

УДК 539.4:624.07

© 2005 г. А.М. СИМОНЯН, Ю.Г. САНОЯН

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СОПРОТИВЛЕНИЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ТЕМПЕРАТУРНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ

Известно, что слоистые композиты в процессе теплосмен, зачастую, подвергаются межслойному растрескиванию. В работе исследуются напряжения, возникающие между слоями композита при температурном воздействии. Показано, что сдвигающие межслойные напряжения возникают в основном около кромок конструкций, где рекомендуется использовать более прочные либо пластичные связующие.

Композиты, как правило, являются существенно неоднородными материалами, так как состоят из волокон (наполнителя), находящихся в значительно менее жесткой матрице. Обычно для расчета конструкций из композитов последние принимаются условно однородными с эффективными деформационными характеристиками, определяемыми из "закона смесей" [1], основанного на обеспечении равенства деформаций составляющих в направлениях вдоль их границы раздела. Такой подход считается общепринятым и использовался многими исследователями для расчета деформационных свойств композитов с учетом упругих и реологических свойств составляющих [2–8].

В простейшей постановке, например, задача нахождения эффективного модуля упругости E стержня композита сводится к соотношениям

$$F_H \sigma_H + F_C \sigma_C = \sigma (F_H + F_C), \quad \sigma_H / E_H = \sigma_C / E_C = \sigma / E \quad (1)$$

где σ и E – эффективное напряжение и модуль упругости в композите; F_H и F_C – суммарные площади сечений слоев наполнителя и связующего; σ_H , σ_C , E_H и E_C – напряжения и модули упругости, соответствующие наполнителю и связующему.

Из (1) получим

$$E = \frac{F_H E_H + F_C E_C}{F_C + F_H}$$

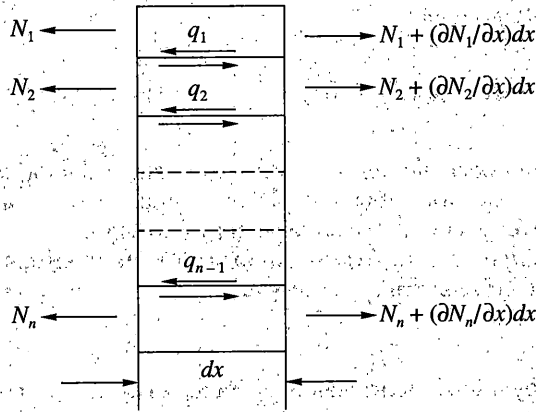
при этом напряжение в наполнителе обычно существенно превосходит напряжение в связующем, вследствие $E_H \gg E_C$:

$$\sigma_C = E_C \sigma / E, \quad \sigma_H = E_H \sigma / E$$

здесь априори принимается, что внешняя нагрузка $\sigma (F_H + F_C)$ воспринимается компонентами композита пропорционально их модулям упругости, при этом перемещения слоев одинаковы и межслойные касательные напряжения не возникают.

Рассмотрим теперь случай температурного воздействия на стержень из композита при отсутствии внешних сил. Положим, что стержень состоит из n упругих слоев, скрепленных друг с другом вдоль их границы раздела в направлении оси стержня. Очевидно, деформации ϵ_x всех слоев одинаковы. Рассмотрим элемент стержня (фиг. 1) длиной dx . Из условия равенства в слоях деформаций, соответствующих левому сечению, имеем

$$N_1 / E_1 \delta_1 + \alpha_1 \Delta T = N_2 / E_2 \delta_2 + \alpha_2 \Delta T = \dots = N_n / E_n \delta_n + \alpha_n \Delta T \quad (2)$$



Фиг. 1

Аналогично, для правого сечения будем иметь

$$\frac{N_1 + (\partial N_1 / \partial x) dx}{E_1 \delta_1} + \alpha_1 \Delta T = \frac{N_2 + (\partial N_2 / \partial x) dx}{E_2 \delta_2} + \alpha_2 \Delta T = \dots = \frac{N_n + (\partial N_n / \partial x) dx}{E_n \delta_n} + \alpha_n \Delta T \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) получим

$$\frac{1}{E_1 \delta_1} \frac{\partial N_1}{\partial x} = \frac{1}{E_2 \delta_2} \frac{\partial N_2}{\partial x} = \dots = \frac{1}{E_n \delta_n} \frac{\partial N_n}{\partial x} \quad (4)$$

Из условия равновесия слоев элемента следует

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = q_1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} = q_2 - q_1, \dots, \quad \frac{\partial N_{n-1}}{\partial x} = q_{n-1} - q_{n-2}, \quad \frac{\partial N_n}{\partial x} = -q_{n-1} \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) получим

$$q_i = q_1 \left(\sum_{j=1}^i \delta_j E_j \right) / (\delta_1 E_1) \quad (6)$$

Отсюда будем иметь

$$q_1 \left(\sum_{j=1}^n \delta_j E_j \right) / (\delta_1 E_1) = 0 \quad (7)$$

$$q_i = 0, \quad i = (1, 2, \dots, n-1) \quad (8)$$

т.е. есть при обеспечении равенства деформаций ϵ_x слоев композита касательные контактные напряжения не возникают, и, согласно (5), нормальные усилия N_i не меняются по длине. Поскольку внешней нагрузки на стержне нет, имеем

$$\sum_{i=1}^n N_i = 0 \quad (9)$$

Решая систему (2) и (9), получим

$$N_i = \delta_i E_i \Delta T \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_i) E_j \delta_j / \sum_{j=1}^n E_j \delta_j \quad (10)$$

Таким образом, при обеспечении равенства ϵ_{xi} в каждом слое имеют место усилия N_i , согласно (10), которые могут быть переданы лишь со стороны смежных слоев, с другой стороны, касательные напряжения между слоями не возникают. Однако равновесие каждого слоя при этом не будет соблюдаться. Положим, что деформирование каждого i -го слоя осуществляется по формуле

$$\epsilon_i = F_i(\sigma_i) + \alpha_i \Delta T \quad (11)$$

где F_i – некоторая функция, описывающая диаграмму напряжений (очевидно, что $\partial F/\partial \sigma \geq 0$).

Аналогично (2)–(8) будем иметь

$$\alpha_1 \Delta T + F_1(N_1/\delta_1) = \alpha_2 \Delta T + F_2(N_2/\delta_2) = \dots = \alpha_n \Delta T + F_n(N_n/\delta_n)$$

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{N_1 + (\partial N_1/\partial x) dx}{\delta_1}\right) + \alpha_1 \Delta T &= F_2\left(\frac{N_2 + (\partial N_2/\partial x) dx}{\delta_2}\right) + \alpha_2 \Delta T = \dots = \\ &= F_n\left(\frac{N_n + (\partial N_n/\partial x) dx}{\delta_n}\right) + \alpha_n \Delta T \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) получим

$$F_1'\left(\frac{N_1}{\delta_1}\right) \frac{1}{\delta_1} \frac{\partial N_1}{\partial x} = F_2'\left(\frac{N_2}{\delta_2}\right) \frac{1}{\delta_2} \frac{\partial N_2}{\partial x} = \dots = F_n'\left(\frac{N_n}{\delta_n}\right) \frac{1}{\delta_n} \frac{\partial N_n}{\partial x} \quad (13)$$

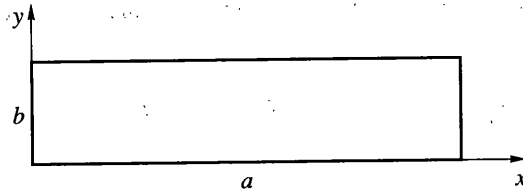
При использовании соотношений (5) из уравнений (13) найдем

$$q_i = \frac{q_1 F_1'(N_1/\delta_1)}{\delta_1} \sum_{j=1}^i \frac{\delta_j}{F_j'(N_j/\delta_j)}, \quad \frac{q_1 F_1'(N_1/\delta_1)}{\delta_1} \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{F_j'(N_j/\delta_j)} = 0$$

откуда вытекает, что для всех i межслойный сдвиг не возникает

$$q_i = 0 \quad (14)$$

Отсюда можно заключить, что проявление нелинейных деформационных свойств (кроме пластичности) не может дать объяснения факту возникновения нормальных напряжений в каждое слое при отсутствии межслойных сдвиговых напряжений. Предположение о возникновении на краях слоя сосредоточенных усилий (хотя это обеспечило бы совместность деформирования, т.е. непроскальзывания слоев друг относительно друга) должно быть снято, так как на краях слоя, согласно закону парности касательных напряжений, касательные напряжения равны нулю. Отметим однако, что расчет эффективного коэффициента теплового расширения (α) пакета, осуществляемый, согласно вышеприведенной постановке задачи, дал хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных [9]. Тем не менее в рамках этой постановки невозможно дать объяснение отсутствию межслойных сдвигающих напряжений при наличии нормальных продольных напряжений в слоях. Остается предположить, что межслойные касательные напряжения возникают лишь в периферийных областях композита, при этом там должно иметь место взаимное скольжение.



Фиг. 2

Представим теперь пакет композита в виде упругих прямоугольников, которые по длинным сторонам соединены друг с другом, при этом принимаем, что продольные деформации этих сторон равны друг другу и общей деформации, определяемой из закона смесей:

$$\varepsilon = \Delta T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i \delta_i \right) / \sum_{i=1}^n E_i \delta_i \quad (15)$$

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и b (фиг. 2), у которого по контуру отсутствуют нормальные напряжения, кроме того на сторонах b отсутствуют касательные напряжения, а на сторонах a имеются касательные напряжения, обеспечивающие равенство продольных деформаций ε_x значению (15) по всей длине; вследствие отсутствия напряжений по нормали, это равносильно заданию на этих сторонах напряжений σ_x :

$$\sigma_x(x, 0) = \sigma_x(x, b) = E \Delta T \left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i \delta_i \right) / \left(\sum_{i=1}^n E_i \delta_i \right) - \alpha \right] \equiv k \quad (16)$$

где α и E соответствуют рассматриваемому прямоугольнику. Функцию Эри представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \sum_{l=1}^{\infty} \{ A_l(x-a) \operatorname{sh}(\lambda_l x) + B_l x \operatorname{sh}[\lambda_l(x-a)] \} \sin(\lambda_l y) + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \{ C_l(y-b) \operatorname{sh}(\chi_l y) + D_l y \operatorname{sh}[\chi_l(y-b)] \} \sin(\chi_l x) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\lambda_l = \pi l / b, \quad \chi_l = \pi l / a$$

Видно, что функция $\varphi(x, y)$ в (17) удовлетворяет краевым условиям

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x, b)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi(0, y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi(a, y)}{\partial y^2} = 0$$

представляющим собой отсутствие нормальных напряжений на контуре вдоль нормалей.

Наличие напряжений σ_x на сторонах контура $y = 0$ и $y = b$ и отсутствие касательных напряжений вдоль сторон $x = 0$ и $x = a$ дают еще четыре граничных условия:

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y=b} = k, \quad \left. \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} = 0 \quad (18)$$

Подставив в (18) функцию Эри, получим четыре уравнения для вычисления ее постоянных

$$2 \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{li} [C_l + D_l \operatorname{ch}(b\chi_{li})] \sin(x\chi_{li}) = k, \quad 2 \sum_{l=1}^{\infty} \chi_{li} [C_l \operatorname{ch}(b\chi_{li}) + D_l] \sin(x\chi_{li}) = k$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} [-A_l a \lambda_l - B_l \operatorname{sh}(a\lambda_l)] \sin(y\lambda_l) + \sum_{l=1}^{\infty} \{C_l (y-b) \operatorname{sh}(y\chi_{li}) + D_l y \operatorname{sh}[(y-b)\chi_{li}]\} \chi_{li} = 0 \quad (19)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} [A_l \operatorname{sh}(a\lambda_l) - B_l a \lambda_l] \sin(y\lambda_l) + \sum_{l=1}^{\infty} \{C_l (y-b) \operatorname{sh}(y\chi_{li}) + D_l y \operatorname{sh}[(y-b)\chi_{li}]\} \chi_{li} = 0$$

Из соотношений (18) и (19) получим следующие формулы для расчетов коэффициентов ряда Фурье:

$$A_l = B_l = \frac{4a^3 b^2 kl}{\pi^3 (\operatorname{sh}(a\lambda_l) + a\lambda_l)} [1 - \cos(l\pi)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{[1 - \cos(m\pi)]}{(a^2 l^2 + b^2 m^2)^2} \quad (20)$$

$$C_l = D_l = \frac{k(1 - \cos(l\pi))}{a\chi_{li}^2 (1 + \operatorname{ch}(\chi_{li}b))}$$

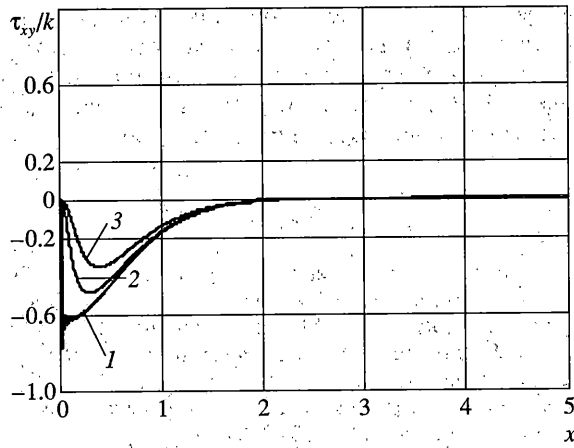
Для расчета нормальных и касательных напряжений получены следующие формулы:

$$\sigma_x(x, y) = - \sum_{l=1}^{\infty} A_l \{ (x-a) \operatorname{sh}(\lambda_l x) + x \operatorname{sh}[\lambda_l (x-a)] \} \lambda_l^2 \sin(\lambda_l y) + \sum_{l=1}^{\infty} C_l \chi_{li} \{ 2 \operatorname{ch}(\chi_{li} y) + \chi_{li} (y-b) \operatorname{sh}(\chi_{li} y) + 2 \operatorname{ch}[\chi_{li} (y-b)] + \chi_{li} y \operatorname{sh}[\chi_{li} (y-b)] \} \sin(\chi_{li} x) \quad (21)$$

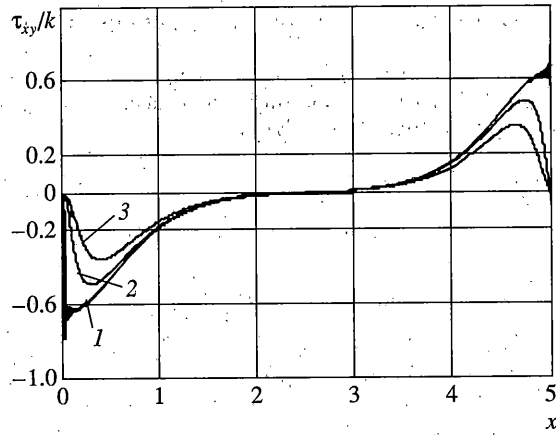
$$\sigma_y(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \lambda_l \{ 2 \operatorname{ch}(\lambda_l x) + \lambda_l (x-a) \operatorname{sh}(\lambda_l x) + 2 \operatorname{ch}[\lambda_l (x-a)] + \lambda_l x \operatorname{sh}[\lambda_l (x-a)] \} \times \sin(\lambda_l y) - \sum_{l=1}^{\infty} C_l \{ (y-b) \operatorname{sh}(\chi_{li} y) + y \operatorname{sh}[\chi_{li} (y-b)] \} \chi_{li}^2 \sin(\chi_{li} x) \quad (22)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l \{ \operatorname{sh}(\lambda_l x) + \lambda_l (x-a) \operatorname{ch}(\lambda_l x) + \operatorname{sh}[\lambda_l (x-a)] + \lambda_l x \operatorname{ch}[\lambda_l (x-a)] \} \times \lambda_l \cos(\lambda_l y) + \sum_{l=1}^{\infty} C_l \{ \operatorname{sh}(\chi_{li} y) + \chi_{li} (y-b) \operatorname{ch}(\chi_{li} y) + \operatorname{sh}[\chi_{li} (y-b)] + \chi_{li} y \operatorname{ch}[\chi_{li} (y-b)] \} \times \chi_{li} \cos(\chi_{li} x) \quad (23)$$

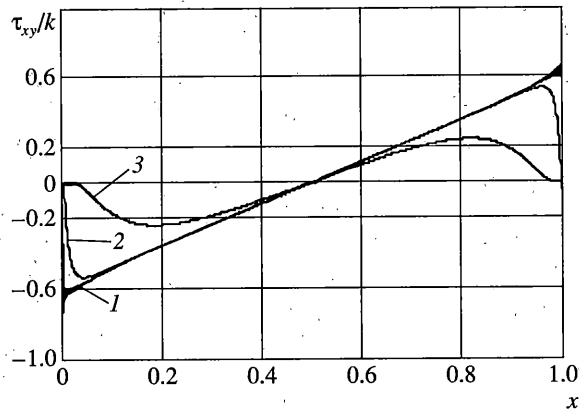
На фиг. 3 приведены результаты численного расчета касательных напряжений τ_{xy}/k для прямоугольника с размерами $a = 50$ см, $b = 1$ см при использовании 400 членов ряда Фурье. Кривые 1-3 здесь и ниже соответствуют $\tau_{xy}(x, 0)$, $\tau_{xy}(x, 0.1$ см), $\tau_{xy}(x, 0.2$ см). Как можно отсюда заключить, межслойные касательные напряжения практически проявляются лишь около сторон b прямоугольника. Сравнение этих результатов с полученными для прямоугольников с размерами $a = 5$ см, $b = 1$ см и $a = 1$ см, $b = 1$ см



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

(фиг. 4 и 5) позволяет обнаружить тенденцию уменьшения касательных напряжений в основной части прямоугольника с увеличением размера a , что говорит в пользу принятия схемы расчета [2–8], прогнозирующей возникновение межслойных напряжений лишь в периферийных областях композита. Это показывает целесообразность использования вблизи кромок слоистого композита либо более прочного, либо пластичного связующего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скудра А.М., Булавс Ф.Я. Прочность армированных пластиков. М.: Химия, 1982. 213 с.
2. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
3. Скудра А.М., Булавс Ф.Я., Роцэнс К.А. Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1971. 238 с.
4. Киракосян Р.М. О ползучести слоя стеклопластика при двухосном растяжении // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Физ-мат. наук. 1965. № 1. С. 73–87.
5. Ван Фо Фы Г.А. К теории анизотропной ползучести стеклоленты // Механика полимеров. 1965. № 2. С. 64–69.
6. Hill P. Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials I Elastic behaviours // J. Mech. and Phys. 1964. V. 12. № 4. P. 199–212.
7. Немировский Ю.В. Об упругопластическом поведении армированного слоя // ПМТФ. 1969. № 6. С. 81–89.
8. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Гитутюн, 1999. 255 с.
9. Симонян А.М., Сукоян Н.Т. Исследование теплового расширения пакетов из волокнистых композитов // ДАН Армении. 1988. № 1. С. 31–37.

Ереван

Поступила в редакцию
26.11.2002