

УДК 539.214

© 2005 г. Д.А. ГЕОРГИЕВСКАЯ, Д.В. ГЕОРГИЕВСКИЙ

СЛАБОНЕОДНОРОДНЫЕ ПО ПРЕДЕЛУ ТЕКУЧЕСТИ ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СЕН-ВЕНАНА

Постановка задачи для неоднородной идеально пластической среды при эйлеровом описании движения помимо прочего включает в себя нахождение закона движения лагранжевых частиц вдоль своих траекторий и обращение этого закона. В случае, когда в начальный момент времени значения единственной материальной функции – предела текучести – в неоднородном материале мало отличаются от некоторого известного распределения (в частности, константы), применяется асимптотический метод. Вводятся понятия слабой неоднородности в узком и широком смысле.

Предложенный метод апробируется на примере решения задачи о растекании-стоке слабонеоднородной толстостенной идеально пластической трубы. В качестве основного процесса выбирается квазистатическое деформирование неоднородной по радиусу трубы, причем эта неоднородность может быть “сильной” и “разрывной” (т.е. тело может быть композитом). Для возмущений формулируется линеаризованная начально-краевая задача, которая для первого приближения решается аналитически. Решение показывает связь характера заданной неоднородности с особенностями решения в первом приближении по малому параметру.

1. Замкнутые системы, описывающие неоднородное пластическое течение Сен-Венана. Пусть область $\Omega, \subseteq R^3$ занята несжимаемым идеально пластическим материалом с пределом текучести σ_s , зависящим от эйлеровых координат $x \in \Omega$, и времени t . В области Ω , заданы массовые силы $F(x, t)$. Рассмотрим квазистатическое течение данного материала при $t > 0$ [1–7]; для удобства общее изложение будем вести в декартовых координатах x_i ($i = 1, 2, 3$).

В пространственном случае имеем три уравнения квазистатического равновесия

$$-p_{,i} + s_{ij,j} + \rho F_{i,} = 0 \quad (1.1)$$

где p – давление; s_{ij} – компоненты девиатора \bar{s} тензора напряжений $\bar{\sigma}$ и условие несжимаемости

$$v_{i,i} = 0 \quad (1.2)$$

Условие пластичности Мизеса – Генки следующим образом связывает компоненты s_{ij} :

$$\sigma_u^2 \equiv s_{ij}s_{ij} \equiv ((s_{11} - s_{22})^2 + (s_{22} - s_{33})^2 + (s_{33} - s_{11})^2 + 6(s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{31}^2))/3 = \sigma_s^2 \quad (1.3)$$

С учетом скалярного определяющего соотношения (1.3) тензорно линейные соотношения идеально пластической среды записываются следующим образом

$$s_{ij} = \sigma_s v_{ij}/v_u \quad (1.4)$$

В силу того, что $s_{ii} = 0$ и $s_{ij}s_{ij} = \sigma_s^2$, из шести равенств (1.4) независимыми остаются четыре, например

$$s_{11} = \frac{\sigma_s}{v_u} v_{11}, \quad s_{22} = \frac{\sigma_s}{v_u} v_{22}, \quad s_{12} = \frac{\sigma_s}{v_u} v_{12}, \quad s_{13} = \frac{\sigma_s}{v_u} v_{13} \quad (1.5)$$

В (1.5) следует подставить соотношения Стокса

$$2v_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} \quad (1.6)$$

для выражения компонент тензора скоростей деформаций \tilde{v} через компоненты вектора скорости v . При этом с учетом несжимаемости (1.2) интенсивность v_u выражается через градиенты скоростей

$$2v_u^2 = (v_{i,j} + v_{j,i})v_{i,j} \quad (1.7)$$

Таким образом, в области Ω_t относительно девяти неизвестных функций эйлеровых координат и времени $v_1, v_2, v_3, p, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{13}, s_{23}$ должны выполняться три уравнения (1.1), одно уравнение (1.2), четыре соотношения (1.5) и одно условие пластичности (1.3).

Как известно, неоднородной называется среда, у которой плотность и материальные функции определяющих соотношений зависят от координат. Если эти зависимости разрывны по координатам, то тело называется композитом [8]. При эйлеровом описании движения сплошной среды, который используется в данной работе, зависимость материальных функций от координат может быть двух типов. Остановимся подробнее на каждом из них.

1. Плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ и материальные функции, а к их числу в идеально пластическом течении относится только предел текучести $\sigma_s(\mathbf{x}, t)$, являются известными, т.е. заданными распределениями \mathbf{x} и t . Это происходит в следующем случае. Материальные функции могут зависеть от внешних полей – температуры, влажности, дозы радиации, полей электромагнитных величин и т.д. Например, известно много эмпирических зависимостей динамической вязкости жидкости от температуры, модуля Юнга упругого материала от интенсивности радиоактивного облучения и т.п. Если эти внешние поля заданы, то известны и материальные функции. Тогда система (1.1)–(1.3), (1.5) (система А) замкнута в области идеально пластического тела Ω_t .

2. Физико-механические свойства среды в каждой точке пространства \mathbf{x} в момент t являются свойствами лагранжевой частицы, которая находится в этот момент времени в этой точке пространства. Так как закон движения или траектории частиц заранее неизвестны, то плотность и материальные функции неизвестным образом зависят от \mathbf{x} и t . Для несжимаемой среды следствием уравнения неразрывности и условия несжимаемости (1.2) является уравнение $dp/dt = 0$ с первым интегралом

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}_0, 0) \equiv \rho^0(\mathbf{x}_0) \quad (1.8)$$

Положим [9, 10], что предел текучести в каждой лагранжевой частице, так же как и плотность в случае несжимаемости, сохраняется при массопереносе, т.е.

$$\sigma_s(\mathbf{x}, t) = \sigma_s(\mathbf{x}_0, 0) \equiv \Sigma(\mathbf{x}_0) \quad (1.9)$$

Тогда к равенствам (1.1)–(1.3), (1.5) надо добавить три уравнения

$$dx_i/dt = v_i(\mathbf{x}, t), \quad x_i(0) = x_{i0} \quad (1.10)$$

для определения закона движения частиц, обращая который, можно найти обратный закон движения

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t) \quad (1.11)$$

и подставить его в (1.8), (1.9), так что функции

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho^0(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t)), \quad \sigma_s(\mathbf{x}, t) = \Sigma(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t))$$

станут известными. К числу величин, подлежащих нахождению, добавятся $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, так что общая система будет насчитывать двенадцать уравнений (1.1)–(1.3), (1.5), (1.10) (система B). Заметим, что из данной системы невозможно выделить подсистему (1.10) из-за того, что ρ и σ_s , входящие в другие уравнения системы B , неизвестны и определяются из (1.8) и (1.9), куда входит закон движения.

Уравнения (1.1)–(1.3), (1.5), (1.10), выполненные в области Ω_t , должны быть дополнены граничными и начальными условиями для постановки начально-краевой задачи пространственного идеально пластического течения неоднородного материала.

Приведем теперь полную систему уравнений для плоского неоднородного течения Сен-Венана (плоская деформация). Она включает в себя два уравнения квазистатического равновесия

$$-p_{,I} + s_{IJ, J} + \rho F_I = 0 \quad (1.12)$$

условие несжимаемости

$$v_{I, I} = 0 \quad (1.13)$$

условие пластичности Мизеса – Генки

$$\sigma_u \equiv \sqrt{s_{IJ}s_{IJ}} \equiv \sqrt{2(s_{11}^2 + s_{12}^2)} = \sigma_s \quad (1.14)$$

а также условие соосности девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформации (1.4), из которых независимым будет только одно, например

$$s_{11} = \sigma_s v_{11}/v_u, \quad v_u = \sqrt{2(v_{11}^2 + v_{12}^2)} \quad (1.15)$$

Как и ранее, функции $\rho(\mathbf{x}, t)$ и $\sigma_s(\mathbf{x}, t)$ определяются из (1.8), (1.9). Поэтому к равенствам (1.12)–(1.15) надо добавить два уравнения

$$dx_I/dt = v_I(\mathbf{x}, t), \quad x_I(0) = x_{I0} \quad (1.16)$$

для определения закона движения частиц.

Таким образом, необходимо найти семь функций v_1 , v_2 , p , s_{11} , s_{12} , $x_1(t)$, $x_2(t)$ из семи уравнений (1.12)–(1.16) (система B'). Эти уравнения в плоской области Ω_t должны быть дополнены граничными условиями на контуре $\partial\Omega_t$ и, возможно, начальными условиями для формулировки начально-краевой задачи плоского идеально пластического течения.

В случае отсутствия массовых сил \mathbf{F} для описания напряженного состояния удобно использовать функцию напряжений $\Phi(\mathbf{x}, t)$;

$$p = \Delta\Phi, \quad s_{11} = -s_{22} = \Phi_{,11} - \Phi_{,22} \equiv -L\Phi, \quad s_{12} = 2\Phi_{,12} \equiv M\Phi \quad (1.17)$$

а для описания картины течения функцию тока $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$v_1 = \psi_{,2}, \quad v_2 = -\psi_{,1}, \quad v_{11} = -v_{22} = M\psi/2, \quad v_{12} = L\psi/2 \quad (1.18)$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad M = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad L^2 + M^2 = \Delta^2 \quad (1.19)$$

При подстановке (1.17) в (1.12) ($\mathbf{F} = 0$) и (1.18) в (1.13) три равенства (1.12) и (1.13) удовлетворяются тождественно. Из условия пластичности (1.14) следует нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка на Φ :

$$(L\Phi)^2 + (M\Phi)^2 = \sigma_s^2/2 \quad (1.20)$$

а из (1.15) имеем связь функций Φ и ψ :

$$L\Phi = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{2((L\psi)^2 + (M\psi)^2)}} M\psi \quad (1.21)$$

Уравнения (1.16) для определения закона движения сведутся к следующим:

$$dx_1/dt = \psi_{,2}, \quad dx_2/dt = -\psi_{,1}, \quad x_I(0) = x_{I0} \quad (1.22)$$

Математически уравнения (1.22) идентичны каноническим уравнениям Гамильтона для системы с одной степенью свободы, причем в качестве функции Гамильтона выступает функция тока (поэтому ее иногда называют "гамильтонианом"), а в качестве обобщенных координаты и импульса декартовы координаты $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Уравнения (1.22) справедливы не только для идеально пластического, но и для любого плоского несжимаемого течения сплошной среды. Поэтому некоторые качественные выводы гамильтоновой механики приложимы в задачах о плоском деформировании сплошной среды [11].

Итак, в терминах функции напряжения и функции тока система уравнений в плоской области Ω , состоит из четырех уравнений (1.20)–(1.22), которые включают четыре неизвестные: $\Phi(\mathbf{x}, t)$, $\psi(\mathbf{x}, t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$. Предел текучести $\sigma_s(\mathbf{x}, t)$ в (1.10) определяется начальным распределением (1.9) и обратным законом движения (1.11).

Известна и другая параметризация напряженного состояния в плоском, идеально пластическом течении, связанная с тождественным удовлетворением условия пластичности (1.14) [1, 2, 6]:

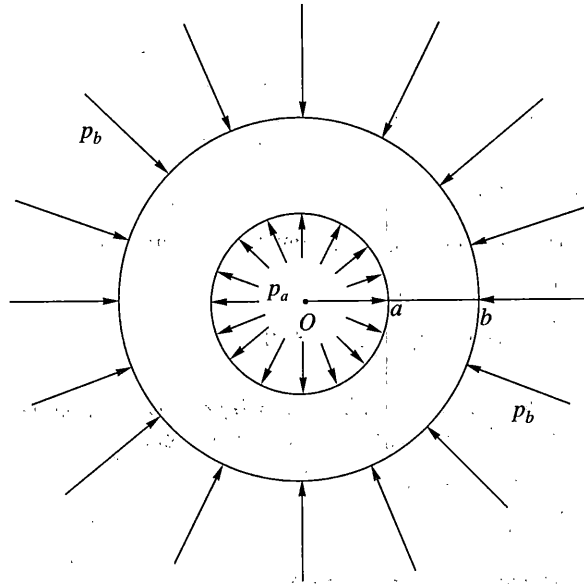
$$s_{11} = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} \sin 2\varphi, \quad s_{12} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} \cos 2\varphi, \quad \varphi \in [0; \pi[\quad (1.23)$$

Тогда, дифференцируя по x_2 уравнение равновесия (1.12) при $I = 1$, вычитая из него продифференцированное по x_1 уравнение (1.12) при $I = 2$ и подставляя (1.23), приходим к нелинейному уравнению

$$L(\sigma_s \cos 2\varphi) = M(\sigma_s \sin 2\varphi) \quad (1.24)$$

Если материал однороден по пределу текучести, то (1.24) представляет собой единственное и не зависящее от σ_s уравнение относительно $\varphi(\mathbf{x}, t)$ – универсальное уравнение плоской теории идеальной пластичности. Если к тому же граничные условия поставлены в напряжениях, то задача статически определима. После нахождения функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ – угла между площадкой с максимальным касательным напряжением (или между линией скольжения, проходящей через данную точку) и одной из осей декартовой системы координат – кинематика течения описывается единственным уравнением относительно функции тока

$$M\psi = -\sqrt{(L\psi)^2 + (M\psi)^2} \sin 2\varphi \quad (1.25)$$



Фиг. 1

Для неоднородного по пределу текучести материала задачи для определения напряженного состояния и кинематики не разделяются. В этом случае необходимо найти четыре функции φ , ψ , $x_1(t)$, $x_2(t)$ из четырех уравнений (1.24), (1.25), (1.22), где предел текучести в (1.24) задается начальным распределением (1.9) и обратным законом движения (1.11).

2. Примеры неоднородных пластических течений. Приведем простейшие примеры одномерных течений неоднородного идеально пластического материала, в которых решение удастся получить аналитически.

Рассмотрим квазистатическое течение, реализуемое в толстостенной цилиндрической трубе с радиусами $a(t)$ и $b(t)$ под действием заданных при $r = a$ и $r = b$ постоянных векторов усилий с радиальными компонентами $-p_a$ и $-p_b$ соответственно и с равными нулю тангенциальными компонентами (фиг. 1). Начальное распределение предела текучести зависит только от радиуса, т.е.

$$\Sigma(r_0, \theta_0) = \Sigma(r_0), \quad a(0) = a_0 < r_0 < b_0 = b(0) \quad (2.1)$$

Течение плоское, поэтому изложение будем вести в полярной системе координат (r, θ) , связанной с осью трубы.

Постановка задачи B' (см. (1.12)–(1.16)) выглядит следующим образом. В области $\Omega_r = \{(r; \theta) : a < r < b\}$ надо удовлетворить пяти уравнениям

$$-p_{,r} + s_{rr,r} + \frac{s_{r\theta,\theta}}{r} + \frac{2s_{rr}}{r} = 0 \quad (2.2)$$

$$-\frac{p_{,\theta}}{r} + s_{r\theta,r} - \frac{s_{rr,\theta}}{r} + \frac{2s_{r\theta}}{r} = 0$$

$$v_{r,r} + v_r/r + v_{\theta,\theta}/r = 0 \quad (2.3)$$

$$s_{rr}^2 + s_{r\theta}^2 = \sigma_s^2/2 \quad (2.4)$$

$$s_{rr} = \frac{\sigma_s}{v_u} v_{rr}, \quad v_u = \sqrt{2(v_{rr}^2 + v_{r\theta}^2)} \quad (2.5)$$

$$\sigma_s(r, \theta, t) = \Sigma(r_0, (r, \theta, t)) \quad (2.6)$$

Выпишем также уравнения для определения закона движения $r = r(r_0, \theta_0, t)$, $\theta = \theta(r_0, \theta_0, t)$:

$$\frac{dr}{dt} = v_r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r}, \quad r(0) = r_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (2.7)$$

и обратного закона движения $r_0 = r_0(r, \theta, t)$, $\theta_0 = \theta_0(r, \theta, t)$ для подстановки в (2.6).

Граничные условия на $\partial\Omega$, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} r = a: & \quad (-p) + s_{rr} = -p_a, \quad s_{r\theta} = 0 \\ r = b: & \quad (-p) + s_{rr} = -p_b, \quad s_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Будем искать кинематику в поставленной задаче в виде осесимметричного растекания-стока $v_r = v(r)$, $v_\theta \equiv 0$. Тогда из (2.3) сразу следует

$$v = \frac{c}{r}, \quad v_{rr} = -\frac{c}{r^2}, \quad v_{r\theta} \equiv 0, \quad v_u = \frac{\sqrt{2}|c|}{r^2}, \quad \psi = c\theta \quad (2.9)$$

где плоский расход c через любую окружность с центром в начале координат является, вообще говоря, произвольной функцией времени. Ограничимся случаем, когда этот расход постоянен (если $c > 0$, имеем растекание трубы; если $c < 0$, имеем сток).

Интегрируя систему Коши (2.7) для поля скоростей (2.9), найдем закон движения частиц вдоль своих прямолинейных траекторий

$$r = \sqrt{r_0^2 + 2ct}, \quad \theta = \theta_0 \quad (2.10)$$

и обратный закон движения

$$r_0 = \sqrt{r^2 - 2ct}, \quad \theta_0 = \theta \quad (2.11)$$

Условие (2.6) сведется к следующему:

$$\sigma_s(r, \theta, t) = \Sigma(\sqrt{r^2 - 2ct}) \quad (2.12)$$

Пусть $c > 0$. Тогда из (2.5) и (2.2) сразу находим обе компоненты девиатора напряжений

$$s_{rr} = -\sigma_s/\sqrt{2}, \quad s_{r\theta} = 0 \quad (2.13)$$

а затем после интегрирования первого уравнения (2.2) с граничным условием (2.8) при $r = a$ последнюю неизвестную функцию – давление p :

$$p = p_a - \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \int_a^r \Sigma(\sqrt{\xi^2 - 2ct}) d\xi \quad (2.14)$$

Удовлетворим граничному условию (2.8) при $r = b$ и получим условие на разность давлений $p_a - p_b$:

$$p_a - p_b = \sqrt{2} \int_a^b \frac{1}{\xi} \Sigma(\sqrt{\xi^2 - 2ct}) d\xi \quad (2.15)$$

которое после замены независимой переменной $\eta = \sqrt{\xi^2 - 2ct}$ и с учетом того, что $a(t) = \sqrt{a_0^2 + 2ct}$ и $b(t) = \sqrt{b_0^2 + 2ct}$, можно переписать следующим образом:

$$p_a - p_b = \sqrt{2} \int_{a_0}^{b_0} \frac{\eta}{\eta^2 + 2ct} \Sigma(\eta) d\eta \quad (2.16)$$

При $c < 0$ решение выводится аналогично, так что для любого $c = \text{const}$:

$$|p_a - p_b| = \sqrt{2} \int_{a_0}^{b_0} \frac{\eta}{\eta^2 + 2ct} \Sigma(\eta) d\eta \quad (2.17)$$

Из (2.17) видно, что для однородного по пределу текучести материала ($\Sigma(r_0) \equiv \sigma_s = \text{const}$) имеет место известная связь перепада давления $|p_a - p_b|$ с геометрией трубы

$$|p_a - p_b| = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} \ln \frac{b(t)}{a(t)} \quad (2.18)$$

Связь (2.17) (для однородного тела (2.18)) является условием осуществимости идеально пластического течения в любой момент времени или условием полной пластичности. С течением времени перепад давления должен определенным образом изменяться.

Решение задачи о растекании неоднородной идеально пластической трубы получено в предположении квазистатичности процесса деформирования. Выпишем условие осуществимости такого процесса¹. Для этого надо потребовать, чтобы инерционные силы были много меньше внутренних усилий, т.е.

$$\rho \left| \frac{dv_r}{dt} \right| \ll |\text{grad } p|$$

или, учитывая (2.9) и (2.13):

$$c^2 \max_{a_0 < r_0 < b_0} \rho^0(r_0) \ll a^2(t) \min_{a_0 < r_0 < b_0} \Sigma(r_0) \quad (2.19)$$

Другой особенностью решения является его неединственность в том смысле, что c может быть любой константой и даже, как отмечалось ранее, функцией t . Неединственность решения – отличительная особенность краевых задач идеальной пластичности, следующая из самого вида скалярного определяющего соотношения (2.4) (или (1.14)), в котором σ_u не зависит от v_u .

¹ См. Соловьев Г.Х. Нестационарные задачи течения тонкого пластического слоя по деформируемым поверхностям // Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. 01.02.04. Механика деформируемого твердого тела. М., 2004. 104 с.

Аналогично предыдущей решается задача о квазистатическом растекании – стоке неоднородного шарового слоя с радиусами $a(t)$ и $b(t)$ в случае, когда начальное распределение $\Sigma(x_0)$ зависит лишь от радиуса. Поэтому не будем приводить здесь ее точную постановку.

Разыскиваемое поле скоростей в сферической системе координат (r, θ, ϕ) соответствует сферически симметричному растеканию-стоку $v_r = v(r)$, $v_\theta = v_\phi \equiv 0$. Тогда из условия несжимаемости следует

$$v = \frac{d}{r^2}, \quad v_{rr} = -\frac{2d}{r^3}, \quad v_{\theta\theta} = v_{\phi\phi} = \frac{d}{r^3} \quad (2.20)$$

$$v_{r\theta} = v_{r\phi} = v_{\theta\phi} \equiv 0, \quad v_u = \sqrt{6}|d|/r^3$$

где расход d через любую сферу с центром в начале координат – произвольная функция времени. Как и ранее, представим решение в случае, когда эта функция постоянна.

По полю скоростей (2.20) находятся закон движения частиц по лучам

$$r = \sqrt[3]{r_0^3 + 3dt}, \quad \theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0 \quad (2.21)$$

и обратный закон движения

$$r_0 = \sqrt[3]{r^3 - 3dt}, \quad \theta_0 = \theta, \quad \phi_0 = \phi \quad (2.22)$$

так что распределение предела текучести имеет вид

$$\sigma_s(r, \theta, \phi, t) = \Sigma(\sqrt[3]{r^3 - 3dt}) \quad (2.23)$$

При $d > 0$ поле напряжений следующее:

$$s_{rr} = -\sqrt{2/3}\sigma_s, \quad s_{\theta\theta} = s_{\phi\phi} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{6}} \quad (2.24)$$

$$p = p_a - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s - \sqrt{6} \int_a^r \frac{1}{\xi} \Sigma(\sqrt[3]{\xi^3 - 3dt}) d\xi$$

Запишем условие полной пластичности аналогичное (2.17):

$$|p_a - p_b| = \sqrt{6} \int_{a_0}^{b_0} \frac{\eta^2}{\eta^3 + 3dt} \Sigma(\eta) d\eta \quad (2.25)$$

Для однородного по пределу текучести материала ($\Sigma(r_0) \equiv \sigma_s = \text{const}$) перепад давлений $|p_a - p_b|$ связан известным образом с текущим отношением радиусов шарового слоя

$$|p_a - p_b| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s \ln \frac{b(t)}{a(t)} \quad (2.26)$$

Условие квазистатичности процесса растекания – стока выглядит следующим образом:

$$d^2 \max_{a_0 < r_0 < b_0} \rho^0(r_0) \ll a^2(t) \min_{a_0 < r_0 < b_0} \Sigma(r_0) \quad (2.27)$$

3. Постановки задач о слабонеоднородном пластическом течении Сен-Венана. Тот факт, что предел текучести σ_s является заранее неизвестной функцией эйлеровых координат и времени и находится на основании обратного закона движения, делает задачу о неоднородном идеально пластическом течении довольно сложной. Если предел текучести $\Sigma(\mathbf{x}_0)$ в начальном распределении (1.9) мало отличается от некоторой функции $\Sigma^0(\mathbf{x}_0)$:

$$\Sigma(\mathbf{x}_0) = \Sigma^0(\mathbf{x}_0) + \alpha \Sigma^1(\mathbf{x}_0) + \dots$$

$$\alpha = \sup_{\mathbf{x}_0 \in \Omega_0} \frac{\|\Sigma(\mathbf{x}_0) - \Sigma^0(\mathbf{x}_0)\|}{\|\Sigma^0(\mathbf{x}_0)\|} \ll 1 \quad (3.1)$$

где $\Sigma^0(\mathbf{x}_0)$, $\Sigma^1(\mathbf{x}_0)$, ... известны, то имеет смысл использовать асимптотический подход, основанный на разложении в ряды по малому параметру α всех неизвестных величин

$$s_{ij} = s_{ij}^0 + \alpha s_{ij}^1 + \dots, \quad p = p^0 + \alpha p^1 + \dots \quad (3.2)$$

$$v_i = v_i^0 + \alpha v_i^1 + \dots, \quad v_{ij} = v_{ij}^0 + \alpha v_{ij}^1 + \dots$$

Прямой и обратный законы движения также представляются в виде рядов

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{X}^0(\mathbf{x}_0, t) + \alpha \mathbf{X}^1(\mathbf{x}_0, t) + \dots \quad (3.3)$$

$$\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t) + \alpha \mathbf{X}_0^1(\mathbf{x}, t) + \dots$$

С учетом (3.3) каждый из известных коэффициентов ряда (3.1) разлагается в ряд Тейлора, например

$$\Sigma^n(\mathbf{x}_0) = \Sigma^n(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)) + \alpha \frac{\partial \Sigma^n}{\partial x_{0i}}(\mathbf{X}_0^0(\mathbf{x}, t)) X_{0i}^1(\mathbf{x}, t) + O(\alpha^2) \quad (3.4)$$

Если в нулевом по α приближении функция $\Sigma_0^0(\mathbf{x}_0)$ является постоянной ($\Sigma^0(\mathbf{x}_0) \equiv \sigma_s$), то речь идет о слабонеоднородной в узком смысле среде. Для общности будем полагать, что $\Sigma^0(\mathbf{x}_0)$ может быть не равной тождественно константе, и называть такую среду слабонеоднородной в широком смысле [9; 10, 12, 13].

Подставим разложения (3.1)–(3.4) во все уравнения (1.1)–(1.3), (1.5), (1.10) задачи В. Постановка задачи нулевого приближения (для величин с верхним нулевым индексом) совпадет с постановкой задачи В. Для величин же с верхним индексом 1 имеем линеаризованную систему уравнений в области Ω_t :

$$-p_{,i}^1 + s_{ij,j}^1 = 0 \quad (3.5)$$

$$v_{i,i}^1 = 0 \quad (3.6)$$

$$s_{ij}^0 s_{ij}^1 = \Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0i}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0i}^1(\mathbf{x}, t) \right] \quad (3.7)$$

$$s_{\alpha\beta}^1 = \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0i}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0i}^1(\mathbf{x}, t) \right] \frac{v_{\alpha\beta}^0}{v_u^0} + \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{v_u^0} v_{\alpha\beta}^1 - \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{v_u^{0^3}} v_{\alpha\beta}^0 v_{ij}^0 v_{ij}^1, \quad (\alpha; \beta) = \{(1; 1), (2; 2), (1; 2), (1; 3)\} \quad (3.8)$$

$$\frac{dX_i^1}{dt_s} = v_i^1(\mathbf{X}^0, t) + \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j}(\mathbf{X}^0, t) X_j^1(t), \quad X_i^1(0) = 0 \quad (3.9)$$

В определяющих соотношениях в возмущениях (3.7), (3.8) для краткости у вектора \mathbf{X}_0^0 опущены аргументы (\mathbf{x}, t) .

Эта система включает в себя двенадцать уравнений относительно неизвестных $v_1^1, v_2^1, v_3^1, p^1, s_{11}^1, s_{22}^1, s_{12}^1, s_{13}^1, s_{23}^1, X_1^1, X_2^1, X_3^1$. В случае слабой неоднородности в широком смысле от нее не отделяется подсистема (3.5)–(3.8), так как в (3.7) присутствует вектор $\mathbf{X}_0^1(t)$. Если же $\Sigma^0(\mathbf{x}_0) \equiv \sigma_s^0 = \text{const}$ (слабая неоднородность в узком смысле), то последнее слагаемое в правой части (3.7) отсутствует, и можно решать подсистему (3.5)–(3.8) без нахождения поправок к закону движения, после чего проинтегрировать уравнения (3.9) с известными правыми частями.

В *n. 1* приведены различные замкнутые системы уравнений плоского течения неоднородного идеально пластического тела. Выпишем соответствующие им линеаризованные системы относительно возмущений. Системе B' (1.12)–(1.16) соответствует следующая система из семи уравнений:

$$-p_{,I}^1 + s_{IJ,I}^1 = 0 \quad (3.10)$$

$$v_{I,I}^1 = 0 \quad (3.11)$$

$$2(s_{11}^0 s_{11}^1 + s_{12}^0 s_{12}^1) = \Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \quad (3.12)$$

$$s_{11}^1 = \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \frac{v_{11}^0}{v_u^0} + \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{v_u^0} v_{11}^1 - \frac{2\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{v_u^{0^3}} v_{11}^0 (v_{11}^0 v_{11}^1 + v_{12}^0 v_{12}^1) \quad (3.13)$$

$$\frac{dX_I^1}{dt} = v_I^1(\mathbf{X}^0, t) + \frac{\partial v_I^0}{\partial x_J}(\mathbf{X}^0, t) X_J^1(t), \quad X_I^1(0) = 0 \quad (3.14)$$

относительно неизвестных величин $v_1^1, v_2^1, p^1, s_{11}^1, s_{12}^1, X_1^1, X_2^1$.

Системе (1.20)–(1.22) относительно функции напряжения Φ , функции тока ψ и координат $x_1(t), x_2(t)$ соответствует линеаризованная система четырех уравнений

$$\begin{aligned} & 2(L\Phi^0 L\Phi^1 + M\Phi^0 M\Phi^1) = \\ & = \Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
 -L\Phi^1 = & \left[\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right] \frac{M\Psi^0}{2v_u^0} + \\
 & + \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{2v_u^0} M\Psi^1 - \frac{\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0)}{4v_u^0} M\Psi^0 (L\Psi^0 L\Psi^1 + M\Psi^0 M\Psi^1)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dX_1^1}{dt} = & \Psi_{,2}^1(\mathbf{X}^0, t) + \frac{\partial \Psi_{,2}^0}{\partial x_J}(\mathbf{X}^0, t) X_J^1(t) \\
 \frac{dX_2^1}{dt} = & -\Psi_{,1}^1(\mathbf{X}^0, t) - \frac{\partial \Psi_{,1}^0}{\partial x_J}(\mathbf{X}^0, t) X_J^1(t), \quad X_I^1(0) = 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$v_u^0 = \sqrt{((L\Psi^0)^2 + (M\Psi^0)^2)}/2$$

относительно четырех неизвестных $\Phi^1, \Psi^1, X_1^1, X_2^1$.

Из системы (1.24), (1.25), (1.22) относительно угла φ , функции тока ψ и координат $x_1(t), x_2(t)$ следует линеаризованная система, содержащая уравнения

$$\begin{aligned}
 L \left[\left(\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \frac{\partial \Sigma_0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right) \cos 2\varphi^0 - 2\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \varphi^1 \sin 2\varphi^0 \right] = M \left[\left(\Sigma^1(\mathbf{X}_0^0) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\partial \Sigma_0}{\partial x_{0I}}(\mathbf{X}_0^0) X_{0I}^1(\mathbf{x}, t) \right) \sin 2\varphi^0 + 2\Sigma^0(\mathbf{X}_0^0) \varphi^1 \cos 2\varphi^0 \right]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 M\Psi^1 = & -2\sqrt{(L\Psi^0)^2 + (M\Psi^0)^2} \varphi^1 \cos 2\varphi^0 - \\
 & - \frac{L\Psi^0 L\Psi^1 + M\Psi^0 M\Psi^1}{\sqrt{(L\Psi^0)^2 + (M\Psi^0)^2}} \sin 2\varphi^0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

а также уравнения (3.17). В число неизвестных входят четыре функции: $\varphi^1, \Psi^1, X_1^1, X_2^1$.

4. Растекание слабонеоднородной в широком смысле толстостенной трубы. Выберем в качестве невозмущенного процесса, параметры которого будем помечать верхним нулевым индексом, радиальное растекание-сток толстостенной идеально пластической трубы, изученное в п. 2. Предел текучести $\sigma_s^0(r, \theta, t)$ в момент t в каждой точке

области течения $\sqrt{a_0^2 + 2ct} = a^0(t) < r < b^0(t) = \sqrt{b_0^2 + 2ct}$ согласно (2.12) равен

$\Sigma^0(\sqrt{r^2 - 2ct})$. После напряжений имеет вид (2.13), (2.14), а кинематика – (2.9).

Слабая неоднородность в широком смысле означает, что при $t = 0$ предел текучести $\Sigma(r_0, \theta_0)$ мало отличается от известной функции одного переменного $\Sigma^0(r_0)$:

$$\Sigma(r_0, \theta_0) = \Sigma^0(r_0) + \alpha \Sigma^1(r_0, \theta_0) + \dots, \quad \alpha \ll 1 \tag{4.1}$$

Прямой и обратный законы движения частиц вместо (2.10) и (2.11) для невозмущенного процесса соответственно примут вид:

$$\begin{aligned}
 r(r_0, \theta_0, t) = & R^0(r_0, t) + \alpha R^1(r_0, \theta_0, t) + \dots \\
 \theta(r_0, \theta_0, t) = & \theta_0 + \alpha \Theta^1(r_0, \theta_0, t) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} r_0(r, \theta, t) &= R_0^0(r, t) + \alpha R_0^1(r, \theta, t) + \dots \\ \theta_0(r, \theta, t) &= \theta + \alpha \Theta_0^1(r, \theta, t) + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$R_0^0(r_0, t) = \sqrt{r_0^2 + 2ct}, \quad R_0^0(r, t) = \sqrt{r^2 - 2ct} \quad (4.4)$$

С учетом разложений (4.2), (4.3) каждое из заданных распределений $\Sigma^n(r_0, \theta_0)$ в (4.1) аналогично (3.4) разложим в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \Sigma^n(r_0, \theta_0) &= \Sigma^n(R_0^0(r, t), \theta) + \alpha \frac{\partial \Sigma^n}{\partial r_0}(R_0^0(r, t), \theta) R_0^1 + \\ &+ \alpha \frac{\partial \Sigma^n}{\partial \theta_0}(R_0^0(r, t), \theta) \Theta_0^1 + O(\alpha^2) \quad (n = 0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Выпишем систему из семи уравнений (3.10)–(3.14) в возмущениях:

$$-p_{,r}^1 + \frac{1}{r^2}(r^2 s_{rr}^1)_{,r} + \frac{s_{r\theta, \theta}^1}{r} = 0, \quad -p_{,\theta}^1 - s_{rr, \theta}^1 + \frac{1}{r}(r^2 s_{r\theta}^1)_{,r} = 0 \quad (4.6)$$

$$v_{r,r}^1 + v_r^1/r + v_{\theta, \theta}^1/r = 0 \quad (4.7)$$

$$2s_{rr}^0 s_{rr}^1 = \Sigma^0(R_0^0) \left[\Sigma^1(R_0^0, \theta) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial r_0}(R_0^0) R_0^1(r, \theta, t) \right] \quad (4.8)$$

$$s_{r\theta}^1 = \frac{\Sigma^0(R_0^0)}{v_u^0} v_{r\theta}^1 \quad (4.9)$$

$$\frac{dR^1}{dt} = v_r^1(R^0, \theta_0, t) + \frac{\partial v_r^0}{\partial r}(R^0) R^1(t), \quad R^1(0) = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{d\Theta^1}{dt} = \frac{1}{R^0} v_{\theta}^1(R^0, \theta_0, t), \quad \Theta^1(0) = 0$$

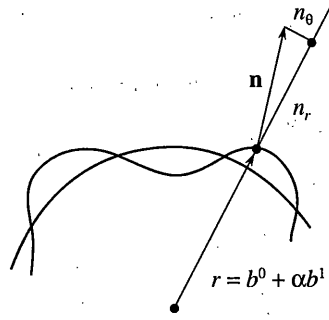
В эту систему входят семь неизвестных функций $v_r^1, v_{\theta}^1, p^1, s_{rr}^1, s_{r\theta}^1, R^1, \Theta^1$. Для краткости у R_0^0 опущены аргументы (r, t) .

Займемся теперь формулировкой граничных условий в возмущениях [14]. Внутренняя $r = a(\theta, t)$ и внешняя $r = b(\theta, t)$ границы растекающейся трубы описываются в полярных координатах уравнениями

$$r = a^0(t) + \alpha a^1(\theta, t), \quad r = b^0(t) + \alpha b^1(\theta, t) \quad (4.11)$$

где согласно (4.3) $a_0(t) = \sqrt{a_0^2 + 2ct}$ и $b^0(t) = \sqrt{b_0^2 + 2ct}$. Единичная внешняя нормаль к возмущенной границе, например, $r = b(\theta, t)$ имеет компоненты (фиг. 2):

$$n_r = \left(1 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2}, \quad n_{\theta} = -\frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial \theta} \left(1 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{\partial b}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2} \quad (4.12)$$



Фиг. 2

Представляя компоненты (4.12) в виде $n_r = 1 + \alpha n_r^1 + \dots$ и $n_\theta = \alpha n_\theta^1 + \dots$, с учетом (4.11) получим

$$n_r^1 \equiv 0, \quad n_\theta^1 = -\frac{1}{b^0} \frac{\partial b^1}{\partial \theta} \tag{4.13}$$

Таким образом, граничные условия

$$\begin{aligned} &(-p^0 + s_{rr}^0 + \alpha(-p^1 + s_{rr}^1) + \dots)_{r=b^0+\alpha b^1+\dots} (1 + O(\alpha^2)) + \\ &+ (s_{r\theta}^0 + \alpha s_{r\theta}^1 + \dots)_{r=b^0+\alpha b^1+\dots} (\alpha n_\theta^1 + \dots) = -p_b (1 + O(\alpha^2)) \\ &(s_{r\theta}^0 + \alpha s_{r\theta}^1 + \dots)_{r=b^0+\alpha b^1+\dots} (1 + O(\alpha^2)) + (-p^0 - s_{rr}^0 + \\ &+ \alpha(-p^1 - s_{rr}^1) + \dots)_{r=b^0+\alpha b^1+\dots} (\alpha n_\theta^1 + \dots) = -\alpha p_b n_\theta^1 + \dots \end{aligned}$$

в возмущениях сносятся на невозмущенную границу $r = b^0(t)$:

$$-p^1 + s_{rr}^1 = \left(\frac{\partial p^0}{\partial r} - \frac{\partial s_{rr}^0}{\partial r} \right) b^1 \tag{4.14}$$

$$s_{r\theta}^1 = (-p^0 - s_{rr}^0 + p_b) \frac{1}{b^0} \frac{\partial b^1}{\partial \theta} \tag{4.15}$$

Перейдем к анализу системы (4.6)–(4.10) с граничными условиями (4.14), (4.15). Из алгебраического уравнения (4.8) и формул (2.13), (4.5) сразу следует выражение для компоненты s_{rr}^1 :

$$s_{rr}^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Sigma^1(R_\theta^0(r, t), \theta) + \frac{\partial \Sigma^0}{\partial r_0}(R_\theta^0(r, t)) R_\theta^1(r, \theta, t) \right] \tag{4.16}$$

Будем искать возмущение поля скоростей v_r^1, v_θ^1 в виде рядов Фурье по углу θ :

$$\begin{aligned} v_r^1 &= \frac{1}{r} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta, \quad v_\theta = v_\theta^1(r) \\ v_{rr}^1 &= -\frac{1}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta, \quad v_{r\theta}^1 = \frac{1}{2} \left(v_\theta^{1'} - \frac{1}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} m c_m \sin m\theta \right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

где v_θ – неизвестная функция, $c_m = \text{const}$. Тем самым условие несжимаемости (4.7) автоматически удовлетворится.

Первое уравнение (4.10) после подстановки в него выражений v_r^0 (2.9) и v_r^1 (4.17) переписывается следующим образом:

$$\frac{dR^1}{dt} + \frac{cR^1}{r_0^2 + 2ct} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta_0}{\sqrt{r_0^2 + 2ct}}, \quad R^1(0) = 0 \quad (4.18)$$

Из точного решения задачи Коши (4.18)

$$R^1(r_0, \theta_0, t) = \frac{t \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta_0}{\sqrt{r_0^2 + 2ct}} \equiv \frac{t \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta_0}{R^0(r_0, t)} \quad (4.19)$$

нетрудно найти R_0^1 :

$$R_0^1(r, \theta, t) = -\frac{t \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta}{\sqrt{r^2 - 2ct}} \equiv -\frac{t \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta}{R_0^0(r, t)} \quad (4.20)$$

Выражение (4.20) уже можно подставить в (4.16), так что компонента s_{rr}^1 станет известной функцией эйлеровых координат r, θ и времени t для любого заданного распределения предела текучести Σ^1 .

Далее из (4.17) и соотношения (4.9) следует

$$s_{r\theta}^1 = \frac{\Sigma^0}{2v_u^0} \left(v_\theta^{1'} - \frac{1}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} m c_m \sin m\theta \right) \quad (4.21)$$

С учетом (4.21) первое уравнение равновесия (4.6) дает

$$p_{,r} = s_{rr,r}^1 + \frac{2s_{rr}^1}{r} - \frac{\Sigma^0}{2v_u^0 r^3} \sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m \cos m\theta \quad (4.22)$$

причем правая часть в (4.22) известна. Интегрируя уравнение (4.22) по r с граничным условием (4.16), куда согласно (4.19) надо подставить

$$b^1 = \frac{t}{b^0} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta \quad (4.23)$$

придем к выражению для возмущения давления p^1 :

$$p^1 = s_{rr}^1 - 2 \int_r^{b^0} s_{rr}^1(\xi, \theta, t) \frac{d\xi}{\xi} + \frac{1}{2\sqrt{2}c} \sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m \cos m\theta \int_r^{b^0} (\sqrt{\xi^2 - 2ct}) \frac{d\xi}{\xi} + \frac{\sqrt{2}t}{b^{0^2}} \Sigma^0(b_0) \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta \quad (4.24)$$

После подстановки $r = a^0(t)$ в (4.24) получим

$$\frac{P_a - P_b}{4c} \sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m \cos m\theta - 2 \int_{a^0}^{b^0} s_{rr}^1(\xi, \theta, t) \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \sqrt{2}t \left(\frac{\Sigma^0(a_0)}{a^{0^2}} - \frac{\Sigma^0(b_0)}{b^{0^2}} \right) \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\theta \quad (4.25)$$

т.е. условие осуществимости пластического течения с кинематикой (4.17) аналогичное (2.15) для радиального движения. Анализируя зависимость обеих частей равенства (4.25) от θ и разложив Σ_1 в ряд Фурье по той же системе $\cos m\theta$ с коэффициентами d_m , можно выразить d_m через c_m .

Последняя неизвестная компонента напряжений $s_{r\theta}^1$ определяется в результате интегрирования по r второго уравнения (4.6) с граничным условием (4.15). После этого из (4.21) находится $v_\theta^1(r)$, а затем из второго уравнения (4.10) функция $\Theta^1(r_0, \theta_0, t)$.

Из решения задачи в возмущениях видны временные границы применимости асимптотических разложений (3.2) с малым параметром α . Коэффициенты с верхними индексами 1 в этих разложениях пропорциональны t , поэтому регулярные асимптотики по α заведомо перестают быть верными в погранслошной области $t \sim 1/\alpha$. Здесь необходимо привлекать методы сингулярных возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00397, 05-01-00401 и 05-01-00403).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильющин А.А. Пластичность. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высш. школа, 1969. 608 с.
3. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
4. Кийко И.А. Теория пластического течения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 76 с.
5. Задоян М.А. Пространственные задачи теории пластичности. М.: Наука, 1992. 382 с.
6. Ишлинский А.Ю., Ивлёв Д.Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 702 с.
7. Зубчанинов В.Г. Математическая теория пластичности. Тверь: Изд-во ТвГТУ, 2002. 300 с.
8. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
9. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Петров А.Г. О безынерционном деформировании слабо неоднородной вязкой среды // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2002. № 2. С. 37–41.
10. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Петров А.Г. Задачи о безынерционном течении слабо неоднородных вязкопластических сред // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 3. С. 17–25.
11. Петров А.Г. Асимптотический метод построения отображения Пуанкаре при описании перехода к динамическому хаосу в гамильтоновых системах // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 1. С. 15–19.
12. Георгиевский Д.В., Климов Д.М. Энергетический анализ развития кинематических возмущений в слабо неоднородных вязких жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 56–67.
13. Георгиевский Д.В. Динамические возмущения недеформированного состояния в идеально пластических течениях // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 4. С. 45–50.
14. Ильющин А.А. Деформация вязкопластичного тела // Учен. зап. МГУ. Механика. 1940. Вып. 39. С. 3–81.