МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 2005

УДК 539.3

© 2005 г. В.А. ИВАНОВ, В.Н. ПАЙМУШИН, В.И. ШАЛАШИЛИН

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ НЕТОНКИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для трехслойных оболочек с нетонким трансверсально-мягким заполнителем построены уточненные линеаризованные уравнения устойчивости, которые предназначены для описания форм потери устойчивости (ФПУ) как с нулевой (чисто сдвиговые), так и большой (смешанные изгибные) изменяемостью параметров возмущенного напряженно-деформированного состояния (НДС) в тангенциальных направлениях. В состав этих уравнений входят шесть уравнений нейтрального равновесия внешних слоев, построенных исходя из геометрически нелинейных уравнений теории среднего изгиба тонких оболочек Кирхгофа – Лява с учетом силового взаимодействия с заполнителем в точках поверхностей сопряжения, а также соотношения, описывающие НДС трансверсально-мягкого заполнителя в возмущенном состоянии. Последние представляют собой проинтегрированные по поперечной координате линеаризованные уравнения теории упругости, описывающие нейтральное равновесие трансверсально-мягкого заполнителя в возмущенном состоянии и подчиненные его условиям кинематического сопряжения с внешними слоями. Если в исходном невозмущенном состоянии наряду с сохранением принятого предположения о конечности деформации поперечных сдвигов в выражении для деформации поперечного обжатия удерживаются нелинейные слагаемые относительно всех трех компонентов перемещений, то построенные соотношения представляют собой интегродифференциальные уравнения относительно двух двумерных функций, являющихся характеристиками поперечных касательных напряжений в недеформированных осях, и двух трехмерных функций перемещений заполнителя (полная модель). Соотношения этой модели упрощаются и сводятся лишь к указанным двум двумерным дифференциальным уравнениям относительно характеристик поперечных касательных напряжений, если вводится предположение о малой изменяемости прогиба заполнителя по толщине в исходном состоянии (упрощенная модель). Структуру и степень сложности уравнений этой модели имеют уравнения и частично упрощенной модели, которые являются промежуточными между уравнениями, основанными на использовании соотношений полной и упрощенной моделей для заполнителя. Показано, что уравнения как полной, так и частично упрощенной моделей являются некорректными в силу некорректности положенных в их основу общеизвестных геометрически нелинейных кинематических соотношений теории упругости, которые во всей научной литературе рекомендуется использовать при малых деформациях удлинений. Последние становятся корректными, если в них отбросить нелинейные слагаемые относительно тех компонент перемещений, в направлении которых определяются деформации удлинений. В свете изложенного для трехслойных оболочек только

упрощенная модель является корректной. Все эти выводы основаны на результатах решения задач о всех возможных ФПУ трехслойного кольца, находящегося под действием внешнего (или внутреннего) давления, а также простейшей задачи о продольном растяжении – сжатии стержня с прямолинейной осью, сформулированной в точной и приближенной постановках для случаев произвольных и малых деформаций.

1. Постановка задачи и используемые предположения. Как отмечалось в [1], ключевыми в теории устойчивости трехслойных элементов конструкций являются вопросы, связанные с выявлением и классификацией всех возможных ФПУ и построением для их описания соответствующих математических моделей и разрешающих уравнений. В свою очередь, от степени полноты и точности последних зависит возможность выявления на их основе и соответствующих ФПУ. В связи с этим критический анализ полученных в [2] результатов и их сопоставление со всеми другими результатами, проанализированными в [1], приводят к следующим выводам:

1. Уравнения, построенные в [3, 5], являясь в достаточной степени содержательными в отношении возможности описания смешанных изгибных ФПУ несущих слоев с большими показателями изменяемости параметров возмущенного НДС в тангенциальных направлениях, не позволяют корректно описывать и выявлять чисто сдвиговые ФПУ. Причиной этому является использование для заполнителя трехмерных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных в рамках модели трансверсально-мягкого слоя [6], в линейном приближении, что справедливо лишь для случая малых деформаций поперечных сдвигов и поперечного обжатия заполнителя.

2. Уравнения, построенные в [2] и позволяющие корректно описывать и выявлять сдвиговые ФПУ трехслойных конструкций, с недостаточной степенью точности позволяют описывать их смешанные изгибные и изгибно-сдвиговые ФПУ с большими показателями изменяемости параметров возмущенного НДС в тангенциальных направлениях. Причиной этому является недостаточная степень точности описания НДС заполнителя в рамках модели С.П. Тимошенко с учетом поперечного обжатия. Доказательством этому выводу служат, в частности, результаты, приведенные в [7] и проанализированные в [2].

В связи с изложенным в данной статье дается вывод универсальных уточненных уравнений устойчивости трехслойных оболочек, которые, являясь корректными в отношении возможности описания всех возможных ФПУ с нулевой изменяемостью параметров возмущенного НДС (в частности, чисто сдвиговых в заполнителе), позволяют с высокой точностью описывать и все другие ФПУ с большими показателями изменяемости указанных параметров. При их построении будем использовать следующие упрощающие рассматриваемые задачи предположения:

(*1*) оболочка до потери устойчивости является напряженной, но недеформированной;

(*2*) несущие слои оболочки в докритическом состоянии находятся в условиях среднего изгиба;

(*3*) заполнитель является трансверсально-мягким, линейно упругим и ортотропным материалом, у которого деформации с соответствующими напряжениями связаны соотношениями закона Гука.

2. Уточненные модели деформирования трансверсально-мягкого заполнителя в возмущенном состоянии. Достоинством моделей, построенных в работах [3–5, 8, 9], является возможность описания ими как статических [3–5], так и динамических [8, 9] процессов деформирования заполнителя при больших показателях изменяемости параметров НДС в тангенциальных направлениях за счет введения в рассмотрение лишь двух двумерных функций в дополнение к шести двумерным неизвестным, имеющим место в модели В.В. Болотина [6]. Эти две функции, представляющие собой характеристики поперечных касательных напряжений в заполнителе, появляются естественным путем в процессе интегрирования по поперечной координате линейных уравнений теории упругости, предварительно упрощенных за счет пренебрежения тангенциальными компонентами тензора напряжений (модель трансверсально-мягкого слоя [6]).

Описание заполнителя такими линейными уравнениями, как отмечалось в [3, 5], возможно лишь при среднем изгибе несущих слоев и трехслойной оболочки в целом, когда и деформации поперечных сдвигов заполнителя являются малыми. Но введение предположения о малости деформаций поперечных сдвигов, как показано в [2], сразу же влечет за собой потерю содержательности разрешающих уравнений в отношении возможности корректного выявления и исследования на их основе чисто сдвиговых ФПУ, а описание НДС заполнителя геометрически нелинейными уравнениями равновесия, учитывающими конечность деформаций поперечных сдвигов, не позволяет найти их интегралы по поперечной координате с приемлемой точностью и в аналитическом виде, подобно тому, как это сделано в работах [3–5, 8, 9].

Поэтому предлагается другой подход к решению сформулированной задачи, основанный на использовании трехмерных линеаризованных уравнений теории упругости для заполнителя и двумерных линеаризованных уравнений теории оболочек для внешних слоев.

2.1. Полная модель. Как и в [2, 3], будем рассматривать трехслойную оболочку с толщинами несущих слоев $2h_{(k)}$ и заполнителя $2h$, отнесенную к триортогональной системе координат x_1, x_2, z, нормально связанной со срединной поверхностью заполнителя σ. Пусть $H_i = A_i(1 + k_i)z$ – параметры Ляме в произвольной точке заполнителя, отстоящей от σ на уровне z; A_i, k_i – параметры Ляме на поверхности σ и ее главные кривизны; $\mathbf{r}$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + z\mathbf{m}$ – радиус-векторы точек на σ с координатами x_1, x_2 и произвольной точки заполнителя с координатами x_1, x_2, z; $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3 = \mathbf{m}$ – единичные векторы принятой системы координат, в проекциях на которые определяется вектор перемещений заполнителя $\mathbf{U} = U_i\mathbf{l}_i + U_3\mathbf{m}$.

Если оставаться в рамках точности сформулированных в [2] требований в отношении возможности описания чисто сдвиговых ФПУ и в дополнение к ним изменяемость перемещения U_3 в направлении $\mathbf{m}$ считать конечной, то для трансверсально-мягкого заполнителя можно записать следующую систему уравнений равновесия в проекциях на оси $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{m}$:

$$\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\sigma_{31}^*) + \sigma_{13}H_2\frac{\partial H_1}{\partial z} = 0 \ (\overrightarrow{\underleftarrow{1, 2}}) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(H_1H_2\sigma_{33}^*) + \frac{\partial}{\partial x_1}(H_2\sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(H_1\sigma_{23}) = 0 \tag{2.2}$$

$$\sigma_{3\alpha}^* = \sigma_{\alpha 3} + \sigma_{33}\partial U_\alpha/\partial z \ (\alpha = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 2G_{i3}\varepsilon_{i3} = G_{i3}\left[H_i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_i}{H_i}\right) + \frac{\partial U_3}{H_i\partial x_i}\right] \ (i = 1, 2) \tag{2.3}$$

$$\sigma_{33} = E_3\varepsilon_{33} = E_3\left\{\frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\underline{\left(\frac{\partial U_3}{\partial z}\right)^2} + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)^2\right]\right\} \tag{2.4}$$

Здесь символы $\overrightarrow{\underleftarrow{1, 2}}$ означают, что неприведенные формулы следуют из приведенных путем перестановки индексов 1 и 2; $\sigma_{3\alpha}^*$ – компоненты вектора напряжений $\boldsymbol{\sigma}_3$, действующего на площадке z = const в деформированном состоянии заполнителя, в проекциях на недеформированные оси $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$, $\mathbf{m}$; σ_{13}, σ_{23}, σ_{33} – поперечные касательные и нормальные напряжения (проекции вектора $\boldsymbol{\sigma}_3$ на деформированные оси), которые с деформациями поперечных сдвигов $2\varepsilon_{i3}$ и обжатия ε_{33} связаны общеизвестными зависимостями; G_{i3}, E_3 – модули поперечных сдвигов и поперечного обжатия заполнителя.

Следует подчеркнуть, что уравнения (2.1)–(2.4) соответствуют введению предположения о том, что изменяемость функций перемещений U_1, U_2, U_3 в тангенциальных направлениях x_1, x_2 является малой, а в направлении z – конечной. В силу этого в кинематическом соотношении для ε_{33}:

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U_3}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)^2\right] \tag{2.5}$$

и уравнениях равновесия (2.1) сохранены все нелинейные слагаемые, связанные с $\partial U_\alpha/\partial z$, что не позволяет провести их последовательное интегрирование по z по аналогии с работами [3, 5, 8, 9]. В связи с этим, проведя линеаризацию составленных уравнений в окрестности некоторого НДС, считая при этом заполнитель напряженным, но недеформированным, и сохраняя принятые выше обозначения для параметров возмущенного НДС, приходим к тем же уравнениям (2.1), в которых

$$\sigma^*_{3\alpha} = \sigma_{\alpha 3} + \overset{0}{\sigma}_{33}\partial U_\alpha/\partial z \tag{2.6}$$

$$\sigma_{i3} = G_{i3}\left[H_i\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_i}{H_i}\right) + \frac{\partial U_3}{H_i \partial x_i}\right], \quad \sigma_{33} = E_3\frac{\partial U_3}{\partial z} \tag{2.7}$$

где $\overset{0}{\sigma}_{33}$ – поперечное нормальное напряжение, определяемое из решения задачи о докритическом НДС оболочки.

Можно убедиться, что интегралами первых двух уравнений равновесия из (2.1) являются функции

$$\sigma_{3i} = \sigma_{i3} = \frac{g}{(1+k_i z)}\left[q_i - \overset{0}{q}_3(1+k_i z)^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_i}{1+k_i z}\right)\right] \tag{2.8}$$

$$g = \frac{1}{(1+k_1 z)(1+k_2 z)} \tag{2.9}$$

где $q_i = q_i(x_1, x_2)$, $\overset{0}{q}_3 = \overset{0}{q}_3(x_1, x_2)$ – две неизвестные (q_i) и известная ($\overset{0}{q}_3$) функции интегрирования, равные, в частности, $q_i = \sigma^*_{3i}\,(z = 0)$, $\overset{0}{q}_3 = \overset{0}{\sigma}_{33}\;(z = 0)$.

При подстановке (2.8) в третье уравнение системы (2.1) приходим к уравнению вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}[(1+k_1 z)(1+k_2 z)\sigma^*_{33}] + \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{1}{(1+k_1 z)^2}\frac{\partial A_2 q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{(1+k_2 z)^2}\frac{\partial A_1 q_2}{\partial x_2}\right] - \\ -\frac{\overset{0}{q}_3}{A_1 A_2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{A_2 U_1}{1+k_1 z}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{A_1 U_2}{1+k_2 z}\right)\right] = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

К этому уравнению необходимо присоединить равенство

$$\sigma_{33}^{*} = (E_3 + \sigma_{33}^{0})\partial U_3/\partial z \tag{2.11}$$

следующее из (2.6), (2.7), которое совместно с (2.10) позволяет записать уравнение относительно $\partial U_3/\partial z$. Прежде чем составить такое уравнение, необходимо найти явную зависимость σ_{33}^{0} от координаты z. Для этого обратимся к линейным уравнениям

$$\frac{\partial(H_1^2 H_2 \sigma_{13}^{0})}{\partial x_1} = 0, \quad \underline{\frac{\partial(H_2\sigma_{13}^{0})}{\partial x_1}} + \underline{\frac{(\partial H_1\sigma_{23}^{0})}{\partial x_2}} + \frac{\partial(H_1 H_2 \sigma_{33}^{0})}{\partial z} = 0 \tag{2.12}$$

описывающим равновесие элемента трансверсально-мягкого заполнителя в невозмущенном состоянии. Интегралы этих уравнений найдены в [5], однако их использование для дальнейших построений без введения дополнительных предположений представляется нецелесообразным.

Предположим, что x_1, x_2 являются лангальными параметрами поверхности σ, так что $H_1 = H_2 = 1$. Вместо x_1, x_2, z введем в рассмотрение безразмерные координаты $\xi_i = x_i/a_i$, $\xi = z/2h$, где a_i – некоторые масштабы изменения напряжений σ_{i3}^{0} по координатам x_i. В результате их использования последнее уравнение системы (2.12) примет вид

$$\frac{\partial\sigma_{33}^{0}}{\partial\xi} + \underline{\frac{2h}{a_1}\frac{\partial\sigma_{13}^{0}}{\partial\xi_1}} + \underline{\frac{2h}{a_2}\frac{\partial\sigma_{23}^{0}}{\partial\xi_2}} = 0$$

которое с точностью $1 + 2h/a_i \approx 1$ допускает упрощенное представление в виде $\partial\sigma_{33}^{0}/\partial\xi = 0$, если изменяемость функций σ_{i3}^{0} по x_i является малой, и в силу того, что $\sigma_{i3}^{0} \approx \sigma_{33}^{0}$. Принимая в дальнейшем это предположение, т.е. полагая $2h/a_i \approx \varepsilon \ll 1$, и пренебрегая в (2.12) подчеркнутыми слагаемыми, для σ_{33}^{0} находим приближенное решение

$$\sigma_{33}^{0} = g q_3^{0} \tag{2.13}$$

где g определяется по формуле (2.9). С учетом (2.13) выражение (2.11) примет вид

$$\sigma_{33}^{*} = (E_3 + g q_3^{0})\partial U_3/\partial z \tag{2.14}$$

исходя из которого в соответствии с (2.10) приходим к уравнению, разрешенному относительно $\partial U_3/\partial z$. Его интегрирование по z позволяет определить первообразную для характеристики перемещения U_3. Однако точное решение этой задачи приводит к весьма громоздкому и трудно анализируемому выражению для U_3 из-за функции g. Эта функция монотонно убывающая при $k_i > 0$ и достигает бесконечности при толщинах $k_i h = 1$, что возможно лишь в случае, когда трехслойная оболочка переходит в двухслойную со сплошным заполнителем. В реальных конструкциях $k_i h < 1$, что позволяет с точностью $0(k_i^2 h^2)$ считать $g \approx 1$. Ограничиваясь в дальнейшем этой степенью точности, исходя из (2.14), (2.10), приходим к уравнению

$$\begin{gathered}(E_3 + q_3^{0})\frac{\partial U_3}{\partial z} = q_3 + \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{1}{k_1(1+k_1 z)}\frac{\partial A_2 q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{k_2(1+k_2 z)}\frac{\partial A_1 q_2}{\partial x_2}\right] + q_3^{0}\varphi \\ \varphi = \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\int\frac{A_2 U_1 dz}{(1+k_1 z)} + \frac{\partial}{\partial x_2}\int\frac{A_1 U_2 dz}{(1+k_2 z)}\right)\end{gathered} \tag{2.15}$$

Интегралом уравнения (2.15) является функция

$$U_3 = w + \frac{1}{(E_3 + \overset{0}{q_3})}\left\{q_3 z + \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\ln(1+k_1 z)}{k_1^2}\frac{\partial A_2 q_1}{\partial x_1} + \frac{\ln(1+k_2 z)}{k_2^2}\frac{\partial A_1 q_2}{\partial x_2}\right] + \overset{0}{q_3}\int \varphi dz\right\} \quad (2.16)$$

где $w = w(x_1, x_2)$ – произвольная функция интегрирования.

С принятой степенью точности $0(k_i^2 h^2)$, исходя из (2.7), (2.8), для определения тангенциальных перемещений U_i приходим к уравнениям

$$\left(1 + \frac{\overset{0}{q_3}}{G_{i3}}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_i}{1 + k_i z}\right) = \frac{q_i}{G_{i3}} - \frac{\partial U_3}{A_i \partial x_i} \quad (2.17)$$

интегрирование которых по z от $-h$ до h приводит к выражениям

$$(G_{i3} + \overset{0}{q_3})\left[\frac{U_i(h)}{1 + k_i h} - \frac{U_i(-h)}{1 - k_i h}\right] = 2hq_i - \frac{G_{i3}\partial}{A_i \partial x_i}\int_{-h}^{h} U_3 dz \quad (2.18)$$

Таким образом, имеем систему трех интегро-дифференциальных уравнений (2.16), (2.17), в которых часть неизвестных может быть выражена через другие, если воспользоваться кинематическими условиями сопряжения несущих слоев с заполнителем. Пусть $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ – перемещения срединных поверхностей $\sigma_{(k)}$ несущих слоев в возмущенном состоянии, через которые по модели Кирхгофа – Лява углы поворотов нормальных к $\sigma_{(k)}$ элементов определяются по формулам

$$\omega_i^{(k)} = \frac{1}{A_i^{(k)}}\frac{\partial w^{(k)}}{\partial x_i} - k_i^{(k)} u_i^{(k)} \quad (2.19)$$

$$A_i^{(k)} = A_i[1 - \delta_{(k)}(h + h_{(k)})k_i], \quad k_i^{(k)} = k_i/[1 - \delta_{(k)}(h + h_{(k)})k_i] \quad (2.20)$$

Здесь $A_i^{(k)}$, $k_i^{(k)}$ – параметры Ляме и главные кривизны на $\sigma_{(k)}$. Через указанные величины условия сопряжения слоев запишутся в виде

$$u_i^{(k)} - \delta_{(k)} h_{(k)} \omega_i^{(k)} = U_i(-\delta_{(k)} h) \quad (2.21)$$

$$w^{(k)} = U_3(-\delta_{(k)} h) \quad (2.22)$$

Интегрируя теперь равенство (2.15) по z в пределах от $-h$ до h и используя условия (2.22), находим неизвестную функцию q_3:

$$q_3 = \frac{E_3^*(w^{(2)} - w^{(1)})}{2h} - \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{1}{k_1}\frac{\partial A_2 q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{k_2}\frac{\partial A_1 q_2}{\partial x_2}\right) - \overset{0}{q_3}\int_{-h}^{h} \varphi dz \quad (2.23)$$

$$E_3^* = E_3 + \overset{0}{q_3} \quad (2.24)$$

Аналогичным образом, удовлетворяя найденное решение (2.16) условиям (2.22), находим функцию w:

$$w = \frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{2} + \frac{h^2}{2E_3^*}\psi - \frac{\overset{0}{q_3}}{2E_3^*}\int_0^h [\varphi(z) - \varphi(-z)]dz \quad (2.25)$$

$$\psi = \frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2 q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 q_2}{\partial x_2}\right) \tag{2.26}$$

Функции (2.23), (2.25) позволяют записать выражения для U_3 и $H_1H_2\sigma_{33}^*$. Последнее понадобится для дальнейших построений и имеет вид

$$H_1H_2\sigma_{33}^* = A_1A_2\left\{\frac{E_3^*(w^{(2)} - w^{(1)})}{2h} - \frac{z}{A_1A_2}\left[\frac{1}{(1+k_1z)}\frac{\partial A_2q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{(1+k_2z)}\frac{\partial A_1q_2}{\partial x_2}\right] + q_3^0\varphi\right\} \tag{2.27}$$

Для этих же целей, используя (2.25), получим формулу

$$\int_{-h}^{h} U_3dz = (w^{(2)} - w^{(1)})h + \frac{2h^3}{3E_3^*}\psi + \frac{q_3^0}{2E_3^*}\left\{\int_{-h}^{h}\left(\int_0^z \varphi d\tau\right)dz - 2h\int_0^h[\varphi(z) - \varphi(-z)]dz\right\} \tag{2.28}$$

Удовлетворение двум условиям из четырех, выраженных формулами (2.21), а также подстановка полученного выражения (2.28) в (2.18) приводит к двум интегродифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered}\mu_i = (G_{i3} + q_3^0)\left[\frac{u_i^{(2)} + h_{(2)}\omega_i^{(2)}}{1+k_ih} - \frac{u_i^{(1)} - h_{(1)}\omega_i^{(1)}}{1-k_ih}\right] - 2hq_i + \\ + \frac{G_{i3}}{A_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{(w^{(1)} + w^{(2)})h + \frac{2h^2}{3E_3^*}\psi + \frac{q_3^0}{E_3^*}\left\{\int_{-h}^{h}\left(\int_0^z(\varphi d\tau)\right)dz - 2h\int_0^h[\varphi(z) - \varphi(-z)]dz\right\}\right\} = 0\end{gathered} \tag{2.29}$$

а два условия из (2.21), оставшиеся неиспользованными, служат для определения двух произвольных функций u_i в выражениях

$$\frac{G_{i3}^*}{1+k_iz}U_i = u_i - q_iz - \frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\int U_3dz, \quad G_{i3}^* = G_{i3} + q_3^0 \tag{2.30}$$

которые получены путем интегрирования по z уравнений (2.17). В результате удовлетворения этим условиям находим

$$u_i = \frac{G_{i3}^*}{2}\left[\frac{u_i^{(2)} + h_{(2)}\omega_i^{(2)}}{1+k_ih} + \frac{u_i^{(1)} - h_{(1)}\omega_i^{(1)}}{1-k_ih}\right] + \frac{1}{A_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\int U_3dz\right)\Big|_{z=h} + \left(\int U_3dz\right)\Big|_{z=-h}\right] \tag{2.31}$$

Таким образом, в рамках принятых предположений и использованных соотношений задача описания возмущенного НДС заполнителя сведена к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (2.29), (2.30), в которых неизвестными являются две двумерные функции q_i и две трехмерные функции U_i, а входящие в них величины U_3, u_i, q_3 и w с указанными неизвестными связаны зависимостями (2.16), (2.23), (2.25), (2.31). Отыскание строгого решения этой задачи весьма затруднительно и его и не требуется для практических приложений. В связи с этим ниже представлены два варианта ее упрощения.

2.2. Упрощенная модель, соответствующая учету конечности деформации поперечных сдвигов и малой изменяемости прогиба по толщине заполнителя. Как было установлено в [2], для построения двумерных уравнений теории трехслойных оболочек, позволяющих описать их чисто сдвиговые ФПУ, докритические поперечные сдвиговые деформации заполнителя необходимо считать конечными, а линейную деформацию в поперечном направлении – малой. В рамках используемого здесь подхода вторую часть сформулированного требования, касающегося деформации поперечного обжатия, следует дополнить введением предположения о малой изменяемости прогиба заполнителя по толщине в его невозмущенном состоянии, что позволяет в выражениях (2.4), (2.5) отбросить подчеркнутые слагаемые. Использование данных предположений приводит к использованию вместо (2.6) упрощенных представлений

$$\sigma_{3i}^* = \sigma_{i3} + \overset{0}{\sigma}_{33} \partial U_i / \partial z, \quad \sigma_{33}^* = \sigma_{33} = E_3 \partial U_3 / \partial z \tag{2.32}$$

В рамках этих представлений во всех выведенных выше соотношениях необходимо положить

$$E_3^* = E_3 + \overset{0}{q}_3 = E_3, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv 0 \tag{2.33}$$

В результате исходная сформулированная задача сводится к отысканию решения двух дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\mu_i = (G_{i3} + \overset{0}{q}_3)\left[\frac{u_i^{(2)} + h_{(2)}\omega_i^{(2)}}{1 + k_i h} - \frac{u_i^{(1)} - h_{(1)}\omega_i^{(1)}}{1 - k_i h}\right] - 2hq_i + \\ + \frac{G_{i3}}{A_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(w^{(1)} + w^{(2)})h + \frac{2h^3}{3E_3}\psi\right] = 0\end{gathered} \tag{2.34}$$

в которых неизвестными, кроме $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, как и в [3, 5, 8, 9], являются лишь две дополнительные двумерные функции q_i. Можно показать, что для уравнений (2.34) граничные условия относительно функции q_i формулируются в том же виде, что и в [5]. При этом требующееся для дальнейших построений выражение $H_1 H_2 \sigma_{33}^*$ принимает вид

$$H_1 H_2 \sigma_{33}^* = H_1 H_2 \sigma_{33} = \frac{A_1 A_2 E_3 (w^{(2)} - w^{(1)})}{2h} - z\left[\frac{1}{(1 + k_1 z)}\frac{\partial A_2 q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{(1 + k_2 z)}\frac{\partial A_1 q_2}{\partial x_2}\right] \tag{2.35}$$

а для $H_1 H_2 \sigma_{3i}^*$, как можно показать, с точностью $0(h^2 k_i^2)$ имеет место приближенная формула

$$H_1 H_2 \sigma_{3i}^* = A_1 A_2 q_i / (1 + k_i z) \tag{2.36}$$

И, наконец, отметим, что полагая в (2.32), (2.33), (2.34) и других соотношениях п. 2.1 $\overset{0}{q}_3 = 0$, приходим к соотношениям работы [5], использование которых для исследования сдвиговых ФПУ трехслойных конструкций, как показано в [2], приводит к некорректным результатам.

2.3. Частично упрощенная модель для описания НДС заполнителя в возмущенном состоянии. Основные соотношения, отвечающие этой модели, следуют из соотношений п. 2.1, если воспользоваться лишь вторым упрощением из (2.33):

$$\varphi \approx 0 \tag{2.37}$$

При учете этого равенства вместо (2.34) приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}\mu_i = (G_{i3} + \overset{0}{q}_3)\left[\frac{u_i^{(2)} + h_{(2)}\omega_i^{(2)}}{1 + k_i h} - \frac{u_i^{(1)} - h_{(1)}\omega_i^{(1)}}{1 - k_i h}\right] - 2hq_i + \\ + \frac{G_{i3}}{A_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(w^{(1)} + w^{(2)})h + \frac{2h^3}{3(E_3 + \overset{0}{q}_3)}\psi\right] = 0\end{gathered} \tag{2.38}$$

формула (2.36) остается без изменений, а вместо (2.35) будет иметь место соотношение

$$H_1H_2\sigma_{33}^* = \frac{A_1A_2(E_3+\overset{0}{q_3})(w^{(2)}-w^{(1)})}{2h} - z\left[\frac{1}{(1+k_1z)}\frac{\partial A_2q_1}{\partial x_1} + \frac{1}{(1+k_2z)}\frac{\partial A_1q_2}{\partial x_2}\right] \qquad (2.39)$$

Принципиальным отличием составленных уравнений (2.38) и формулы (2.39) от соответствующих уравнений (2.34) и формулы (2.35) является наличие в формуле (2.33) для E_3^* параметра докритического обжатия заполнителя $\overset{0}{q_3}$. Как будет показано ниже, сохранение этого параметра в составе E_3^*, качественно изменяя содержательность составленных уравнений в отношении возможности описания ФПУ с нулевой изменяемостью параметров возмущенного НДС в тангенциальных направлениях, приводит к таким неожиданным результатам, критический анализ которых требует коренной ревизии исходных соотношений нелинейной теории упругости, использованных в п. 2 данной статьи. Поэтому для дальнейших построений ниже будет использоваться именно этот вариант построенной частично упрощенной модели заполнителя.

3. Уравнения нейтрального равновесия внешних слоев при их докритическом среднем изгибе. Как и в [3, 5, 8, 9], предположим, что несущие слои оболочки в невозмущенном состоянии находятся в условиях среднего изгиба и их НДС описывается моделью Кирхгофа – Лява. Тогда в возмущенном состоянии их нейтральное равновесие в принятой системе координат будет описываться уравнениями

$$\begin{gathered} f_1^{(k)} = \frac{\partial A_2^{(k)}T_{11}^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1^{(k)}T_{12}^{(k)}}{\partial x_2} - T_{22}^{(k)}\frac{\partial A_2^{(k)}}{\partial x_1} + T_{12}^{(k)}\frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial x_2} + \\ + A_1^{(k)}A_2^{(k)}(k_1^{(k)}N_1^{(k)} + \delta_{(k)}X_1^{(k)}) = 0 \quad (\overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}) \end{gathered} \qquad (3.1)$$

$$\begin{gathered} f_3^{(k)} = \frac{\partial A_2^{(k)}N_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1^{(k)}N_2^{(k)}}{\partial x_2} - A_1^kA_2^k(k_1^{(k)}T_{11}^{(k)} + k_2^{(k)}T_{22}^{(k)} - \delta_{(k)}X_3^{(k)}) = 0 \\ X_i^{(k)} = \sigma_{3i}^*\big|_{z=-\delta_{(k)}(h+h_{(k)})}, \quad X_3^{(k)} = \sigma_{33}^*\big|_{z=-\delta_{(k)}(h+h_{(k)})} \quad (i=1,2) \end{gathered} \qquad (3.2)$$

$$\begin{gathered} N_1^{(k)} = \frac{1}{A_1^{(k)}A_2^{(k)}}\left[\frac{\partial A_2^{(k)}M_{11}^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1^{(k)}M_{12}^{(k)}}{\partial x_2} - M_{22}^{(k)}\frac{\partial A_2^{(k)}}{\partial x_1} + M_{12}^{(k)}\frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial x_2}\right] + \\ + T_{11}^{0(k)}\omega_1^{(k)} + T_{12}^{0(k)}\omega_2^{(k)} \quad (\overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}) \end{gathered} \qquad (3.3)$$

Здесь $X_i^{(k)}$, $X_3^{(k)}$ – напряжения в проекциях на недеформированные оси, действующие на несущие слои со стороны заполнителя и приведенные к срединным поверхностям $\sigma_{(k)}$; $N_i^{(k)}$ – перерезывающие усилия в несущих слоях.

Докритические усилия в несущих слоях $T_{ij}^{0(k)}$, входящие в уравнения (3.1) через формулы (3.3), определяются решением задачи о невозмущенном НДС оболочки, а для усилий $T_{ij}^{(k)}$ и моментов $M_{ij}^{(k)}$ в рамках принятых предположений имеют место общеизвестные формулы:

$$\begin{gathered} T_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)}(\varepsilon_{11}^{(k)} + \nu_1^{(k)}\varepsilon_{22}^{(k)}) \ (\overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}), \quad T_{12}^{(k)} = T_{21}^{(k)} = 2B_{12}^{(k)}\varepsilon_{12}^{(k)} \\ M_{11}^{(k)} = -D_{11}^{(k)}(\chi_{11}^{(k)} + \nu_1^{(k)}\chi_{22}^{(k)}) \ (\overrightarrow{\underleftarrow{1,2}}), \quad M_{12}^{(k)} = M_{21}^{(k)} = -2D_{12}^{(k)}\chi_{12}^{(k)} \end{gathered} \qquad (3.4)$$

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = \frac{1}{A_1^{(k)}}\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1^{(k)}A_2^{(k)}}\frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial x_2}u_2^{(k)} + k_1^{(k)}w^{(k)}$$

$$2\varepsilon_{12}^{(k)} = \frac{A_1^{(k)}}{A_2^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{u_1^{(k)}}{A_1^{(k)}}\right) + \frac{A_2^{(k)}}{A_1^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{u_2^{(k)}}{A_2^{(k)}}\right)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = \frac{1}{A_1^{(k)}}\frac{\partial \omega_1^{(k)}}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1^{(k)}A_2^{(k)}}\frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial x_2}\omega_2^{(k)} \quad (\overrightarrow{\underleftarrow{1, 2}}) \tag{3.5}$$

$$2\chi_{12}^{(k)} = \frac{A_1^{(k)}}{A_2^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\omega_1^{(k)}}{A_1^{(k)}}\right) + \frac{A_2^{(k)}}{A_1^{(k)}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\omega_2^{(k)}}{A_2^{(k)}}\right)$$

В соответствии с (3.2), (2.39), (2.36) для входящих в (3.1) величин $A_1^{(k)}A_2^{(k)}X_\alpha^{(k)}$ с принятой степенью точности можно получить формулы

$$A_1^{(k)}A_2^{(k)}X_i^{(k)} = \frac{A_1A_2q_i}{1-\delta_{(k)}(h+h_{(k)})k_i} \approx A_1A_2[1+\delta_{(k)}(h+h_{(k)})k_i]q_i$$

$$A_1^{(k)}A_2^{(k)}X_3^{(k)} = \frac{A_1A_2(E_3+\overset{0}{q}_3)(w^{(2)}-w^{(1)})}{2h} + \delta_{(k)}(h+h_{(k)})\left[\frac{1}{[1-\delta_{(k)}(h+h_{(k)})k_1]}\frac{\partial A_2q_1}{\partial x_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{[1-\delta_{(k)}(h+h_{(k)})k_2]}\frac{\partial A_1q_2}{\partial x_2}\right] \approx \frac{A_1A_2(E_3+\overset{0}{q}_3)(w^{(2)}-w^{(1)})}{2h} + \tag{3.6}$$

$$+ \delta_{(k)}(h+h_{(k)})\left\{[1+\delta_{(k)}(h+h_{(k)})k_1]\frac{\partial A_2q_1}{\partial x_1} + [1+\delta_{(k)}(h+h_{(k)})k_2]\frac{\partial A_1q_2}{\partial x_2}\right\}$$

подстановка которых в уравнения (3.1) позволяет убедиться в полной согласованности полученных результатов со структурой соотношений, приведенных в [5].

4. Устойчивость тонкого кругового трехслойного кольца при действии равномерного внешнего или внутреннего давления. Как и в [2, 7, 10], будем рассматривать трехслойное кольцо симметричного по толщине строения, находящееся до потери устойчивости в осесимметричном НДС под действием равномерного внешнего или внутреннего давления p. С целью исследования всех его возможных ФПУ для описания возмущенного НДС заполнителя будем использовать соотношения частично упрощенной модели, описанной в п. 2.3. Тогда, исходя из этих соотношений и основных зависимостей п. 3, при сохранении основных обозначений работ [2, 7, 10] с точностью $1 + h/R \approx 1$, $1 + t/R \approx 1$ можно составить следующую систему однородных уравнений устойчивости:

$$f_2^{(k)} = \frac{B}{R}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du_2^{(k)}}{d\theta} + w^{(k)}\right) - \frac{D}{R^2}\frac{d^2\omega_2^{(k)}}{d\theta^2} + T_{22}^{0(k)}\omega_2^{(k)} + \delta_{(k)}Rq_2 = 0$$

$$f_3^{(k)} = -\frac{D}{R^2}\frac{d^3\omega_2^{(k)}}{d\theta^3} + T_{22}^{0(k)}\frac{d\omega_2^{(k)}}{d\theta} - \frac{B}{R}\left(\frac{du_2^{(k)}}{d\theta} + w^{(k)}\right) + \tag{4.1}$$

$$+ \delta_{(k)}\frac{RE_3^*}{2h}(w^{(2)}-w^{(1)}) + (t+h)\frac{dq_2}{d\theta} = 0$$

$$\mu_2 = u_2^{(1)} - u_2^{(2)} - \left(t + \frac{hG_{23}}{G_{23}^*}\right)(\omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)}) + \frac{2h}{G_{23}^*}q_2 - \frac{2h^3 G_{23}}{3R^2 G_{23}^* E_3^*}\frac{d^2 q_2}{d\theta^2} = 0$$

где $x_2 = \theta$ – угловая координата, $2t = 2h_{(k)}$ – толщина внешнего слоя; B, $D = Bt^2/3$ – жесткости на растяжение – сжатие и изгиб несущего слоя; R – радиус срединной поверхности заполнителя.

Вводя в рассмотрение обозначения

$$\begin{gathered} h_0 = \frac{h}{R}, \quad t_0 = \frac{t}{R}, \quad c^2 = \frac{t_0^2}{3}, \quad T_{(k)}^{(0)} = \frac{T_{22}^{0(k)}}{B_0 R}, \quad B_0 = \frac{B}{R} \\ Q = \frac{2h_0 q_2}{G_{23}^*}, \quad K = \frac{G_{23}^*}{2h_0 B_0}, \quad \chi^* = \frac{E_3^*}{2h_0 B_0}, \quad h_0^* = \frac{h_0 G_{23}}{G_{23}^*}, \quad \tilde{w}^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{R} \end{gathered} \tag{4.2}$$

и принимая вместо $u_2^{(k)}$ в качестве неизвестных величины $\omega_2^{(k)} = \omega_{(k)}$, уравнения (4.1) с точностью $t_0^2/3 + 1 \approx 1$ приведем к виду

$$\begin{gathered} f_2^{(k)} = \frac{d}{d\theta}\left(1 + \frac{d^2}{d\theta^2}\right)\tilde{w}^{(k)} - \frac{d^2\omega_{(k)}}{d\theta^2} + T_{(k)}^0\omega_{(k)} + \delta_{(k)}KQ = 0 \\ f_3^{(k)} = \left(1 + \frac{d^2}{d\theta^2}\right)\tilde{w}^{(k)} + \frac{d}{d\theta}\left(c^2\frac{d^2}{d\theta^2} - 1\right)\omega_{(k)} - T_{(k)}^0\frac{d\omega_{(k)}}{d\theta} + \\ + \delta_{(k)}\chi^*(\tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(2)}) - (h_0 + t_0)K\frac{dQ}{d\theta} = 0 \\ \mu_2 = \frac{d}{d\theta}(\tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(2)}) + \omega_{(2)} - \omega_{(1)} - (t_0 + h_0^*)(\omega_{(1)} + \omega_{(2)}) + Q - \frac{G_{23}}{6B_0\chi^*}\frac{d^2Q}{d\theta^2} = 0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

Входящие в эти уравнения докритические усилия в несущих слоях при внешнем давлении определяются по формулам [7]:

$$T_{22}^{0(1)} = -\frac{\chi}{1 + 2\chi}Rp, \quad T_{22}^{0(2)} = -\frac{1+\chi}{1+2\chi}Rp \tag{4.4}$$

а при внутреннем давлении

$$T_{22}^{0(2)} = \frac{1+\chi}{1+2\chi}Rp, \quad T_{22}^{0(1)} = \frac{\chi}{1+2\chi}Rp \tag{4.5}$$

В обоих случаях для величины $\overset{0}{q}_3$, входящей в соотношения $G_{23}^* = G_{23} + \overset{0}{q}_3$, $E_3^* = E_3 + \overset{0}{q}_3$, имеет место формула [2]:

$$\overset{0}{q}_3 = -\frac{\chi}{1+2\chi}p, \quad \chi = \frac{E_3}{2B_0 h_0} \tag{4.6}$$

где χ – безразмерный параметр поперечного обжатия заполнителя.

4.1. Формы потери устойчивости кольца с нулевой изменяемостью параметров возмущенного НДС. Для выявления таких ФПУ в соответствии с [10] в составленных уравнениях (4.3) необходимо положить $d/d\theta = 0$. При этом они распадаются на две несвязанные системы уравнений

$$f_2^{(k)} = T_{(k)}^0\omega_{(k)} + \delta_{(k)}KQ = 0, \quad \mu_2 = \omega_{(2)} - \omega_{(1)} + Q = 0 \tag{4.7}$$

$$f_3^{(k)} = w^{(k)} + \delta_{(k)}(w^{(1)} - w^{(2)})\varphi = 0 \tag{4.8}$$

Условие нетривиальности системы (4.7) относительно неизвестных $\omega_{(k)}$, Q приводит к уравнению $T_{(1)}^0 T_{(2)}^0 + K(T_{(1)}^0 + T_{(2)}^0) = 0$, которое с учетом формулы $K = (G_{23} + q_3^0)/(2B_0h_0)$ запишется в виде

$$2h_0B_0T_{(1)}^0T_{(2)}^0 + (G_{23} + q_3^0)(T_{(1)}^0 + T_{(2)}^0) = 0 \tag{4.9}$$

Подстановка в данное уравнение формул как (4.4), (4.6), так и (4.5), (4.6) приводит к одной и той же зависимости

$$p_*^c = G_{23}\frac{(1+2\chi)}{\chi}\left[\frac{1}{1 + 2h_0\chi(1+\chi)/(1+2\chi)}\right] \tag{4.10}$$

по которой определяется критическое значение внешнего (внутреннего) давления p_*^c чисто сдвиговой ФПУ трехслойного кольца. Полученная формула (4.10), несколько отличаясь от аналогичной формулы, установленной в [2], с точностью $0(h_0)$, как и в [2], приводится к виду

$$p_*^c = G_{23}(1 + 2\chi)/\chi \tag{4.11}$$

К этому же результату приводит упрощенное представление уравнений $f_i^{(k)} = 0$, если в них, следуя известным положениям теории пологих оболочек, отбросить слагаемые $k_i^{(k)}N_i^{(k)}$. Так как при таком упрощении в (4.7) будет отсутствовать слагаемое $T_{(k)}^0\,\omega_{(k)}$, то из условия $Q \neq 0$ для удовлетворения уравнению $f_2^{(k)} = 0$ следует принять $K = 0$, или, в соответствии с формулой из (4.2), положить $G_{23} + q_3^0 = 0$. Подстановка в данное равенство, являющееся условием реализации чисто сдвиговой ФПУ [2], формулы (4.6) сразу же приводит к формуле (4.11). Однако следует отметить, что использование равенства $G_{23} + q_3^0 = 0$, следующего в рассматриваемом случае из упрощения теории пологих оболочек, не всегда является основой для определения критических усилий чисто сдвиговых ФПУ трехслойных конструкций.

Обратимся теперь к уравнениям (4.8). Условие нетривиальности их решения, т.е. $w^{(k)} \neq 0$ приводит к равенству

$$1 + 2\chi^* = 1 + (E_3 + q_3^0)/h_0B_0 = 0 \tag{4.12}$$

После подстановки в (4.12) формулы (4.6) для определения критического значения p_*^w приходим к следующему результату:

$$p_*^w = E_3\frac{(1+2\chi)^2}{2\chi^2} \tag{4.13}$$

имеющему место при действии как внутреннего, так и внешнего давления. Появление этой формулы приводит к парадоксальному выводу о том, что при достижении p значения, определяемого по формуле (4.13), происходит физически необъяснимая потеря устойчивости трехслойного кольца с нулевой изменяемостью параметров возмущенного НДС в окружном направлении, которая, в отличие от чисто сдвиговой ФПУ, сопровождается взаимным сближением внешних слоев лишь в поперечном направлении. Появление ФПУ с $w^{(k)} \neq 0$ связано с наличием в уравнениях (4.8) параметрических слагаемых $w^{(k)}\chi^*$ ввиду сохранения в зависимости (2.4) нелинейного члена $(\partial U_3/\partial z)^2$ и, как следствие, члена $\overset{0}{\sigma}_{33}$ в формуле (2.11). Пренебрежение ими отвечает построенной в п. 2.2 упрощенной математической модели заполнителя, при использовании которой вместо (4.8) приходим к уравнениям

$$f_3^{(k)} = w^{(k)} + \delta_{(k)}(w^{(1)} - w^{(2)})\chi = 0 \tag{4.14}$$

В силу неравенства нулю определителя этой системы, как и в [10, 2], приходим только к тривиальному решению $w^{(k)} \equiv 0$.

4.2. Задача о продольном растяжении – сжатии стержня. Причина получения парадоксального результата в виде формулы (4.13) элементарно можно объяснить, если рассмотреть задачу о продольной деформации стержня длиной l, который при $x = 0$ закреплен, а на другом конце при $x = l$ приложена осевая сила P. Для него при произвольных деформациях и перемещениях, используя обозначения и соотношения В.В. Новожилова из [11] и не проводя никаких предварительных упрощений, можно записать следующее уравнение начала возможных перемещений:

$$\delta = \int\limits_V \sigma_{xx}^* \delta\varepsilon_{xx} dxdydz + P\delta u(l) = 0 \tag{4.15}$$

$$\sigma_{xx}^* = \frac{S_x^*}{S_x}\frac{\sigma_{xx}}{1+E_x} \tag{4.16}$$

$$E_x = \sqrt{1+2\varepsilon_{xx}} - 1 \tag{4.17}$$

$$S_x^* = (1+E_y)(1+E_z)S_x \tag{4.18}$$

При растяжении – сжатии стержня перемещения v и w не зависят от x, поэтому

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \tag{4.19}$$

Продольная сила N в поперечном сечении стержня, имеющего до деформации площадь S_x, силу $\sigma_{xx} = \text{const}$ по S_x будет равна

$$N = \int\limits_{S_x^*} \sigma_{xx} dS_x^* = \sigma_{xx} S_x^* \tag{4.20}$$

Так как

$$\delta E_x = (1+2\varepsilon_{xx})^{-1/2}\delta\varepsilon_{xx} = \delta\varepsilon_{xx}/(1+E_x) \tag{4.21}$$

то с учетом (4.20), (4.21) из (4.15) следует

$$\int\limits_0^l N\delta E_x dx + P\delta u(l) = 0 \tag{4.22}$$

Но из (4.17), (4.19) видно, что

$$E_x\sqrt{1+2\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]}-1 = \sqrt{\left(1+\frac{du}{dx}\right)^2}-1 = \frac{du}{dx} \tag{4.23}$$

Следовательно, уравнение (4.22) представимо в виде

$$\int_0^l N\delta\left(\frac{du}{dx}\right)dx + P\delta u(l) = \int_0^l \frac{dN}{dx}\delta u dx - (N(l)-P)\delta u(l) = 0 \tag{4.24}$$

Поэтому

$$dN/dx = 0, \quad N(l) = P \tag{4.25}$$

Отсюда следует, что

$$N(x) = P \tag{4.26}$$

Этот результат совпадает с тем, что следует из уравнения равновесия стержня, и не зависит от величины деформации и механических свойств материала. Если принять закон Гука в форме $\sigma = N/S_x = E\varepsilon = Edu/dx$, которую принято представлять из эксперимента, то в силу $u(0) = 0$ получаем

$$u(x) = \frac{P}{ES_x}x \tag{4.27}$$

Это точное решение задачи при любых перемещениях в рамках закона Гука.

Если с точностью $2 + E_x \approx 2$ вместо (4.17) принять $E_x \approx \varepsilon_{xx}$, то, исходя из (4.22), вместо (4.24) получаем

$$\int_0^l N\delta\left[\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\right]dx + P\delta u(l) = \int_0^l N\left(1+\frac{du}{dx}\right)\delta\left(\frac{du}{dx}\right)dx + P\delta u(l) = 0 \tag{4.28}$$

Отсюда вместо (4.25) следуют

$$\frac{d}{dx}\left[N\left(1+\frac{du}{dx}\right)\right] = 0, \quad N\left(1+\frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=l} = P \tag{4.29}$$

Если в (4.29) не обратить внимания на "странное" граничное условие и пренебречь изменяемостью $(1 + du/dx)$, то получим

$$\frac{dN}{dx}\left(1+\frac{du}{dx}\right) = 0 \tag{4.30}$$

Отсюда следуют два варианта решений:

$$dN/dx = 0, \quad 1+du/dx = 0 \tag{4.31}$$

Но $du/dx \approx \varepsilon_{xx} = \sigma_{xx}/E$, поэтому $1 + \sigma_{xx}/E = 0$. Следовательно, $\sigma_{xx} = -E$. А это как раз такое напряжение, при котором $u(l) = -l$, т.е. деформированная длина $l + u(l) = 0$.

Полученный результат полностью связан с принятием приближения $E_x \approx \varepsilon_{xx}$ в рассмотренной простейшей одномерной задаче, а аналогичный результат, полученный в [12] (стр. 132, формула (1.7)), – с принятием предположений $E_x \approx \varepsilon_{xx}$, $E_y \approx \varepsilon_{yy}$.

Обобщая изложенное, следует констатировать, что в трехмерном случае более корректным представляется использование упрощенных геометрически нелинейных кинематических соотношений вида

$$E_x \approx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \quad E_y \approx \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$E_z \approx \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)^2\right] \tag{4.32}$$

вместо общепринятых

$$E_x \approx \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$E_y \approx \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \tag{4.33}$$

$$E_z \approx \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

которые во всей научной литературе рекомендуются к использованию при малых деформациях удлинений. В свете сформулированного вывода использование в (2.1), (2.2) вместо $\sigma_{33}^* = \sigma_{33}(1 + \partial u_3/\partial z)$ равенства $\sigma_{33}^* = \sigma_{33}$, отбрасывание в (2.4), (2.5) подчеркнутых слагаемых, т.е. использование формул (2.32) и основанных на них уравнений п. 2.2 является более корректным, чем использование уравнений п. 2.3. А найденное решение в виде формулы (4.13), связанное с сохранением в (2.4), (2.5) подчеркнутых слагаемых и, как следствие, с сохранением в (2.24) слагаемого $\overset{0}{q}_3$, является некорректным и физически нереализующимся.

4.3. Изгибные ФПУ трехслойного кольца при действии внешнего давления. При действии на трехслойное кольцо равномерного внешнего давления возможна реализация и чисто изгибных ФПУ, так как при этом внешние слои кольца находятся в условиях сжатия. Такие изгибные ФПУ подробно были исследованы в [7] на основе уравнений, построенных в [5], являющихся менее содержательными по сравнению с построенными в данной работе.

С целью исследования степени точности таких уравнений [5] и построенного на их основе решения задачи [7] в свете выводов, сформулированных в п. 4.2, проведем ее исследование на основе уравнений (4.1), в которых необходимо положить $E_3^* = E_3$, $\chi^* = \chi$. Такие уравнения при $d/d\theta \neq 0$ целесообразно представить в виде

$$\frac{df_2^{(k)}}{d\theta} + f_3^{(k)} = 0, \quad \frac{df_3^{(k)}}{d\theta} - f_2^{(k)} = 0, \quad \mu_2 = 0 \tag{4.34}$$

При использовании соответствующих выражений из (4.3) и введении новых функций

$$w_c = \tilde{w}^{(1)} + \tilde{w}^{(2)}, \quad w_a = \tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(2)}, \quad \omega_c = \omega_{(1)} + \omega_{(2)}$$

$$\omega_a = \omega_{(1)} - \omega_{(2)}, \quad T_c = \overset{0}{T}_{(1)} + \overset{0}{T}_{(2)}, \quad T_a = \overset{0}{T}_{(1)} - \overset{0}{T}_{(2)}$$

система уравнений (4.34) с точностью $0(h_0 + t_0)$ приводится к виду

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)w_c - \frac{d\omega_c}{d\theta} = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^2 w_a - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)\omega_a + 2K\frac{dQ}{d\theta} + 2\chi w_a = 0$$

$$c^2\frac{d^4\omega_c}{d\theta^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)(T_c\omega_c + T_a\omega_a) - 2K(h_0+t_0)\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)Q = 0 \qquad (4.35)$$

$$c^2\frac{d^4\omega_a}{d\theta^4} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)(T_c\omega_a + T_a\omega_c) - 2KQ + 2\chi\frac{dw_a}{d\theta} = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}(w_a - h_0^* w_c) - \omega_a + Q - \frac{h_0 G_{23}}{6B\chi}\frac{d^2Q}{d\theta^2} = 0$$

Принимая решение составленных уравнений (4.35) в форме

$$w_c = W_n^c\cos n\theta,\quad w_a = W_n^a\cos n\theta,\quad \omega_c = V_n^c\sin n\theta,\quad \omega_a = V_n^a\sin n\theta$$
$$Q = Q_n\sin n\theta\ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (4.36)$$

относительно амплитуд W_n^c, W_n^a, ..., Q_n, приходим к следующей однородной системе алгебраических уравнений:

$$W_n^c = \frac{n}{n^2-1}V_n^c,\quad W_n^a = \frac{n(n^2-1)V_n^a + 2KQ_n n}{(n^2-1)^2+2\chi}$$

$$2c^2n^4V_n^c + (n^2-1)(T_cV_n^c + T_aV_n^a) + 4K(h_0+t_0)(n^2-1)Q_n = 0$$
$$2c^2n^4V_n^a + (n^2-1)(T_cV_n^a + T_aV_n^c) - 4KQ_n + 2n\chi W_n^a = 0 \qquad (4.37)$$

$$n(W_n^a - h_0^* W_n^c) - V_n^a + Q_n\left(1 + \frac{h_0 n^2 G_{23}}{6B\chi}\right) = 0$$

В качестве искомого выберем параметр

$$m = p/p_*^0,\quad p_*^0 = t_0^2 B_0/R \qquad (4.38)$$

где p_*^0 – значение критического давления для однослойного кольца по классической теории оболочек Кирхгофа – Лява. Через этот параметр величины K и h_0^* выражаются по формулам

$$K = \chi\left[\delta - \frac{mc^2}{2h_0(1+2\chi)}\right],\quad h_0^* = \frac{h_0}{1 - mc^2/[2h_0\delta(1+2\chi)]},\quad \delta = \frac{G_{23}}{E_3} \qquad (4.39)$$

Кроме того, введем в рассмотрение параметры, зависящие от числа полуволн и параметров (4.39):

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n = \frac{n^2\chi}{2\varphi + (n^2-1)^2}, \quad K_n = \frac{2K}{1 + n^2h_0^2\chi\delta/3\chi + 2n^2K/[(n^2-1)^2+2\chi]} \\
&a_{11n} = 1 + \frac{K_n(h_0+t_0)h_0^*}{c^2n^2}, \quad a_{21n} = \frac{K_n(\varphi_n-1)h_0^*}{c^2n^2(n^2-1)} \\
&a_{12n} = \frac{K_n(h_0+t_0)(n^2-1-2\chi)(n^2-1)}{c^2n^4[(n^2-1)^2+2\chi]} \\
&a_{22n} = 1 + \frac{\varphi_n(n^2-1)}{c^2n^4} - \frac{K_n(\varphi_n-1)(n^2-1-2\chi)}{c^2n^4[(n^2-1)^2+2\chi]} \\
&A_n = \frac{(1+2\chi)^2n^4}{4\chi(1+\chi)(n^2-1)}\left[a_{11n} + a_{22n} - \frac{a_{12n}-a_{21n}}{1+2\chi}\right] \\
&B_n = \frac{(1+2\chi)^2n^8}{\chi(1+\chi)(n^2-1)^2}(a_{11n}a_{22n} + a_{12n}a_{21n})
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

В результате, исходя из условия разрешимости системы (4.37), можно записать следующие выражения для определения значения m в зависимости от числа полуволн n:

$$
m_1 = A_n + \sqrt{A_n^2 - B_n}, \quad m_2 = A_n - \sqrt{A_n^2 - B_n} \tag{4.41}
$$

из которых путем решения задачи минимизации

$$
m_*^u = \min_{(n)}(m_1, m_2) \tag{4.42}
$$

определяется минимальное значение параметра критической нагрузки m_*^u и отвечающее ему число полуволн потери устойчивости n_*^u по изгибной форме.

Нахождение m_*^u из (4.42) в виде явной аналитической формулы затруднено из-за того, что коэффициенты (4.39), (4.40) зависят от параметра m. Поэтому целесообразнее организовать для определения m_*^u итерационный процесс, используя метод последовательных приближений. В рамках этого метода на первом шаге итерации коэффициенты (4.39) вычисляются при $m = 0$ и по формулам (4.40) и (4.41) находится m_*. На последующих шагах итерации в (4.39) вместо m принимается найденное с предыдущего шага значение m_* и уточняется значение m_* из (4.42). Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая степень точности вычислений.

Некоторые результаты таких расчетов приведены в табл. 1 ($\chi = 1.0$; $t_0 = 0.01$) и 2 ($t_0 = 0.01$), в которых под n_0 и m_0 понимаются значения критического числа полуволн и соответствующего ему параметра нагрузки (4.38) при $q_3^0 = 0$ (нулевое приближение), а n и m_*^u – уточненные их значения ($q_3^0 \neq 0$); m_*^c – значение критического параметра сдвиговой ФПУ, вычисляемого по формуле (4.38), где p принято в виде (4.10), а $r = h_0/t_0$.

Таблица 1

r	$\delta = 1/2.6$				$\delta = 0.1/2.6$				$\delta = 0.01/2.6$			
	n_0	m_0	n	m_*^u	n_0	m_0	n	m_*^u	n_0	m_0	n	m_*^u
2	2	12.93	2	12.98	2	4.75	2	4.75	2	3.68	2	3.68
4	2	34.88	2	35.11	2	7.54	2	7.55	2	3.96	2	3.97
6	2	69.49	2	70.15	2	11.92	2	11.94	2	4.41	2	4.42
8	3	116.20	3	116.96	2	17.89	2	17.94	2	5.03	2	5.03
10	3	174.04	3	175.42	2	25.46	2	25.54	2	5.81	2	5.81

Таблица 2

χ	r	$\delta = 1/2.6$		$\delta = 0.1/2.6$		$\delta = 0.01/2.6$	
		m_*^u	m_*^c	m_*^u	m_*^c	m_*^u	m_*^c
0.2	2	5.67	33.84	3.80	3.38	3.58	0.34
	10	43.34	149.39	8.03	14.94	4.00	1.49
0.4	2	7.61	43.64	4.04	4.36	3.60	0.44
	10	78.37	194.71	12.44	19.47	4.46	1.95
0.6	2	9.48	53.45	4.28	5.34	3.63	0.53
	10	111.79	240.08	16.83	24.01	4.91	2.40
0.8	2	11.26	63.25	4.52	6.32	3.65	0.63
	10	144.08	285.47	21.19	28.55	5.36	2.85
1	2	12.98	73.05	4.75	7.31	3.68	0.73
	10	175.42	330.88	25.54	33.09	5.81	3.31
5	2	37.35	269.0	9.26	26.91	4.17	2.69
	10	631.75	1240	98.13	124.0	14.76	12.4
10	2	53.63	514.0	14.34	51.4	4.77	5.14
	10	930.81	2376	183.75	237.6	25.65	23.76

5. Заключение. *1.* Учет конечности деформаций поперечных сдвигов при описании невозмущенного НДС заполнителя практически не уточняет значение критической нагрузки потери устойчивости трехслойных конструкций по изгибной форме. Такое уточнение (в пределах 5%) наблюдается лишь при малых значениях параметра поперечного обжатия заполнителя χ и большой анизотропии его свойств, когда $\delta = G_{23}/E_3 \ll 1$. Но при этом у трехслойных конструкций раньше изгибной ФПУ реализуется чисто сдвиговая ФПУ, т.е. при $\delta \ll 1$ имеет место неравенство $m_*^c < m_*^u$.

2. У трехслойных конструкций с изотропным заполнителем (в таблице им соответствуют данные при $\delta = 1/2.6$) критические нагрузки потери устойчивости по изгибной ФПУ всегда ниже, чем критические нагрузки сдвиговых ФПУ. Реализация чисто сдвиговой ФПУ раньше изгибной возможна у трехслойных конструкций с ребристыми заполнителями, разнообразные структуры которых часто используются на практике.

3. Уточненные варианты теории трехслойных оболочек, построенные в работах [3–5, 8] в предположении о малости деформаций поперечных сдвигов заполнителя, имеют весьма высокую степень точности для описания изгибных ФПУ трехслойных конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 03-01-00535, 03-01-00071).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Паймушин В.Н.* Теория устойчивости трехслойных пластин и оболочек (этапы развития, современное состояние и направления дальнейших исследований) // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 2. С. 148–162.
2. *Иванов В.А., Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.* Уточненная геометрически нелинейная теория и сдвиговые формы потери устойчивости трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Изв. РАН. МТТ. 2005. №3. С. 167–177.
3. *Иванов В.А., Паймушин В.Н.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (нелинейные уравнения докритического равновесия оболочек с трансверсально-мягким заполнителем) // Изв. вузов. Математика. 1994. № 11. С. 29–42.
4. *Иванов В.А., Паймушин В.Н., Полякова Т.В.* Уточненная теория устойчивости трехслойных конструкций (линеаризованные уравнения нейтрального равновесия и простейшие одномерные задачи) // Изв. вузов. Математика. 1995. № 3. С. 15–24.
5. *Паймушин В.Н., Бобров С.Н.* Уточненная геометрически нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем средней толщины для исследования смешанных форм потери устойчивости // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 1. С. 95–108.
6. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
7. *Паймушин В.Н., Иванов В.А., Бобров С.Н., Полякова Т.В.* Устойчивость трехслойного кругового кольца под равномерным внешним давлением // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 3. С. 317–328.
8. *Паймушин В.Н., Хусаинов В.Р.* Уточненная теория трехслойных пластин и оболочек для исследования динамических процессов деформирования с большими показателями изменяемости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2001. Т. 7. № 2. С. 215–235.
9. *Паймушин В.Н.* Классические и неклассические задачи динамики трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37. № 3. С. 289–306.
10. *Паймушин В.Н.* Сдвиговая форма потери устойчивости трехслойного кругового кольца при равномерном внешнем давлении // Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 1. С. 58–60.
11. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л.; М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
12. *Паймушин В.Н., Иванов В.А.* Формы потери устойчивости однородных и трехслойных пластин при чистом сдвиге в тангенциальных направлениях // Механика композитных материалов. 2000. Т. 36. № 2. С. 215–228.

Казань, Москва

Поступила в редакцию
30.05.2003