МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2005

УДК 539.4:624.07

© 2005 г. В.И. ГОРБАЧЕВ, О.Ю. ТОЛСТЫХ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ

Техническая теория балки из однородного изотропного материала строится с помощью кинематических гипотез, задающих тот или иной закон распределения перемещений по сечению. При этом вместо сложной трехмерной задачи решается существенно более простая одномерная задача, что позволяет быстро провести прикидочные расчеты на прочность и оценить пригодность данного элемента конструкции. Кинематические гипотезы успешно применяются и для динамических расчетов, а также для расчетов балки, работающей за пределами упругости. Большой вклад в развитие этих направлений в теории балки внесли А.А. Ильюшин и В.С. Ленский [1]. Разные кинематические гипотезы приводят к техническим теориям с различным числом неизвестных. Например, в случае плоской деформации прямоугольной балки, самая простая теория, основанная на гипотезе прямой недеформируемой нормали к срединной линии (в теории пластинок эта гипотеза называется гипотезой Кирхгофа, а в теории оболочек – гипотезой Кирхгофа-Лява [2]), содержит две неизвестные величины – две компоненты вектора перемещений точек срединной линии. Теория, которая кроме вектора перемещений точки средней линии учитывает угол отклонения поперечного волокна от нормали к деформированной средней линии (теория Тимошенко), содержит уже три неизвестные кинематические величины. В теории, учитывающей сдвиг и поперечное обжатие волокна (теория Рейснера), нужно искать четыре кинематические характеристики – это две компоненты вектора перемещений, угол отклонения поперечного волокна от нормали и обжатие поперечного волокна. Естественно, что подобные упрощения приводят к противоречиям, в частности, в простейшей теории балки приходится считать, что модуль сдвига и поперечный модуль Юнга бесконечно большие, а поперечный коэффициент Пуассона равен нулю. Таким образом, материал является анизотропным, что противоречит исходной посылке.

Если материал балки неоднородный и анизотропный, то вряд ли возможно построить единую теорию такой балки исходя из кинематических гипотез, поскольку они должны, каким-то образом, учитывать общий характер неоднородности и анизотропии. Тем не менее, в частных случаях неоднородности, возможно построение кинематической теории неоднородной балки.

В данной работе предлагается другой метод построения технической теории балки, одинаково пригодный как для однородной изотропной, так и для неоднородной анизотропной балки. Метод основан на прямом интегрировании уравнений равновесия в задаче о плоском напряженном состоянии длинной, прямоугольной балки. Из уравнений равновесия выражаются две поперечные компоненты тензора напряжений через продольное напряжение. Уравнения равновесия классической теории балок получаются как необходимые условия, при которых поперечные напряжения удовлетворяют граничным условиям на двух длинных сторонах балки. Далее, из закона Гука для неоднородного анизотропного материала находятся все компоненты тензора деформаций, выраженные через продольное напряжение в балке. После этого из соотношений Коши находим перемещения в каждой точке балки и, кроме этого, получаем интегродифференциальное уравнение для продольного напряжения, а также определяющие соотношения, связывающие внутренние силовые факторы с деформацией и искривлением средней линии балки.

Таким образом, исходная задача о плоском напряженном состоянии длинной полосы с интегральными условиями на коротких сторонах сводится к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для двух компонент вектора перемещений точек средней линии, связанной с одним интегродифференциальным уравнением для продольного напряжения. Граничные условия для перемещений точек средней линии вытекают из граничных условий исходной задачи. Полученную систему уравнений предлагается решать методом последовательных приближений, при этом простейшая кинематическая теория балки является нулевым приближением в новой теории. Новая техническая теория балки содержит три неизвестные величины – две компоненты вектора перемещений точки средней линии и одну продольную компоненту тензора напряжений в каждой точке балки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную балку $|x_1| \le l/2$, $|x_2| \le h/2$, $|x_3| \le b/2$ длины l, высоты h ($h/l \ll 1$) и толщины b ($b/h \ll 1$). Пусть объемные и поверхностные силы параллельны срединной плоскости x_1, x_2 и симметричны относительно нее, а грани балки $x_3 = \pm b/2$ свободны от нагрузок. Предположим, что упругие характеристики материала балки не зависят от координаты x_3, а плоскость, параллельная срединной, является плоскостью симметрии упругих свойств. В этих условиях балка находится в обобщенном плоском напряженном состоянии [3, 4], и постановка задачи для осредненных по толщине величин состоит из уравнений равновесия, закона Гука и соотношений Коши

$$\sigma_{ij,\,j} + X_i = 0, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}(x_1, x_2)\varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = \Delta_{ijkl}u_{k,\,l} \tag{1}$$

точных граничных условий на длинных сторонах балки

$$\sigma_{i2}(x_1, \pm h/2) = \pm q_i^{\pm}(x_1) \tag{2}$$

и интегральных условий на концах балки

$$\begin{gathered}
\int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\left(\pm\frac{l}{2}, x_2\right)dx_2 = \pm T^{\pm}, \quad \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}\left(\pm\frac{l}{2}, x_2\right)dx_2 = \pm Q^{\pm} \\
\int\limits_{-h/2}^{h/2} x_2\sigma_{11}\left(\pm\frac{l}{2}, x_2\right)dx_2 = \pm M^{\pm}
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь σ_{ij}, ε_{ij}, X_i, $q_i^{\pm}$ – средние по толщине балки значения напряжений, деформаций, объемных нагрузок и поверхностных сил соответственно. Индексы принимают значения 1 и 2; индекс после запятой обозначает производную по соответствующей координате; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование; $\Delta_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$ – компоненты единичного тензора четвертого ранга [5]; δ_{ij} – дельта Кронекера; $C_{ijkl}(x_1, x_2)$ – компоненты тензора модулей упругости материала балки, имеющего в плоской задаче в общем случае анизотропии шесть независимых компонент [6]. Компоненты тензора податливостей, обратного к тензору модулей упругости, обозначим через $J_{ijkl}(x_1, x_2)$.

Очевидно, что задача (1)–(3) имеет не единственное решение. Это связано с тем, что одним и тем же крайним значениям внутренних силовых факторов могут соответствовать различные, распределенные по краевым сечениям, нагрузки.

2. Внутренние силовые факторы. В каждом поперечном сечении в точке x_1 балки действуют напряжения $\sigma_{i1}(x_1, x_2)$, распределенные по поперечному сечению. Эти напряжения приведем к трем равнодействующим, приложенным в центре поперечного сечения: продольной силе $T(x_1)$, поперечной силе $Q(x_1)$ и изгибающему моменту $M(x_1)$ – это, так называемые, внутренние силовые факторы [7]:

$$T = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}(x_1, x_2)dx_2, \quad Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}(x_1, x_2)dx_2, \quad M = \int_{-h/2}^{h/2} x_2\sigma_{11}(x_1, x_2)dx_2 \tag{4}$$

3. Выражение поперечных напряжений через продольное напряжение и дифференциальные уравнения равновесия балки. Интегрируя уравнения равновесия (1) по x_2 в пределах от $-h/2$ до x_2, выразим поперечные напряжения σ_{12} и σ_{22} через продольное напряжение σ_{11}:

$$\sigma_{12} = -\sigma_{11,1}^{(-1)} + r_{12}, \quad \sigma_{22} = -\sigma_{12,1}^{(-1)} - X_2^{(-1)} - q_2^- \tag{5}$$

Отсюда будем иметь

$$\sigma_{22} = \sigma_{11,11}^{(-2)} + r_{22} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} r_{11} \equiv 0, \quad r_{12} = r_{21} \equiv -X_1^{(-1)} - q_1^- \\ r_{22} \equiv -X_2^{(-1)} - q_2^- - r_{12,1}^{(-1)} = -X_2^{(-1)} - q_2^- + X_{1,1}^{(-2)} + (x_2 + h/2)q_{1,1}^- \end{gathered} \tag{7}$$

Верхний отрицательный индекс в круглых скобках обозначает интеграл, соответствующей кратности по координате x_2 от $-h/2$ до x_2, т.е.

$$\varphi^{(-n)}(x_2) \equiv \int_{-h/2}^{x_2} dy_1 \int_{-h/2}^{y_1} dy_2 \ldots dy_{n-1} \int_{-h/2}^{y_{n-1}} \varphi(y)dy = \int_{-h/2}^{x_2} \frac{(x_2 - y)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(y)dy \tag{8}$$

Напряжения (5) очевидно удовлетворяют граничным условиям на нижней длинной стороне балки $x_2 = -h/2$. Они же будут удовлетворять граничным условиям и на верхней длинной стороне, если только внутренние силовые факторы подчиняются уравнениям

$$T' + t_1(x_1) = 0, \quad Q' + t_2(x_1) = 0, \quad t_i \equiv \int_{-h/2}^{h/2} X_i dx_2 + q_i^+ + q_i^- \tag{9}$$

Штрихи обозначают производную по координате x_1. Два уравнения (9) получены из формул (5) при $x_2 = h/2$, т.е., они являются необходимыми условиями при выполнении, которых напряжения (5) будут удовлетворять точным граничным условиям на длинных сторонах балки. Величины $t_1(x_1)$ и $t_2(x_1)$ являются приведенными продольными и поперечными нагрузками, распределенными вдоль средней линии. Еще одно уравнение, связывающее поперечную силу с изгибающим моментом, получим, если проинтегрировать по высоте балки напряжение σ_{12}, представленное первой формулой (5):

$$Q = M' + m(x_1), \quad m \equiv \int_{-h/2}^{h/2} x_2 X_1 dx_2 + \frac{h}{2}(q_1^+ - q_1^-) \tag{10}$$

Здесь $m(x_1)$ – внешняя моментная нагрузка [8], распределенная вдоль оси балки. Кроме уравнений (9), (10) внутренние силовые факторы должны также удовлетворять граничным условиям на концах $x_1 = \pm l/2$ средней линии

$$T(\pm l/2) = \pm T^{\pm}, \quad Q(\pm l/2) = \pm Q^{\pm}, \quad M(\pm l/2) = \pm M^{\pm} \tag{11}$$

Формулы (11) следуют из интегральных граничных условий (3). Соотношение (10) позволяет уменьшить число уравнений равновесия балки до двух. Для этого нужно подставить перерезывающую силу Q из (10) во второе уравнение (9). В результате получается дифференциальное уравнение второго порядка для изгибающего момента

$$M'' + t_2 + m' = 0 \tag{12}$$

Заметим, что это же уравнение получается, если в формуле (6) положить $x_2 = h/2$ и произвести несложные преобразования. Уравнение (12) вместе с уравнением (9) для продольного усилия образуют систему уравнений равновесия балки.

4. Представление перемещений в балке через перемещения точек средней линии и продольное напряжение. Вначале определим деформации $\varepsilon_{ij} = J_{ij11}\sigma_{11} + 2J_{ij12}\sigma_{12} + J_{ij22}\sigma_{22}$. Подставим сюда поперечные напряжения σ_{12} и σ_{22}, выраженные через продольное напряжение по формулам (5) и (6) и получим формулу, по которой все компоненты тензора деформаций выражаются через продольное напряжение σ_{11}:

$$\varepsilon_{ij} = J_{ij11}\sigma_{11} - 2J_{ij12}\sigma^{(-1)}_{11,1} + J_{ij22}\sigma^{(-2)}_{11,11} + J_{ijkl}r_{kl} \tag{13}$$

Учитывая, что $\varepsilon_{22} = u_{2,2}$ и $\varepsilon_{12} = (u_{1,2} + u_{2,1})/2$ найдем отсюда перемещения u_2 и u_1:

$$\begin{aligned} u_2 &= \varepsilon_{22}^{(-1*)} + w_2(x_1) = \\ &= [J_{2211}\sigma_{11} - 2J_{2212}\sigma^{(-1)}_{11,1} + J_{2222}\sigma^{(-2)}_{11,11}]^{(-1*)} + (J_{22kl}r_{kl})^{(-1*)} + w_2 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\varepsilon_{12}^{(-1*)} - \varepsilon_{22,1}^{(-2*)} - x_2 w_2' + w_1(x_1) = 2[J_{1211}\sigma_{11} - 2J_{1212}\sigma^{(-1)}_{11,11} + J_{1222}\sigma^{(-2)}_{11,11}]^{(-1*)} - \\ &- [J_{2211}\sigma_{11} - 2J_{2212}\sigma^{(-1)}_{11,1} + J_{2222}\sigma^{(-2)}_{11,11}]^{(-2*)}_{,1} + 2(J_{12kl}r_{kl})^{(-1*)} - (J_{22kl}r_{kl})^{(-2*)}_{,1} - x_2 w_2' + w_1 \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь, в отличие от формулы (8), отрицательный индекс в круглых скобках в виде цифры со звездочкой внизу обозначает интеграл соответствующей кратности по координате x_2 в пределах от 0 до x_2. В этом случае произвольные функции интегрирования $w_i(x_1)$ очевидно являются компонентами вектора перемещений точек средней линии.

5. Уравнение для продольного напряжения. По перемещению u_1 из (15) найдем компоненту $\varepsilon_{11} = u_{1,1}$ и приравняем ее значению продольной деформации, найденной по формуле (13):

$$w_1' - x_2 w_2'' + 2\varepsilon_{12,1}^{(-1*)} - \varepsilon_{22,11}^{(-2*)} = J_{1111}\sigma_{11} - 2J_{1112}\sigma^{(-1)}_{11,1} + J_{1122}\sigma^{(-2)}_{11,11} + J_{11kl}r_{kl} \tag{16}$$

Отсюда выразим σ_{11}:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{J_{1111}}w_1' - \frac{x_2}{J_{1111}}w_2'' - (\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}) = \frac{1}{J_{1111}}\xi + \frac{x_2}{J_{1111}}\kappa - (\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}) \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\sigma_{11} &= J_{1111}^{-1}\{-2J_{1112}\sigma^{(-1)}_{11,1} + J_{1122}\sigma^{(-2)}_{11,11} - 2[J_{1211}\sigma_{11} - 2J_{1212}\sigma^{(-1)}_{11,1} + J_{1222}\sigma^{(-2)}_{11,11}]^{(-1*)}_{,1} + \\ &+ [J_{2211}\sigma_{11} - 2J_{2212}\sigma^{(-1)}_{11,1} + J_{2222}\sigma^{(-2)}_{11,11}]^{(-2*)}_{,11}\} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\Phi \equiv \frac{1}{J_{1111}}[J_{11kl}r_{kl} - 2(J_{12kl}r_{kl})^{(-1*)} + (J_{22kl}r_{kl})^{(-2*)}] \tag{19}$$

где $\xi = w_1'$ и $\kappa = -w_2''$ – продольная деформация и искривление средней линии балки, $\mathbf{L}$ – интегродифференциальный оператор. В уравнении (17) величина Φ зависит только от свойств материала пластины и от входных данных задачи, т.е. от объемных нагрузок X_i и поверхностных нагрузок $q_i^{\pm}$. Уравнение (17) является интегродифференциальным уравнением, которому удовлетворяет продольное напряжение.

6. Определяющие соотношения теории балки. Интегрируя напряжение (17) по ширине балки, в соответствии с формулами (4), найдем зависимости, позволяющие представить продольное усилие $T(x_1)$ и изгибающий момент $M(x_1)$ через продольную деформацию средней линии $\xi(x_1)$ и изгибную деформацию балки $\kappa(x_1)$:

$$\begin{aligned} T &= Aw_1' - Bw_2'' - h\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle = A\xi + B\kappa - h\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle \\ M &= Bw_1' - Dw_2'' - h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle = B\xi + D\kappa - h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle \end{aligned} \tag{20}$$

$$A \equiv h\langle 1/J_{1111}\rangle, \quad B \equiv h\langle x_2/J_{1111}\rangle, \quad D \equiv h\langle x_2^2/J_{1111}\rangle \tag{21}$$

Здесь угловые скобки обозначают среднее значение функции по толщине пластины; A, B, D – продольная жесткость, жесткость взаимного влияния и изгибная жесткость балки [9].

7. Связанная задача теории балки с интегродифференциальным уравнением. Для получения соответствующих уравнений подставим в уравнения равновесия балки (9), (12) величины T, M, выраженные с помощью определяющих соотношений (20) через перемещения точек средней линии, и добавим к ним уравнение (17):

$$\begin{aligned} &(Aw_1')' - (Bw_2'')' - h\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle' + t(x_1) = 0 \\ &(Bw_1')'' - (Dw_2'')'' - h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle + q(x_1) = 0 \\ &\sigma_{11} = \frac{1}{J_{1111}}w_1' - \frac{x_2}{J_{1111}}w_2'' - (\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}) \\ &t(x_1) \equiv t_1(x_1), \quad q(x_1) \equiv t_2(x_1) + m'(x_1) \end{aligned} \tag{22}$$

К уравнениям (22) необходимо добавить граничные условия. Три силовых условия следуют из интегральных граничных условий (11) и формул (10), (20):

$$\begin{aligned} &(Aw_1' - Bw_2'')_{x_1 = \pm l/2} = \pm T^{\pm} + h\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle_{x_1 = \pm l/2} \\ &(Bw_1' - Dw_2'')_{x_1 = \pm l/2} = \pm M^{\pm} + h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle_{x_1 = \pm l/2} \\ &(Bw_1' - Dw_2'')'|_{x_1 = \pm l/2} = \pm Q^{\pm} - m'(\pm l/2) + h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle'|_{x_1 = \pm l/2} \end{aligned} \tag{23}$$

Кинематические граничные условия заключаются в задании концевых перемещений срединной линии и углов поворота концевых сечений

$$w_i(\pm l/2) = a_i^{\pm}, \quad w_2'(\pm l/2) = b^{\pm} \tag{24}$$

Для выделения единственного решения уравнений (22) нужно из условий (23), (24) выбрать шесть граничных условий по три на каждом из концов балки в соответствии с конкретным типом нагружения и опирания концов балки. Кроме условий типа (23),

(24) возможны и другие варианты граничных условий, например, упругое защемление концов [10].

8. Случай статически определимой балки. В этом случае продольное усилие $T(x_1)$, перерезывающая сила $Q(x_1)$ и изгибающий момент $M(x_1)$ однозначно определяются через внешние нагрузки независимо от свойств материала балки. Полагая, что величины T^-, Q^-, M^- заданы, из уравнений (9)–(11) найдем

$$T(x_1) = -T^- - \int\limits_{-l/2}^{x_1} t_1(y)dy, \quad Q(x_1) = -Q^- - \int\limits_{-l/2}^{x_1} t_2(y)dy \tag{25}$$

$$M(x_1) = -M^- - Q^-(x_1 + l/2) - \int\limits_{-l/2}^{x_1} dy_1 \int\limits_{-l/2}^{y_1} t_2(y)dy - \int\limits_{-l/2}^{x_1} m(y)dy \tag{26}$$

Соотношения (20) разрешим относительно величин ξ и κ:

$$\begin{aligned} \xi &= w_1' = KT + SM + h[K\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle + S\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle] \\ \kappa &= -w_2'' = ST + RM + h[S\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle + R\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle] \end{aligned} \tag{27}$$

где K, S, R – коэффициенты податливости балки $K \equiv D/\alpha$, $S \equiv -B/\alpha$, $R \equiv A/\alpha$:

$$\alpha \equiv AD - B^2 = h^2[\langle 1/J_{1111}\rangle\langle x_2^2/J_{1111}\rangle - \langle x_2/J_{1111}\rangle^2] > 0 \tag{28}$$

Подставим далее выражения (27) для ξ и κ в уравнение (17) и после приведения подобных получим

$$\sigma_{11} = \sigma_0 + \mathbf{AL}\sigma_{11} \tag{29}$$

$$\sigma_0 = [f(x_1, x_2)T(x_1) + g(x_1, x_2)M(x_1)]/h + \mathbf{A}\Phi \tag{30}$$

где σ_0 – заданная функция координат x_1, x_2, определяемая функциональными зависимостями внешних нагрузок и внутренних силовых факторов от координат, а также функциональными зависимостями компонент тензора податливости от координат, $\mathbf{A}$ – линейный оператор, который будучи примененным к какой либо интегрируемой по x_2 функции $\varphi(x_1, x_2)$ дает $\mathbf{A}\varphi = \varphi - f\langle\varphi\rangle - g\langle x_2\varphi\rangle$. Функции f и g выражаются через $J_{1111}(x_1, x_2)$ следующим образом:

$$f = \frac{h}{J_{1111}}[K + x_2 S] = \frac{1}{J_{1111}} \frac{\langle x_2^2/J_{1111}\rangle - x_2\langle x_2/J_{1111}\rangle}{\langle 1/J_{1111}\rangle\langle x_2^2/J_{1111}\rangle - \langle x_2/J_{1111}\rangle^2} \Rightarrow \langle f\rangle = 1, \quad \langle x_2 f\rangle = 0 \tag{31}$$

$$g = \frac{h}{J_{1111}}[S + x_2 R] = \frac{1}{J_{1111}} \frac{x_2\langle 1/J_{1111}\rangle - \langle x_2/J_{1111}\rangle}{\langle 1/J_{1111}\rangle\langle x_2^2/J_{1111}\rangle - \langle x_2/J_{1111}\rangle^2} \Rightarrow \langle g\rangle = 0, \quad \langle x_2 g\rangle = 1 \tag{32}$$

Учитывая свойства функций f и g получаем, что применение оператора $\mathbf{A}$ к функции φ переводит ее в “самоуравновешенную” по x_2 функцию, которая ведет себя так, что $\langle\mathbf{A}(\varphi)\rangle = 0$ и $\langle x_2\mathbf{A}(\varphi)\rangle = 0$.

Таким образом, в статически определимом случае продольное напряжение σ_{11} в балке находится из решения интегродифференциального уравнения (29). После этого из уравнений (27) можно найти перемещения точек средней линии

$$w_1(x_1) = \int_{-l/2}^{x_1} \{KT + SM + h[K\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle + S\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle]\}dx_1 + \beta \tag{33}$$

$$w_2(x_1) = -\int_{-l/2}^{x_1} dy_1 \int_{-l/2}^{y_1} \{ST + RM + h[S\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}\rangle + R\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11})\rangle]\}dx_1 + \delta_1 x_1 + \delta_2 \tag{34}$$

Три константы интегрирования δ_1, δ_2, β находятся из конкретных условий закрепления концов средней линии балки. Поперечные напряжения и перемещения в каждой точке балки найдем по формулам (5) и (14), (15).

9. Метод последовательных приближений для решения статически неопределимых задач. В статически неопределимых случаях необходимо решать связанную систему уравнений (22). Для решения этих уравнений применим метод последовательных приближений. В каждом приближении с номером $m \geq 0$ решается задача простейшей теории балок с входными данными, зависящими от предыдущего приближения

$$\begin{aligned}
&(Aw_1^{\{m\}\prime})' - (Bw_2^{\{m\}\prime\prime})' + t^{\{m\}} = 0\\
&(Bw_1^{\{m\}\prime})'' - (Dw_2^{\{m\}\prime\prime})'' + q^{\{m\}} = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
t^{\{m\}} &= t(x_1) - \vartheta h\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}^{\{m-1\}}\rangle'\\
q^{\{m\}} &= q(x_1) - \vartheta h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}^{\{m-1\}})\rangle''
\end{aligned} \tag{36}$$

В формулах (36) константа $\vartheta = 0$, если $m = 0$, и $\vartheta = 1$, если $m > 0$. Статические и кинематические граничные условия в каждом приближении имеют вид

$$\begin{aligned}
(Aw_1^{\{m\}\prime} - Bw_2^{\{m\}\prime\prime})_{x_1 = \pm l/2} &= \pm T^{\{m\}\pm}\\
(Bw_1^{\{m\}\prime} - Dw_2^{\{m\}\prime\prime})_{x_1 = \pm l/2} &= \pm M^{\{m\}\pm}\\
(Bw_1^{\{m\}\prime} - Dw_2^{\{m\}\prime\prime})'\big|_{x_1 = \pm l/2} &= \pm Q^{\{m\}\pm}
\end{aligned} \tag{37}$$

$$w_i^{\{m\}}(\pm l/2) = a_i^{\pm}, \quad w_2^{\{m\}\prime}(\pm l/2) = b^{\pm} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
\pm T^{\{m\}\pm} &= \pm T^{\pm} + \vartheta h\langle\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}^{\{m-1\}}\rangle_{x_1 = \pm l/2}\\
\pm M^{\{m\}\pm} &= \pm M^{\pm} + \vartheta h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}^{\{m-1\}})\rangle_{x_1 = \pm l/2}\\
\pm Q^{\{m\}\pm} &= \pm Q^{\pm} - m'(\pm l/2) + \vartheta h\langle x_2(\Phi + \mathbf{L}\sigma_{11}^{\{m-1\}})\rangle'\big|_{x_1 = \pm l/2}
\end{aligned} \tag{39}$$

В каждом приближении выбирается по три граничных условия на правом и левом концах балки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Ленский В.С.* Сопротивление материалов. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1959. 372 с.
2. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В.* Теория упругости и пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 410 с.
3. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 367 с.
4. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
5. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.
6. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. Изд. 2. М.: Гостехиздат, 1957. 425 с.
7. *Горшков А.Г., Шалашилин В.И., Трошин В.Н.* Сопротивление материалов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 616 с.
8. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 2001. 560 с.
9. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
10. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.

Москва

Поступила в редакцию 4.09.2005