

УДК 539.3

© 2005 г. В.А. АНДРУЩЕНКО, В.А. ГОЛОВЕШКИН, В.В. ЗУЕВ, Н.Н. ХОЛИН

СТОЛКНОВЕНИЕ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ УДАРНИКОВ С ЖЕСТКИМ НЕПОДВИЖНЫМ ПРЕПЯТСТВИЕМ

С помощью аналитических и численных методов решены задачи о соударении с умеренной скоростью $V_0 \leq 70$ м/с (в рамках малых деформаций) упругих и упругопластических ударников различной конфигурации с абсолютно жесткой плоскостью. Для упругих ударников вычислено напряжение в некотором характерном сечении при их различной ориентации относительно плоскости.

Ранее в [1, 2] аналитически исследовались задачи о соударении с жесткой гладкой преградой коротких плоских упругих стержней; изучались процессы отскока ударника и потери им импульса при отскоке, связанной с переходом части энергии стержня в энергию его поперечных колебаний. В [3–5] аналитически и численно исследовались: задача о соосном соударении цилиндра с круглой пластиной (было получено хорошее совпадение результатов теоретического и численного подходов), а также задача об отскоке кубического ударника от абсолютно жесткой плоскости.

Следует отметить, что задачи по исследованию напряженно-деформированного состояния ударников различной формы и реологии, процессов волнообразования в них и их отскока от препятствий изучались многими авторами (см., например, [6–10]). В публикуемой статье делается попытка выявить и изучить такие аспекты проблемы теории ударников, которые не нашли отражения в работах других авторов.

1. Удар П-образной плоской формы о жесткую преграду. Проведем исследование удара П-образной формы о неподвижную преграду в плоской динамической упругой постановке, принимая за основу гипотезу о плоском деформированном состоянии. Вначале рассмотрим случай удара торцами, который для краткости назовем прямым ударом (см. фиг. 1, а).

Введем следующие обозначения: l, h – длина и поперечный размер торцевых стержней; l_1, h_1 – длина и поперечный размер перекладины; V_0 – начальная скорость соударения; ρ – плотность материала ударника; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона; $E^* = E(1 - \nu^2)$ – аналог модуля Юнга при плоском деформированном состоянии.

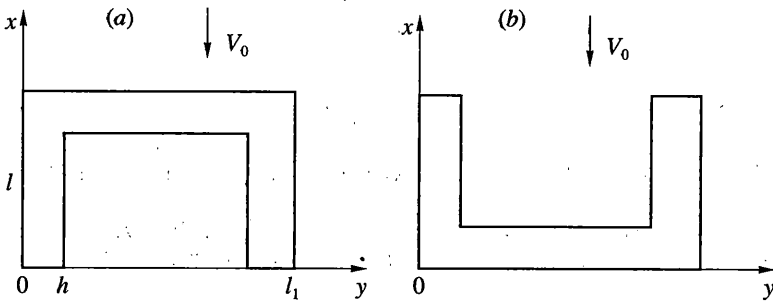
Уравнение движения для торцевых стержней в рамках стержневой теории имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E^*}{\rho} \quad (1.1)$$

где u – перемещения стержня вдоль оси, t – время, x – осевая координата.

Начальные условия при $t = 0$ таковы:

$$u = 0, \quad \partial u / \partial t = -V_0 \quad (1.2)$$



Фиг. 1

Граничные условия имеют вид

$$u = 0 \text{ при } x = 0, \quad hE^* \frac{\partial u}{\partial x} = -F(t) \text{ при } x = l \quad (1.3)$$

где $F(t)$ – сила на участке контакта торцевого стержня и перекладины.

Применяя к уравнению (1.1) преобразование Лапласа по t :

$$F(p) = \int_0^{\infty} F(t) \exp(-pt) dt \quad (1.4)$$

получим

$$p^2 u = -V_0 + a^2 \partial^2 u / \partial x^2 \quad (1.5)$$

Решение (1.5) имеет вид:

$$u = -\frac{V_0}{p^2} + A_1 \exp\left(-\frac{p}{a}x\right) + A_2 \exp\left(\frac{p}{a}x\right) \quad (1.6)$$

Константы A_1, A_2 определяются из граничных условий (1.3), которые после преобразования Лапласа (1.4) запишутся в следующем виде:

$$A_1 + A_2 = V_0/p^2$$

$$A_1 \exp\left(-\frac{pl}{a}\right) - A_2 \exp\left(\frac{pl}{a}\right) = \frac{a}{pE^*h} F(p)$$

Подставляя A_1 и A_2 в (1.6), получим:

$$u(x) = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{V_0 \operatorname{ch}[p(l-x)/a]}{p^2 \operatorname{ch} pl/a} - \frac{aF(p) \operatorname{sh} px/a}{phE^* \operatorname{ch} pl/a} \quad (1.7)$$

$$u(l) = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{V_0}{p^2 \operatorname{ch} pl/a} - \frac{aF(p) \operatorname{sh} pl/a}{phE^* \operatorname{ch} pl/a}$$

Перекладина рассматривается как пластина. Уравнение движения для нее имеет вид:

$$\rho h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{E^* h_1^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

Здесь w – нормальные перемещения (ось y направлена перпендикулярно торцевым стержням вдоль пластины (см. фиг. 1, а)).

Начальные условия при $t = 0$ таковы

$$w = 0, \quad \partial w / \partial t = -V_0$$

Граничные условия при $y = 0$ и $y = l_1$ имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{E^* h_1^3 \partial^3 w}{12 \partial y^3} = F(t)$$

Следует отметить, что характерное расстояние распространения возмущений за время t в задаче о пластине равно

$$R_{ch} = \sqrt[4]{(E^*/\rho) h_1^2 t^2} = \sqrt{a h_1 t}$$

При $t = l/a$ имеем $R_{ch} = \sqrt{h_1 l}$. Тогда $R_{ch}/l_1 \approx \sqrt{h_1 l/l_1^2}$ и, если отношение длины торцевого стержня к длине перекладины имеет порядок единицы, а поперечные размеры достаточно малы по сравнению с длиной, то за время прохождения продольной волны несколько раз вдоль торцевого стержня влиянием одного края пластины на второй можно пренебречь и пластину можно считать бесконечной.

Рассмотрим известную задачу о воздействии сосредоточенной силы на пластину в плоской постановке.

Уравнение движения для пластины имеет вид:

$$\rho h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{E^* h_1^3 \partial^4 w}{12 \partial y^4}$$

Начальные условия при $t = 0$ таковы

$$w = 0, \quad \partial w / \partial t = 0$$

Граничные условия при $y = 0$ будут

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{E^* h_1^3 \partial^3 w}{12 \partial y^3} = F(t)$$

Применяя преобразование Лапласа (1.4), получим

$$p^2 w = -V_0 - \frac{E^* h_1^2 \partial^4 w}{12 \rho \partial y^4}$$

Из условия ограниченности решения на бесконечности при $y > 0$ получим

$$w = -V_0/p^2 + B_1 \exp(-\alpha y) \cos \alpha y + B_2 \exp(-\alpha y) \sin \alpha y, \quad \alpha^4 = 3p^2/(a^2 h_1^2)$$

Используя граничные условия при $y = 0$, решение при $y > 0$ запишем в виде:

$$w = -V_0/p^2 + B \exp(-\alpha y) \cos \alpha y + B \exp(-\alpha y) \sin \alpha y$$

$$B = \frac{F(p)}{p \sqrt{p} \rho h_1 \sqrt{a h_1}}$$

В результате будем иметь

$$w(0) = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{F(p)}{p\sqrt{p}} \frac{\sqrt[4]{3}}{\rho h_1 \sqrt{ah_1}}$$

Приравнявая $u(l)$ из (1.7) и $w(0)$, получим уравнение для определения $F(p)$:

$$F(p) = \frac{V_0}{a} E^* h \frac{2 \exp(-pl/a)}{[(\sqrt{p} + \beta) + (\beta - \sqrt{p}) \exp(-2pl/a)] \sqrt{p}} \quad (1.8)$$

$$\beta = \frac{h}{h_1} \sqrt{\frac{a}{h_1}} \sqrt[4]{3}$$

Разлагая в ряд по $\exp(-pl/a)$ выражение (1.8) для $F(p)$, перепишем его в виде

$$F(p) = 2 \frac{V_0}{a} E^* h \frac{1}{(\sqrt{p} + \beta) \sqrt{p}} \times$$

$$\times \left[\exp\left(-\frac{pl}{a}\right) - \frac{(\beta - \sqrt{p})}{(\beta + \sqrt{p})} \exp\left(-3\frac{pl}{a}\right) + \left(\frac{\beta - \sqrt{p}}{\beta + \sqrt{p}}\right)^2 \exp\left(-5\frac{pl}{a}\right) - \dots \right]$$

Тогда при $0 < t < l/a$ $F(t) = 0$, а при $l/a < t < 3l/a$:

$$F(t) = E^* \frac{2V_0}{a} h \exp(\beta^2 \tau) \operatorname{erfc}(\beta \sqrt{\tau}), \quad \tau = t - \frac{l}{a}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-x^2) dx$$

Заметим, что $F(l/a) = E^* 2V_0 h/a$.

Для малых τ ($\beta \sqrt{\tau} \ll 1$):

$$F(t) \approx E^* \frac{2V_0}{a} h \left(1 - 2\beta \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\right)$$

Для больших t :

$$F(t) \approx E^* \frac{2V_0}{a} h \frac{1}{\beta \sqrt{\pi \tau}}$$

При $l/a < t < 3l/a$ имеем

$$F(t) = E^* \frac{2V_0}{a} h [\exp(\beta^2 \tau) \operatorname{erfc}(\beta \sqrt{\tau}) + \exp(\beta^2 \tau_1) \operatorname{erfc}(\beta \sqrt{\tau_1})] -$$

$$- E^* \frac{2V_0}{a} h 4\beta \tau_1 \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \tau_1}} - \beta \exp(\beta^2 \tau_1) \operatorname{erfc}(\beta \sqrt{\tau_1}) \right], \quad \tau_1 = t - \frac{3l}{a}$$

При $t \rightarrow 3l/a + 0$ находим

$$F(t) = E^* \frac{2V_0}{a} h [\exp(\beta^2 \tau) \operatorname{erfc}(\beta \sqrt{\tau}) + 1]$$

Рассмотрим теперь случай удара перекладиной (см. фиг. 1, *b*), который для краткости назовем обратным ударом.

При ударе перекладиной о жесткую неподвижную поверхность для торцевых стержней имеем следующее уравнение движения:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = a^2 \partial^2 u / \partial x^2 \quad (1.9)$$

Начальные условия при $t = 0$ таковы:

$$u = 0, \quad \partial u / \partial t = -V_0 \quad (1.10)$$

Граничные условия имеют вид:

$$hE^* \frac{\partial u}{\partial x} = -F(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \quad (1.11)$$

где $F(t)$ – сила на участке контакта торцевого стержня и перекладины.

Применяя преобразование Лапласа (1.4) к уравнению (1.9), получим

$$p^2 u = -V_0 + a^2 \partial^2 u / \partial x^2 \quad (1.12)$$

Решение (1.12) имеет вид:

$$u = -\frac{V_0}{p^2} + A_1 \exp\left(-\frac{p}{a}x\right) + A_2 \exp\left(\frac{p}{a}x\right) \quad (1.13)$$

Граничные условия (1.11) после преобразования Лапласа (1.4) запишутся в виде:

$$A_1 - A_2 = \frac{a}{pE^*h} F(p)$$

$$A_1 \exp\left(-\frac{pl}{a}\right) - A_2 \exp\left(\frac{pl}{a}\right) = 0$$

Тогда из (1.13) получим

$$u(x) = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{aF(p) \operatorname{ch} p(l-x)/a}{phE^* \operatorname{sh} pl/a}, \quad u(0) = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{aF(p) \operatorname{ch} pl/a}{phE^* \operatorname{sh} pl/a}$$

Уравнение движения для пластины имеет вид

$$\rho h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{E^* h_1^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + G(t)$$

$$G(t) = (\lambda + 2\mu)V_0/c \quad \text{при} \quad 0 < t < 2h_1/c \quad (1.14)$$

$$G(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 2h_1/c, \quad c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$$

Здесь $G(t)$ – сила, действующая на пластину при ее ударе о неподвижную преграду; λ, μ – постоянные Ламе.

Начальные условия при $t = 0$ таковы: $w = 0, \partial w / \partial t = -V_0$. Граничные условия при $y = 0$ будут

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{E^* h_1^3}{12} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = -F(t)$$

Применяя к (1.14) преобразование Лапласа (1.4), получим

$$p^2 w = -V_0 - \frac{E^* h_1^2 \partial^4 w}{12\rho \partial y^4} + \frac{cV_0}{h_1 p} \left(1 - \exp\left(-\frac{2h_1}{c} p\right)\right)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$w(0) = -\frac{V_0}{p^2} - \frac{F(p)}{p\sqrt{p}\rho h_1\sqrt{ah_1}} + \frac{cV_0}{h_1 p^3} \left(1 - \exp\left(-\frac{2h_1}{c} p\right)\right)$$

Приравнявая $u(0)$ и $w(0)$, получим уравнение для определения $F(p)$:

$$F(p) = \frac{V_0 E^* h c}{ah_1} \frac{1 - \exp(-2ph_1/c)}{p} \frac{1 - \exp(-2pl/a)}{(\sqrt{p} + \beta)\sqrt{p}[1 - (\beta - \sqrt{p})/(\beta + \sqrt{p})\exp(-2pl/a)]}$$

Аналогичным образом, раскладывая это выражение в ряд по $\exp(-pl/a)$, получим выражение для $F(t)$. Тогда при $0 < t < 2h_1/c$ имеем:

$$F(t) = E^* \frac{V_0 h c}{ah_1} \left[\exp(\beta^2 t) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t}) - 1 + \frac{2\beta\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \right]$$

При $2h_1/c < t < 2l/a$:

$$F(t) = E^* \frac{V_0 h c}{ah_1 \beta^2} \left[\exp(\beta^2 t) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t}) - \exp(\beta^2(t - 2h_1/c)) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{(t - 2h_1/c)}) \right] + \\ + E^* \frac{2V_0 h c}{ah_1 \beta \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{t} - \sqrt{(t - 2h_1/c)} \right]$$

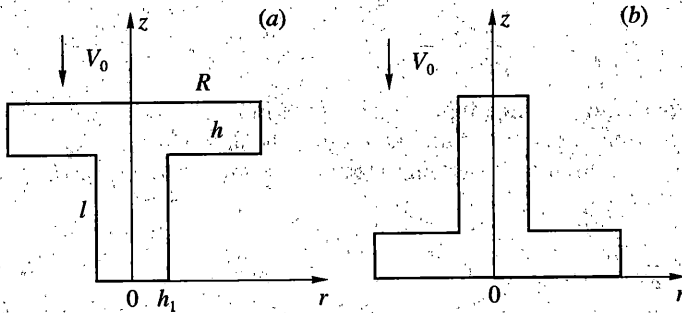
При больших $\beta\sqrt{t}$ получим приближенную оценку $F(t)$ [11]:

$$F(t) \approx E^* \frac{2V_0 h c}{ah_1 \beta \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{t} - \sqrt{(t - 2h_1/c)} - \frac{1}{2\beta\sqrt{(t - 2h_1/c)}} + \frac{1}{2\beta\sqrt{t}} \right] + \\ + E^* \frac{2V_0 h c}{ah_1 \beta \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{t} - \sqrt{(t - 2h_1/c)} \right]$$

При $2l/a < t < a + 2h_1/c$ имеем

$$F(t) = E^* \frac{V_0 h c}{ah_1 \beta^2} \left[\exp(\beta^2 t) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{t}) - \exp(\beta^2(t - 2h_1/c)) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{(t - 2h_1/c)}) \right] + \\ + E^* \frac{2V_0 h c}{ah_1 \beta^2 \sqrt{\pi}} \left[\beta\sqrt{t} - \beta\sqrt{(t - 2h_1/c)} \right] + \\ + E^* \frac{2V_0 h c}{ah_1 \beta^2} \left[\exp(\beta^2(t - 2l/a)) \operatorname{erfc}(\beta\sqrt{(t - 2l/a)}) - 1 \right] + E^* \frac{4V_0 h c}{ah_1 \beta^2 \sqrt{\pi}} \beta\sqrt{(t - 2l/c)}$$

С помощью полученных выражений оценим безразмерные напряжения в торцевом стержне в точке контакта стержня и перекладины, принимая в качестве оценки безразмерную величину $S = F/hrcV_0$.



Фиг. 2

Проведем оценки для следующих значений размерных определяющих параметров задачи: $E = 0.2$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ кг/м³, при $h = h_1$, $l = 5h$. Тогда $c = 5800$ м/с, $a = 5300$ м/с. В результате будем иметь:

для прямого удара: $t = l/a + 0$, $S = 1.83$; $t = 3l/a - 0$, $S = 0.25$; $t = 3l/a + 0$, $S = 2.07$;
 для обратного удара: $t = 2h_1/c$, $S = 0.74$; $t = 2l/a$, $S = 0.24$; $t = 2l/a + 2h_1/c$, $S = -0.32$.

Из полученных оценок видно, что при обратном ударе напряжения существенно меньше.

Таким образом, можно сделать вывод, что разработанный на основе аналитического подхода метод позволяет достаточно просто получить оценки некоторых интегральных величин в задаче соударения.

2. Соударение грибовидного ударника с жесткой преградой. Проведем исследование взаимодействия упругого грибовидного ударника (так назовем ударник, состоящий из цилиндрической пластины – “шляпки” и цилиндрического стержня-ручки – “ножки”) с неподвижной плоскостью в осесимметричной постановке (см. фиг. 2, а, б).

Введем следующие обозначения: h_1 – радиус ножки, l – длина ножки, h – толщина пластины, R – ее радиус. Будем предполагать, что $r \ll R$, $l \ll R$. Определим интегральное усилие, возникающее в месте соединения ножки с пластиной. Исследования проводятся для малых времен, порядка нескольких прохождений продольной волны вдоль ножки, поэтому влиянием краев пластины будем пренебрегать.

Вначале рассмотрим случай удара торцом ножки, который назовем прямым ударом (см. фиг. 2, а).

Обозначим $u(z, t)$ – перемещения ножки ударника (круглого стержня). Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad c_1^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.1)$$

Здесь t – время, ρ – плотность, E – модуль Юнга.

Перемещения шляпки (цилиндрической пластины) обозначим $w(r, t)$. Силу, возникающую в результате взаимодействия с препятствием, в точке контакта шляпки и ножки обозначим $F(t)$ и будем приближенно считать ее сосредоточенной. Тогда для пластины имеем уравнение:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -k^2 \Delta w - \frac{F(t)}{\rho h} \delta(r)$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (2.2)$$

$$k^2 = \frac{Eh^3}{12\rho h(1-\nu^2)}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

где δ – дельта функция, ν – коэффициент Пуассона.

Начальные условия при $t = 0$ таковы: $\partial u/\partial t = \partial w/\partial t = -V_0$.

Обозначим перемещение пластины в начале координат w_0 : $w(0, t) = w_0$. В таком случае из (2.2) следует (см. [3]):

$$\frac{dw_0}{dt} = -V_0 + \frac{k}{8D}F \quad (2.3)$$

Применяя к уравнениям (2.1), (2.3) преобразование Лапласа (1.4), получим

$$p^2 u = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - V_0 \quad (2.4)$$

$$pw_0 = \frac{k}{8D}F - \frac{V_0}{p} \quad (2.5)$$

Граничные условия для уравнения (2.1):

$$u = 0 \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} E\pi h_1^2 = -F \quad \text{при} \quad z = l$$

Решение (2.4) имеет вид:

$$u = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{V_0 \operatorname{ch}[p(z-l)/c_1]}{p^2 \operatorname{ch}(pl/c_1)} - \frac{F c_1 \operatorname{sh}(pz/c_1)}{E\pi h_1^2 p \operatorname{ch}(pl/c_1)}$$

Значение F определяется из условия: $u(l) = w_0$. Тогда получим

$$F = 2 \frac{V_0 \exp(-pl/c_1)}{p [k/8D + c_1/E\pi h_1^2] + [k/8D - c_1/E\pi h_1^2] \exp(-2pl/c_1)}$$

Уравнение для F можно переписать в виде:

$$F = \frac{2V_0 \exp(-pl/c_1)}{p [1 - \beta_1 \exp(-2pl/c_1)]} \frac{c_1 \rho \pi h_1^2}{\beta} \quad (2.6)$$

$$\beta = 1 + \frac{\pi}{4} \sqrt{3(1-\nu^2)} \alpha^2, \quad \beta_1 = \frac{1 - 1/4\pi \sqrt{3(1-\nu^2)} \alpha^2}{1 + 1/4\pi \sqrt{3(1-\nu^2)} \alpha^2}, \quad \alpha = \frac{h_1}{h}$$

Заметим, что $|\beta_1| < 1$. В дальнейшем положим $h = 2h_1$, тогда $\alpha = 1/2$ и $\beta_1 > 0$. Силу F представим в виде: $F = \rho c_1 V_0 \pi h_1^2 f$.

Тогда, подставив F из (2.6), получим

$$f = \frac{2 \exp(-pl/c_1)}{p \beta [1 - \beta_1 \exp(-2pl/c_1)]}$$

Функцию f можно представить в виде

$$f = \frac{2}{\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_1^n \exp[-pl(2n+1)/c_1].$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим: $f = 0$ при $0 \leq t < l/c_1$, $f = 2/\beta$ при $l/c_1 \leq t < 3l/c_1$, $f = 2(1 + \beta_1)/\beta$ при $3l/c_1 \leq t \leq 5l/c_1$ и т.д.

Заметим, что после второго прихода волны от нижнего торца ножки возрастание нагрузки определяется величиной $(1 + \beta_1)$, и при $\alpha = 1/2$, $\nu = 0.3$, $\beta_1 \approx 0.52$, т.е. нагрузка увеличивается в полтора раза.

При $t \rightarrow \infty$ увеличение нагрузки определяется величиной $1/(1 - \beta_1)$, что соответствует примерно ее двукратному увеличению.

Рассмотрим теперь случай обратного удара – удара шляпкой-пластиной (фиг. 2, б).

Для ножки-стержня уравнение движения имеет вид:

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c_1^2 \partial^2 u / \partial x^2 \tag{2.7}$$

с начальными условиями при $t = 0$:

$$u = 0, \quad \partial u / \partial t = -V_0.$$

и граничными условиями

$$E\pi h_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -F(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = l \tag{2.8}$$

где $F(t)$ – сила, возникающая в месте контакта стержня и пластины.

Применяя к (2.7) преобразование Лапласа (1.4) с учетом граничных условий (2.8), получим решение в следующем виде:

$$u = -\frac{V_0}{p^2} + \frac{c_1 F(p) \operatorname{ch} p(l-x)/c_1}{E\pi h_1^2 p \operatorname{sh} pl/c_1}$$

Уравнение движения для шляпки-пластины имеет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -k^2 \Delta \Delta w - \frac{F(t)}{\rho h} \delta(r) + \frac{G(t)}{\rho h} \tag{2.9}$$

с начальными условиями

$$w = 0, \quad \partial w / \partial t = -V_0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

Функция $G(t)$ определяется из решения одномерной задачи об ударе: $G(t) = (\lambda + 2\mu)V_0/c$ при $0 \leq t < 2h/c$, $G(t) = 0$ при $t > 2h/c$.

Обозначая $w(0, t) = w_0$ и применяя преобразование Лапласа (1.4), получим

$$p w_0 = -\frac{k}{8D} F - \frac{V_0}{p} + \frac{G(p)}{p \rho h}$$

Уравнение для определения силы F получим из условия $w_0 = u(0, t)$. Тогда выражение для силы $F(p)$ запишется в виде

$$F(p) = \frac{c_1 \pi h_1^2}{h} \frac{1 - \exp(-2pl/c_1)}{\beta_1 + \beta_1 \exp(-2pl/c_1)} \frac{G(p)}{p}$$

$$G(p) = (\lambda + 2\mu) \frac{V_0 l}{c p} [1 - \exp(-2ph/c_1)]$$

Силу $F(p)$ представим в виде:

$$F(p) = \rho c_1 \pi h^2 f_1(p)$$

$$f_1(p) = \frac{c}{h} \frac{1}{p^2} [1 - \exp(-2ph/c)] \frac{1}{\beta} \left[\frac{1 - \exp(-2pl/c_1)}{1 + \beta_1 \exp(-2pl/c_1)} \right]$$

Раскладывая в ряд по $\exp(-pl/a)$ выражение для $f_1(p)$, перепишем его следующим образом:

$$f_1(p) = \frac{c}{h} \frac{1}{p^2} [1 - \exp(-2ph/c)] \frac{1}{\beta} \times \\ \times [1 - (\beta_1 + 1) \exp(-2pl/c_1) + \beta_1(\beta_1 + 1) \exp(-4pl/c_1) - \beta_1^2(\beta_1 + 1) \exp(-6pl/c_1) + \dots]$$

Применяя обратное преобразование Лапласа и полагая $h/c < l/c_1$, получим значения величины $f_1(t)$ в виде:

$$f_1(t) = \frac{1}{\beta} \frac{c}{h} t \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{2h}{c}$$

$$f_1(t) = \frac{2}{\beta} \quad \text{при} \quad 2h/c \leq t < 2l/c_1$$

$$f_1(t) = \frac{2}{\beta} - \frac{(\beta_1 + 1)}{\beta} \left(t - \frac{2l}{c_1} \right) \frac{c}{h} \quad \text{при} \quad \frac{2l}{c_1} \leq t \leq \frac{2l}{c_1} + \frac{2h}{c}$$

Видно, что значение $f_1(t)$ не превышает величины $2/\beta$ и уменьшается с приходом волны, отраженной от свободного торца ножи.

В заключение отметим, что при прямом ударе нагрузка f_1 возростала и превысила величину $2/\beta$, при обратном ударе аналогичная нагрузка f_1 уменьшалась с приходом отраженной волны и не превышала величину $2/\beta$. Следовательно напряжения, возникающие при обратном ударе в грибовидном теле, меньше напряжений, возникающих при прямом ударе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ в рамках реализации целевой программы гранта по тематике "Интеграция".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головешкин В.А. О потере контакта ударника с преградой // Механика композиционных материалов и конструкций. 1999. Т. 5. № 4. С. 145–150.
2. Андрущенко В.А., Головешкин В.А., Холин Н.Н. Дефект импульса при ударе короткого стержня о гладкую преграду // ИФЖ. 2001. Т. 74. № 1. С. 111–117.
3. Андрущенко В.А., Головешкин В.А., Холин Н.Н. Задача о соосном соударении цилиндра с круглой пластиной // Изв. АН СССР. МТГ. 1990. № 5. С. 81–88.
4. Андрианкин Э.И., Андрущенко В.А., Холин Н.Н. Численная методика решения трехмерных нестационарных задач динамики упругопластических сред // ЖВММФ. 1988. Т. 28. № 11. С. 1711–1718.

5. *Холин Н.Н., Андрущенко В.А.* Расчеты на прочность в условиях интенсивных импульсных воздействий // Расчеты на прочность. Вып. 31. М.: Машиностроение, 1990. С. 208–230.
6. *Кукуджанов В.Н.* Распространение упругопластических волн в стержне с учетом влияния скорости деформации. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 47 с.
7. *Веклич Н.А.* О распространении и взаимодействии упругопластических волн в стержне при ударе о преграду // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 4. С. 182–186.
8. *Белевич С.М., Коротких Ю.Г.* Некоторые результаты численного исследования процесса соударения стержня с жесткой преградой // Методы решения задач упругости и пластичности. Вып. 6. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1972. С. 85–99.
9. *Гулидов А.И., Фомин В.М.* Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды // ПМТФ. 1980. № 3. С. 126–132.
10. *Киселев А.Б.* Численное исследование в трехмерной постановке процесса соударения упругопластических тел с жесткой преградой // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1985. № 4. С. 51–56.
11. *Abramovitz M., Stegun I.A.* (ed.) Handbook of mathematical functions. N.Y.: Dover Publ., 1970. 1045 p.

Москва

Поступила в редакцию
24.10.2003