\overset{\overset{\circ}{(+)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L} - \delta\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L})\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\breve L}\underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde 2} + [(1-x^2)\nabla_1\delta\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L} + x^2\nabla_1\delta\overset{\overset{\circ}{(+)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L}]\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\breve L}\underset{\beta}{\overset{\circ}{\mathbf{r}}}{}^{\tilde 1}$$

$$\smile,\sim\in\{-,\varnothing,+\}, \quad \forall\alpha,\beta \tag{6.6}$$

Заметим, что при написании последнего равенства (6.6) были учтены соотношения $\nabla_2\overset{\overset{\circ}{(-)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L} = 0, \nabla_2\overset{\overset{\circ}{(+)}}{u}_{\underset{\alpha}{}\breve L} = 0, \smile\in\{-,\varnothing,+\}, \forall\alpha.$

[3] Запись $\sim\in\{-,\varnothing,+\}$, где $\varnothing$ обозначает пустое множество, означает, что, если $\sim\,=\,-$, то над соответствующими символами пишем знак $-$, если $\sim\,=\,+$, то $-$ +, а если $\sim\,=\varnothing$, то над соответствующими символами ничего не пишем.

7. Тензоры напряжений Коши–Лагранжа и Пиолы–Кирхгофа и их представления. Тензор истинных напряжений Коши–Лагранжа определен в актуальной конфигурации [2, 6] и, если не рассматриваются полярные среды, является симметричным тензором. В рассматриваемом случае его можно представить в виде

$$\underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\alpha}{P}^{\tilde{I}\check{J}} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{I}} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\check{J}} = \underset{\alpha\beta}{P}^{\tilde{I}\bullet}_{\cdot\check{J}} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\tilde{I}} \underset{\beta}{\mathbf{r}}^{\check{J}}, \quad \check{}, \sim \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall \alpha, \beta \tag{7.1}$$

С помощью тензора истинных напряжений Коши–Лагранжа вводятся в рассмотрение и другие тензоры напряжений [2, 6]. Введение тензора условных напряжений Пиолы–Кирхгофа основывается на замене ориентированной площадки в актуальной конфигурации ее прототипом в отсчетной конфигурации [2]. Следовательно, в рассматриваемом случае вместо ориентированной площадки следует рассматривать ориентированную кривую. Для тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа аналогично (7.1) имеем представление

$$\overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{\tilde{I}\check{J}}_{\cdot\cdot} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}_{\tilde{I}} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}_{\check{J}} = \underset{\alpha\beta}{P}^{\tilde{I}\bullet}_{\cdot\check{J}} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}_{\tilde{I}} \overset{\circ}{\underset{\beta}{\mathbf{r}}}{}^{\check{J}}, \quad \check{}, \sim \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall \alpha, \beta \tag{7.2}$$

Для формул Коши, связывающих между собой вектор напряжения на ориентированной кривой и тензор напряжений, имеем

$$\underset{\alpha}{\mathbf{T}}^{\overset{(l)}{\alpha}} = \underset{\alpha}{\mathbf{l}} \cdot \underset{\sim}{\mathbf{P}} = \underset{\sim}{\mathbf{P}} \cdot \underset{\alpha}{\mathbf{l}} = \underset{\alpha}{\mathbf{T}}^{\tilde{I}} \underset{\alpha}{l}_{\tilde{I}}, \quad \underset{\alpha}{\mathbf{T}}^{\tilde{I}} = \underset{\alpha}{P}^{\tilde{I}\check{J}} \underset{\alpha}{\mathbf{r}}_{\check{J}}$$

$$\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\overset{(\circ l)}{\alpha}} = \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{l}}} \cdot \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}{}^{T} \cdot \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{l}}} = \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\tilde{I}} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{l}}_{\tilde{I}}, \quad \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\tilde{I}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{\tilde{I}\check{J}}_{\cdot\cdot} \overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{r}}}_{\check{J}}, \quad \check{}, \sim \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall \alpha, \beta$$

где $\underset{\alpha}{\mathbf{T}}^{\overset{(l)}{\alpha}}$ и $\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{T}}}{}^{\overset{(\circ l)}{\alpha}}$ – относящиеся к слою α векторы напряжения на кривых с нормалями $\underset{\alpha}{\mathbf{l}}$ и $\overset{\circ}{\underset{\alpha}{\mathbf{l}}}$ в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно.

8. Принцип виртуальной работы. Этот принцип, отнесенный к отсчетной конфигурации, в нелинейной механике деформируемого твердого тела в двухмерном случае представится в виде

$$\iint_{\overset{\circ}{\Omega}} \overset{c}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, \delta \overset{c}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}{}^{T} d\overset{\circ}{\Omega} = \iint_{\overset{\circ}{\Omega}} \overset{\circ}{\rho}(\mathbf{q} - \mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{r} d\overset{\circ}{\Omega} + \int_{\overset{\circ}{L}} \overset{\circ}{\mathbf{T}}{}^{(\overset{\circ}{l})} \cdot \delta\mathbf{r} d\overset{\circ}{s} \tag{8.1}$$

где $\overset{\circ}{\Omega}$ – плоская область, занимаемая телом и ограниченная кусочно-гладкой линией (кривой) $\overset{\circ}{L}$; $\mathbf{q}$ – плотность массовых сил; $\mathbf{a}$ – плотность ускорения; $\overset{c}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}}$ и $\overset{c}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ – сопряженные пары тензоров [6] (аналогичный принцип для теории многослойных конструкций приведен в [5]).

Беря в качестве сопряженной пары тензоров тензор напряжений Пиолы–Кирхгоффа и градиент места, подынтегральное выражение в левой части (8.1) получит вид

$$\overset{c}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, \delta \overset{c}{\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}}{}^{T} = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, \delta \overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{T} = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{r}^{T} = \overset{\circ}{\underset{\sim}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot\, \overset{\circ}{\nabla} \delta \mathbf{u}^{T} \tag{8.2}$$

Записывая (7.2) для любого слоя α и учитывая (8.1), будем иметь

$$\iint_{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}}^{T} d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}} = \iint_{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}} (\underset{\alpha}{\mathbf{q}} - \underset{\alpha}{\mathbf{a}}) \cdot \delta \underset{\alpha}{\mathbf{r}} d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}} + \int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}} \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{R}}} \cdot \delta \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}} d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}} + \int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}} \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{R}}} \cdot \delta \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}} d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}, \quad \forall\alpha \tag{8.3}$$

где $\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{R}}}$ и $\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{R}}}$ – плотность контактных сил, действующих на $\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}$ и $\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}$ соответственно.

Для получения принципа виртуальной работы теории многослойных плоских криволинейных стержней следует преобразовать интегралы, входящие в (8.3). В силу (6.6) и (7.2) подынтегральное выражение в левой части (8.3) представится в виде

$$\underset{\tilde\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}}^{T} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{2\tilde I}(\delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}_{\tilde I} - \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}_{\tilde I}) + (1-x^2)\underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{1\tilde I}\nabla_1 \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}_{\tilde I} + x^2 \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{1\tilde I}\nabla_1 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}_{\tilde I}, \quad \forall\alpha \tag{8.4}$$

В рассматриваемом случае нетрудно показать, что

$$d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}} = \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}}dx^1dx^2 = \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} dx^2 d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{s}}, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} = \sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{(\sim)-1}\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}_{22}} = \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\vartheta}}\sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}_{22}} \tag{8.5}$$

На основании (8.4) и первого соотношения (8.5) имеем

$$\underset{\tilde\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}}^{T} d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}} = \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} \underset{\tilde\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}}^{T} dx^2 d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{s}} = [\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{2\tilde I} dx^2(\delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}_{\tilde I} - \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}_{\tilde I}) +$$

$$+ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{1\tilde I}(1-x^2)dx^2\nabla_1 \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}_{\tilde I} + \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{1\tilde I} x^2 dx^2 \nabla_1 \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}_{\tilde I}] d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{s}} \tag{8.6}$$

$$\sim \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall\alpha$$

Можно заметить, что в силу (8.6) интеграл в левой части (8.3) представится в виде

$$\iint_{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}}} \underset{\tilde\alpha}{\overset{\circ}{\mathbf{P}}} \cdot\cdot \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\nabla}} \delta \underset{\alpha}{\mathbf{u}}^{T} d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}} = \int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{L}}} \nabla_1 (\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I} \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}_{\tilde I} + \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I} \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}_{\tilde I}) d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{s}} -$$

$$- \int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{L}}} [(\nabla_1 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{2\tilde I}) \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}_{\tilde I} + (\nabla_1 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I} - \underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I}) \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}_{\tilde I}] d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{s}} \tag{8.7}$$

$$\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{1\tilde I}(1-x^2)dx^2, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{1\tilde I} x^2 dx^2, \quad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I} = \int_0^1 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{P}}{}^{2\tilde I} dx^2, \sim \in \{-, +\}, \forall\alpha$$

С помощью третьего соотношения (5.3) и первого соотношения (8.5) двукратный интеграл в правой части приводится к виду

$$\iint_{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}} (\underset{\alpha}{\mathbf{q}} - \underset{\alpha}{\mathbf{a}}) \cdot \delta \underset{\alpha}{\mathbf{r}} d\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}} = \int_{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\Omega}}} \underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}} (\underset{\alpha}{\mathbf{q}} - \underset{\alpha}{\mathbf{a}}) \cdot [(1-x^2)\delta \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} + x^2 \delta \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}] \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{\eta}} dx^2 d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{s}} =$$

$$= \int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{L}}} [(\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{X}}{}^{\tilde I} - \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{W}}{}^{\tilde I}) \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}_{\tilde I} + (\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{X}}{}^{\tilde I} - \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{W}}{}^{\tilde I}) \delta \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}_{\tilde I}] d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{\sim})}{s}} \tag{8.8}$$

$$\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{X}}{}^{\tilde I}=\int_0^1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\eta}}\,\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\,\underset{\alpha\alpha}{\overset{\circ}{q}}{}^{\tilde I}(1-x^2)dx^2,\quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{X}}{}^{\tilde I}=\int_0^1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\eta}}\,\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\,\underset{\alpha\alpha}{\overset{\circ}{q}}{}^{\tilde I}x^2dx^2$$

$$\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{W}}{}^{\tilde I}=\int_0^1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\eta}}\,\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\,\underset{\alpha\alpha}{\overset{\circ}{a}}{}^{\tilde I}(1-x^2)dx^2,\quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{W}}{}^{\tilde I}=\int_0^1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\eta}}\,\underset{\alpha}{\overset{\circ}{\rho}}\,\underset{\alpha\alpha}{\overset{\circ}{a}}{}^{\tilde I}x^2dx^2,\quad \sim\in\{-,+\},\quad \forall\alpha$$

Видно, что второй интеграл в правой части (8.3) с учетом первого соотношения (5.3) получит вид

$$\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{R}}}\cdot\delta\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{r}}}\,d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}=\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{R}}}\cdot\delta\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}\,d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}=\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{R}}{}^{\tilde I}\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}=\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{H}}{}^{\tilde I}\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}\tag{8.9}$$

Последний интеграл в правой части (8.3) с учетом второго соотношения (5.3) и того, что $d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{s}}=\sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}_{\tilde 1\tilde 1}\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{-1}_{\tilde 1\tilde 1}}\,d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}$ представится в виде

$$\begin{gathered}\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}}}\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{R}}}\cdot\delta\underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{r}}}\,d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{s}}=\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}_{\tilde 1\tilde 1}\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{-1}_{\tilde 1\tilde 1}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{R}}{}^{\tilde I}\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}=\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{H}}{}^{\tilde I}\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}\\ \sim\in\{-,+\},\quad\forall\alpha\\ \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{H}}{}^{\tilde I}=\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{R}}{}^{\tilde I},\quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{H}}{}^{\tilde I}=\sqrt{\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}_{\tilde 1\tilde 1}\underset{\alpha}{\overset{\circ}{g}}{}^{-1}_{\tilde 1\tilde 1}}\,\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{R}}{}^{\tilde I},\quad\sim\in\{-,+\},\quad\forall\alpha\end{gathered}\tag{8.10}$$

Учитывая (8.7)–(8.10) и (8.3), получим искомый принцип виртуальной работы для теории многослойных плоских криволинейных стержней [7] в виде

$$\begin{aligned}&\iint_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\nabla_1\Big(\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}\Big)d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}}=\\ &=\int_{\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}}\Big[\Big(\nabla_1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{X}}{}^{\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{H}}{}^{\tilde I}-\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{W}}{}^{\tilde I}\Big)\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}+\\ &+\Big(\nabla_1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}-\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{X}}{}^{\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{H}}{}^{\tilde I}-\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{W}}{}^{\tilde I}\Big)\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}\Big]d\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{s}},\quad\sim\in\{-,+\},\quad\forall\alpha\end{aligned}\tag{8.11}$$

9. Уравнения движения и равновесия теории многослойных плоских криволинейных стержней. Межслойные контактные и граничные условия. В силу произвольности $\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{u}}$ и $\delta\underset{\alpha\tilde I}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{u}}$ для внутренних точек базовых кривых из (8.11) получаем следующие уравнения движения теории многослойных плоских криволинейных стержней

$$\begin{aligned}&\nabla_1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{X}}{}^{\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{H}}{}^{\tilde I}=\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{W}}{}^{\tilde I}\\ &\nabla_1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}-\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{X}}{}^{\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{H}}{}^{\tilde I}=\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{W}}{}^{\tilde I},\quad\sim\in\{-,+\}\ (I=1,2),\quad\forall\alpha\end{aligned}\tag{9.1}$$

Очевидно, уравнения равновесия представляются в виде

$$\begin{aligned}&\nabla_1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{X}}{}^{\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{H}}{}^{\tilde I}=0\\ &\nabla_1\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\tilde 1\tilde I}-\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\tilde 2\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{X}}{}^{\tilde I}+\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{H}}{}^{\tilde I}=0,\quad\sim\in\{-,+\}\ (I=1,2),\quad\forall\alpha\end{aligned}\tag{9.2}$$

Следует заметить, что, если многослойный плоский криволинейный стержень состоит из N слоев, то на первую внутреннюю (последнюю внешнюю) базовую кривую $\underset{1}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{L}}(\underset{N}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{L}})$ могут действовать заданные силы, имеющие плотность $\underset{1}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{F}}}(\underset{N}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{F}}})$. Кроме того, могут быть заданы векторы перемещения внутренних точек этих кривых, обозначаемые через $\underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{U}}}{}_0$ и $\underset{N}{\overset{(+)}{\mathbf{U}}}{}_0$ соответственно.

К уравнениям (9.1) и (9.2), очевидно, следует присоединять условия, учитывающие характер межслойных контактов. Нетрудно усмотреть, что если конструкция состоит из N слоев, то в случае полного контакта между слоями, будем иметь условия

$$\underset{1}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{R}}} = \underset{1}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{F}}}, \quad \underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} = \underset{1}{\overset{(-)}{\mathbf{U}}}{}_0, \quad \underset{N}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{R}}} = \underset{N}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{F}}}, \quad \underset{N}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}} = \underset{N}{\overset{(+)}{\mathbf{U}}}{}_0$$

$$\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{\mathbf{R}}} + \underset{\alpha-1}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{\mathbf{R}}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} = \underset{\alpha-1}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}, \quad \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}} = \underset{\alpha+1}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}} \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, N)$$

Нетрудно получить и граничные условия. Действительно, например, при жестком защемлении имеем

$$\underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}\Big|_{x^1 = x^1_{(1)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(-)}{\mathbf{u}}}\Big|_{x^1 = x^1_{(2)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}\Big|_{x^1 = x^1_{(1)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(+)}{\mathbf{u}}}\Big|_{x^1 = x^1_{(2)}} = 0, \quad \forall\alpha \tag{9.3}$$

а при свободных краях имеем

$$\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}}\Big|_{x^1 = x^1_{(1)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}}\Big|_{x^1 = x^1_{(2)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}}\Big|_{x^1 = x^1_{(1)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}}\Big|_{x^1 = x^1_{(2)}} = 0$$
$$\sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha \tag{9.4}$$

10. Краткие формы записи уравнений и граничных условий. Умножая первое соотношение (9.1) на $1 - x^2$, а второе – на x^2, $\forall x^2 \in [0, 1]$, и складывая полученные соотношения почленно, приходим к следующей краткой записи уравнений движения

$$\nabla_1 \underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}} + (1 - 2x^2)\underset{\alpha}{\overset{\circ}{T}}{}^{\bar{2}\tilde{1}} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{X}}{}^{\tilde{1}} + \underset{\alpha}{\overset{\circ}{H}}{}^{\tilde{1}} = \underset{\alpha}{\overset{\circ}{W}}{}^{\tilde{1}}, \quad \sim \in \{-, \varnothing, +\}, \quad \forall\alpha, \quad \forall x^2 \in [0, 1]$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}} = (1 - x^2)\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}} + x^2 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}}, \quad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{X}}{}^{\tilde{1}} = (1 - x^2)\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{X}}{}^{\tilde{1}} + x^2 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{X}}{}^{\tilde{1}}$$

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{H}}{}^{\tilde{1}} = (1 - x^2)\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{H}}{}^{\tilde{1}} + x^2 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{H}}{}^{\tilde{1}}, \quad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{W}}{}^{\tilde{1}} = (1 - x^2)\underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{-})}{W}}{}^{\tilde{1}} + x^2 \underset{\alpha}{\overset{(\overset{\circ}{+})}{W}}{}^{\tilde{1}}, \quad \sim \in \{-, +\}$$

$$\forall\alpha, \forall x^2 \in [0, 1]$$

Совершенно аналогично при жестком защемлении граничные условия (9.3) представляются в виде

$$\underset{\alpha}{\mathbf{u}}\Big|_{x^1 = x^1_{(1)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\mathbf{u}}\Big|_{x^1 = x^1_{(2)}} = 0, \quad \forall\alpha, \forall x^2 \in [0, 1]$$

а граничные условия при свободных краях (9.4) можно записать в форме

$$\underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}}\Big|_{x^1 = x^1_{(1)}} = 0, \quad \underset{\alpha}{\overset{\circ}{M}}{}^{\bar{1}\tilde{1}}\Big|_{x^1 = x^1_{(2)}} = 0, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \forall\alpha, \forall x^2 \in [0, 1]$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никабадзе М.У.* Плоские криволинейные стержни. М., 1990. 52 с. – Деп. в ВИНИТИ 07.08.1990, № 4509-В90.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
3. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 264 с.
4. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
5. *Никабадзе М.У.* К варианту теории многослойных конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 1. С. 143–158.
6. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 336 с.
7. *Никабадзе М.У.* Уравнения движения и граничные условия варианта теории многослойных плоских криволинейных стержней // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 2002. № 6. С. 41–46.

Москва

Поступила в редакцию
17.05.04